Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

А. Ф. ВАСИЛЬЕВ, Т. И. ВАСИЛЬЕВА, В. Н. ТЮТЯНОВ

О ЧАСТИЧНО СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

ПРЕПРИНТ № 1, *март 2010*

Гомель
УО «ГГУ им.Ф.Скорины»
2010

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Свойства группы во многих случаях определяются индексами цепей подгрупп, связывающих заданные подгруппы с группой. Например, для сверхразрешимости группы G (теорема 9.5 [1]) необходимо и достаточно, чтобы любая подгруппа из G была соединена с G цепью подгрупп с простыми индексами. В связи с этим в [2] было введено следующее

Определение 1. *Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп*

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $|H_{i+1} : H_i|$ — простое число для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Обозначается H $\mathbb{P}$-sn G.

Строение группы связано со свойствами ее силовских подгрупп, в частности, со способом вложения этих подгрупп в группу. Например, хорошо известен следующий результат: группа нильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее силовская подгруппа является субнормальной.

Пусть π — некоторое множество простых чисел.

Определение 2. *Группу G назовем w_π-сверхразрешимой, если для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$ силовская p-подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G.*

Всякая π'-группа по определению является w_π-сверхразрешимой.

Обозначим через $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{U}$ класс всех w_π-сверхразрешимых групп.

Для случая, когда $\pi = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, будем называть $\mathrm{w}_\mathbb{P}$-сверхразрешимую группу w-сверхразрешимой и вместо $\mathrm{w}_\mathbb{P}\mathfrak{U}$ использовать обозначения $\mathrm{w}\mathfrak{U}$.

Заметим, что для множеств простых чисел π_1 и π_2 таких, что $\pi_1 \subseteq \pi_2$, имеет место включение $\mathrm{w}\mathfrak{U} \subseteq \mathrm{w}_{\pi_2}\mathfrak{U} \subseteq \mathrm{w}_{\pi_1}\mathfrak{U}$.

Ясно, что всякая сверхразрешимая группа является разрешимой w_π-сверхразрешимой. Для $\pi = \mathbb{P}$ пример 1 из [2] показывает, что обратное утверждение в общем случае неверно.

Настоящая работа посвящена изучению свойств w_π-сверхразрешимых групп.

1. Предварительные результаты

Используются обозначения и терминология из [3, 4]. Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе.

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех различных простых делителей порядка группы G.

$\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел.

$O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G для некоторого простого числа p.

G_p — силовская p-подгруппа группы G.

$G_{p'}$ — дополнение к силовской p-подгруппе в группе G, т.е. холлова p'-подгруппа группы G.

1 — единичная группа.

$\mathrm{Syl}_p(G)$ — множество силовских p-подгрупп группы G.

$\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп.

$\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп.

Группа G порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ называется дисперсивной по Оре [4, с. 251], если $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия: 1) каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$; 2) из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$. По определению пустой класс групп является формацией.

Формация $\mathfrak{F}$ называется:

1) нормально наследственной, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит и все ее нормальные подгруппы;

2) насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Согласно [1] A-группой называется группа, у которой любая силовская подгруппа является абелевой. Класс всех A-групп образует наследственную формацию.

По теореме Гашюца-Любезедер-Шмида формация насыщена тогда и только тогда, когда она локальна (см., например, [3, гл. IV]).

Л. С. Казарин [5] описал неабелевы композиционные факторы конечных групп, у которых единичная подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной в группе G.

Теорема 1.1 (теорема 6 [5]) *Пусть G — группа и 1 $\mathbb{P}$-sn G. Тогда в G существует субнормальный ряд $1 = Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_{k-1} \subset Y_k = G$ такой, что любой его неабелев фактор Y_{j+1}/Y_j, $j = 0, 1, \dots, k-1$, изоморфен одной из следующих групп: $PSL_3(3)$, $PSL_3(5)$ или $PSL_2(q)$, $q > 3$.*

Теорема 1.2 (теорема A.6.4 [3]) *Пусть G — группа и p — простое число. Тогда*

1) если $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $N \trianglelefteq G$, то $P \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$ и $PN/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$;

2) если $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$ и $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, то $N_1N_2 \cap P = (N_1 \cap P)(N_2 \cap P)$ и $N_1P \cap N_2P = (N_1 \cap N_2)P$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной [4, 6], если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для всех $i = 1, ..., n$.

Отметим следующие свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

Лемма 1.3 (лемма 3.1.3 [7]) *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H — подгруппа в G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;

2) если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G, K — подгруппа из G, то $(H \cap K)$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в K;

3) если H_1 и H_2 — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы в G, то $(H_1 \cap H_2)$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G.

Используя замечание 2 на с. 93 из [4], сформулируем следующий результат.

Лемма 1.4 [4] *Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $G^{\mathfrak{U}} \subseteq M$, то $|G : M|$ — простое число;

2) если $|G : M| = p$ — простое число и M не покрывает абелев главный фактор H/K группы G, то $|H/K| = p$ и $G^{\mathfrak{U}} \subseteq M$.

Теорема 1.5 [8] *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда G можно представить в виде произведения двух нильпотентных $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп.*

Лемма 1.6 (лемма 2.1 [2]) *Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $|G : A| = p$, $|G : B| = q$, p и q — различные простые числа. Тогда G — непростая группа.*

В [2] получены свойства w-сверхразрешимых групп. Приведем некоторые из них, необходимые в дальнейшем.

Теорема 1.7 (теорема 2.3 [2]) *Любая w-сверхразрешимая группа является дисперсивной по Оре.*

Теорема 1.8 (теорема 2.7 [2]) *Класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ является наследственной насыщенной формацией.*

Для группы G обозначим через $\mathrm{Syl}(G)$ множество всех ее силовских подгрупп.

Теорема 1.9 (теорема 2.10 [2]) *Формация $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ является локальной и имеет локальный экран f такой, что $f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p - 1))$ для любого простого p.*

Теорема 1.10 (теорема 2.11 [2]) *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда она метанильпотентна и w-сверхразрешима.*

Согласно [2], обобщенным коммутантом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G такая, что G/N является группой с абелевыми силовскими подгруппами.

Теорема 1.11 (теорема 3.2 [2]) *Пусть $G = AB$ — произведение нормальных w-сверхразрешимых подгрупп A и B. Если обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G w-сверхразрешима.*

2. Свойства w_π-сверхразрешимых групп

Лемма 2.1 *Пусть H — подгруппа группы G, $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H $\mathbb{P}$-sn G, то $(H \cap N)$ $\mathbb{P}$-sn N и HN/N $\mathbb{P}$-sn G/N;

2) если $N \subseteq H$ и H/N $\mathbb{P}$-sn G/N, то H $\mathbb{P}$-sn G;

3) если HN_i $\mathbb{P}$-sn G, $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, то $(HN_1 \cap HN_2)$ $\mathbb{P}$-sn G;

4) если H $\mathbb{P}$-sn K и K $\mathbb{P}$-sn G, то H $\mathbb{P}$-sn G;

5) если H $\mathbb{P}$-sn G, то H^x $\mathbb{P}$-sn G для любого $x \in G$.

Доказательство. Установим справедливость 1). Ввиду $\mathbb{P}$-субнормальности H в G можно считать, что $H \neq G$ и $1 \neq N \neq G$, а также $H \cap N \neq N$ и $HN/N \neq G/N$. В G найдется цепь подгрупп $H = H_0 \subset \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_{i+1} : H_i|$ — простое число для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Рассмотрим цепь подгрупп

$$H \cap N = H_0 \cap N \subseteq H_1 \cap N \subseteq \ldots \subseteq H_{n-1} \cap N \subseteq H_n \cap N = N. \qquad (1)$$

Так как $H \cap N \neq N$, то найдется $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, для которого $H_{j+1} \cap N \neq H_j \cap N$. Тогда $|H_{j+1} \cap N : H_j \cap N| = |(H_{j+1} \cap N)H_j : H_j|$. Так как $H_j \subseteq (H_{j+1} \cap N)H_j \subseteq H_{j+1}$ и $|H_{j+1} : H_j|$ — простое число, то $(H_{j+1} \cap N)H_j = H_{j+1}$ и $|H_{j+1} \cap N : H_j \cap N| = |H_{j+1} : H_j|$. Отбрасывая из цепи (1) повторения, получим цепь с простыми индексами. Значит, $(H \cap N)$ $\mathbb{P}$-sn N. Рассмотрим цепь подгрупп

$$HN/N = H_0N/N \subseteq H_1N/N \subseteq \ldots \subseteq H_{n-1}N/N \subseteq H_nN/N = G/N. \qquad (2)$$

Заметим, что $H_{j+1}N/N \neq H_jN/N$ для которого $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Так как $|H_{j+1}N/N : H_jN/N| = \dfrac{|H_{j+1} : H_j|}{|H_{j+1} \cap N : H_j \cap N|} = \dfrac{|H_{j+1} : H_j|}{|(H_{j+1} \cap N)H_j : H_j|}$, $H_j \subseteq (H_{j+1} \cap N)H_j \subseteq H_{j+1}$ и $|H_{i+1} : H_i|$ — простое число, то $(H_{j+1} \cap N)H_j = H_j$ и $|H_{j+1}N/N : H_jN/N|$ — простое число. Отбрасывая из цепи (2) повторения, получим для HN/N в G/N цепь с простыми индексами. Таким образом, HN/N $\mathbb{P}$-sn G/N.

Утверждение 2) следует из того, что если существует цепь подгрупп $H/N = H_0/N \subset H_1/N \subset \ldots \subset H_{m-1}/N \subset H_m/N = G/N$ с простыми индексами $|H_{i+1}/N : H_i/N|$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, то

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{m-1} \subset H_m = G$$

является цепью подгрупп с $|H_{i+1} : H_i| = |H_{i+1}/N : H_i/N|$.

Установим справедливость 3). Пусть HN_i $\mathbb{P}$-sn G, $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$. Если существует $i \in \{1, 2\}$ такое, что $HN_i = G$, то $HN_{3-i} \cap HN_i = HN_{3-i}$ $\mathbb{P}$-sn G.

Пусть $HN_1 \neq G \neq HN_2$. Так как HN_1 $\mathbb{P}$-sn G, то существует цепь подгрупп $HN_1 = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_{t-1} \subset K_t = G$ с простыми индексами $|K_{i+1} : K_i|$, $i = 0, 1, \ldots, t-1$. Если $HN_1 \cap HN_2 = HN_2$, то $(HN_1 \cap HN_2)$ $\mathbb{P}$-sn G.

Допустим, что $HN_1 \cap HN_2 \neq HN_2$. Тогда найдется такое $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$, что в цепи подгрупп

$$HN_1 \cap HN_2 = K_0 \cap HN_2 \subseteq K_1 \cap HN_2 \subseteq \ldots \subseteq K_t \cap HN_2 = HN_2 \quad (3)$$

пересечение $K_{i+1} \cap HN_2 \neq K_i \cap HN_2$. Так как $K_i \subseteq (K_{i+1} \cap HN_2)K_i \subseteq K_{i+1}$ и $(K_{i+1} \cap HN_2)K_i = (K_{i+1} \cap N_2)K_i$ — подгруппа в K_{i+1}, то $(K_{i+1} \cap HN_2)K_i = K_{i+1}$. Поэтому $|K_{i+1} \cap HN_2 : K_i \cap HN_2| = |(K_{i+1} \cap HN_2)K_i : K_i|$ — простое число. Отбрасывая в цепи (3) повторения и учитывая $\mathbb{P}$-субнормальность HN_2 в G, получим для $HN_1 \cap HN_2$ в G цепь подгрупп с простыми индексами. Значит, $HN_1 \cap HN_2$ $\mathbb{P}$-sn G.

Утверждение 4) и 5) прямо следуют из определения $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы. Лемма доказана.

Лемма 2.2 *Пусть силовская p-подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой в G и $N \trianglelefteq G$. Если $(|N|, p) = (|G/N|, p) = p$, то силовская p-подгруппа группы N и силовская p-подгруппа группы G/N являются $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами в N и G/N соответственно.*

Доказательство. Следует из 1) теоремы 1.2 и 1) леммы 2.1.

Теорема 2.3 *Пусть G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если G w_π-сверхразрешима и $N \trianglelefteq G$, то N и G/N w_π-сверхразрешимы;

2) если G/N_1 и G/N_2 w_π-сверхразрешимы для любых $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, то $G/N_1 \cap N_2$ также w_π-сверхразрешима;

3) прямое произведение w_π-сверхразрешимых групп является w_π-сверхразрешимой группой;

4) класс $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{U}$ является нормально наследственной формацией.

Доказательство. Установим справедливость 1). Если N и G/N —

π'-группы, то N и G/N принадлежат $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{U}$. Если $\pi \cap \pi(N) \neq \emptyset$ и $\pi \cap \cap \pi(G/N) \neq \emptyset$, то w_π-сверхразрешимость N и G/N следует из леммы 2.2.

Докажем 2). Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что в G существуют нормальные подгруппы N_1 и N_2, для которых G/N_1 и G/N_2 w_π-сверхразрешимы, а $G/N_1 \cap N_2$ не является w_π-сверхразрешимой.

Если $K = N_1 \cap N_2 \neq 1$, то $G/N/N_i/N \simeq G/N_i$ w_π-сверхразрешима для $i = 1, 2$. Из $|G/K| < |G|$ получаем, что $G/K/(N_1/N \cap N_2/K) \simeq \simeq G/N_1 \cap N_2$ w_π-сверхразрешима. Это противоречит выбору G.

Пусть $N_1 \cap N_2 = 1$. Так как $G \notin \mathrm{w}_\pi\mathfrak{U}$, то $\pi \cap \pi(G) \neq \emptyset$. Возьмем для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$ силовскую p-подгруппу P группы G. Так как PN_i/N_i — силовская p-подгруппа в G/N_i и G/N_i w_π-сверхразрешима, то PN_i/N_i $\mathbb{P}$-sn G/N_i, $i = 1, 2$. Тогда PN_i $\mathbb{P}$-sn G, $i = 1, 2$ по 2) леммы 2.1. Ввиду теоремы 1.2 и 3) леммы 2.1 подгруппа $PN_1 \cap PN_2 = P(N_1 \cap N_2) = P$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Следовательно, $G/N_1 \cap N_2$ w_π-сверхразрешима. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 2).

Утверждение 3) непосредственно следует из 2).

Утверждение 4) следует из 1) и 2). Теорема доказана.

Ввиду леммы 1.4 всякая $\mathfrak{U}$-субнормальная в группе G подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной в G. В общем случае обратное не выполняется. Например, в знакопеременной группе $G = A_5$ степени 5 подгруппа $H \simeq A_4$ $\mathbb{P}$-субнормальна, но не $\mathfrak{U}$-субнормальна в G.

Лемма 2.4 *Пусть G — разрешимая группа. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{U}$-субнормальной в G тогда и только тогда, когда H $\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

Доказательство. Утверждение следует из определения $\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппы и леммы 1.4.

Лемма 2.5 *Пусть G — разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H $\mathbb{P}$-sn G, K — подгруппа из G, то $(H \cap K)$ $\mathbb{P}$-sn K;

2) если H_i $\mathbb{P}$-sn G, $i = 1, 2$, то $(H_1 \cap H_2)$ $\mathbb{P}$-sn G;

3) если $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{U}$ и K — подгруппа из G, то $K \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{U}$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) следуют из лемм 2.4 и 1.3.

Утверждение 3). Пусть K — подгруппа w_π-сверхразрешимой группы G. Если $p \in \pi \cap \pi(G)$, то по теореме Силова силовская p-подгруппа K_p из K содержится в некоторой силовской p-подгруппе P группы G. Так как G разрешима, то из P $\mathbb{P}$-sn G по утверждению 1) леммы следует $\mathbb{P}$-субнормальность $K \cap P = K_p$ в K и $K \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{U}$. Если G — π'-группа, то K — π'-группа и $K \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{U}$. Лемма доказана.

Согласно [9], формация $\mathfrak{F}$ называется π-насыщенной, если из условия

$G/\Phi(G) \cap O_\pi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Теорема 2.6 *Класс* $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{U} \cap \mathfrak{S}$ *является наследственной* π*-насыщенной формацией.*

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{F} = \mathrm{w}_\pi\mathfrak{U} \cap \mathfrak{S}$. Согласно 3) леммы 2.5 и 4) теоремы 2.3 класс $\mathfrak{F}$ является наследственной формацией.

Докажем π-насыщенность $\mathfrak{F}$ индукцией по $|G|$. Пусть $G/\Phi(G) \cap \cap O_\pi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как $G/\Phi(G) \cap O_\pi(G)$ разрешима, то G разрешима. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $\Phi(G)N/N \subseteq \Phi(G/N)$, $O_\pi(G)N/N \subseteq O_\pi(G/N)$ и $G/\Phi(G)N \cap O_\pi(G)N \in \in \mathfrak{F}$, то $G/N/\Phi(G/N) \cap O_\pi(G/N) \in \mathfrak{F}$. Ввиду $|G/N| < |G|$ получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Класс $\mathfrak{F}$ является формацией, поэтому N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Значит, $N \subseteq \Phi(G) \cap O_\pi(G)$. Отсюда следует, что N — p-группа для некоторого простого числа $p \in \in \pi$ и $O_{p'}(G) = 1$. Пусть Q — силовская q-подгруппа группы G для $q \in \pi \cap \pi(G)$. Так как $\Phi(G)$ не содержит силовских подгрупп, то $q \in \pi \cap \cap \pi(G/N)$. Тогда QN/N $\mathbb{P}$-sn G/N.

1. Если $|\pi \cap \pi(G)| = 1$, то $q = p$. Тогда из $QN/N = Q/N$ и 2) леммы 2.1 следует, что Q $\mathbb{P}$-sn G и $G \in \mathfrak{F}$.

2. Пусть $|\pi \cap \pi(G)| \geqslant 2$ и $q \neq p$. Обозначим через H некоторую $\{p, q\}$-холлову подгруппу группы G, содержащую Q. Ясно, что $N \subseteq \subseteq H$. Так как G/N w_π-сверхразрешима, то ввиду 3) леммы 2.5 H/N w_π-сверхразрешима. Отсюда и из $\{p, q\} \subseteq \pi$ следует, что любая силовская подгруппа из H/N является $\mathbb{P}$-субнормальной в H/N. Ввиду теоремы 1.5 заключаем, что H/N сверхразрешима. По следствию 16.2.3 из [4] с. 179 получаем сверхразрешимость H. Поэтому QN является сверхразрешимой группой. Значит, Q $\mathbb{P}$- sn QN. Из $\mathbb{P}$-субнормальности QN/N в G/N и утверждений 2) и 4) леммы 2.1 получаем $\mathbb{P}$-субнормальность подгруппы Q в группе G. Так как для $q = p$ подгруппа Q $\mathbb{P}$-sn G, то любая силовская q-подгруппа из G для $q \in \pi \cap \pi(G)$ является $\mathbb{P}$-субнормальной в G. Теорема доказана.

Определение 2.7 *Будем говорить, что $\mathbb{P}$-субнормальная в группе G подгруппа H имеет цепь подгрупп типа $\{p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}\}$, p_i — простое число для $i = 0, 1, \ldots, n-1$, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_{i+1} : H_i| = p_i$ для $i = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Если $H = 1$ $\mathbb{P}$-sn G и $1 \neq G$, то будем говорить, что 1 имеет ряд подгрупп типа $\{p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}\}$.

Заметим, что среди чисел $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ могут быть повторения. Например, в симметрической группе S_4 степени 4 единичная подгруппа

1 $\mathbb{P}$-sn G и 1 имеет ряд подгрупп типа $\{2, 2, 3, 2\}$.

Теорема 2.8 *Пусть G — простая неабелева группа и 1 $\mathbb{P}$-sn G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $G \simeq PSL_3(3)$ и 1 имеет ряд подгрупп типа $\{3, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 13\}$ или $\{3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 13\}$;

2) $G \simeq PSL_3(5)$ и 1 имеет ряд подгрупп типа $\{5, 5, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 2, 31\}$;

3) $G \simeq PSL_2(7)$ и 1 имеет ряд подгрупп типа $\{2, 2, 3, 2, 7\}$ или $\{2, 2, 2, 3, 7\}$;

4) $G \simeq PSL_2(11)$ и 1 имеет ряд подгрупп типа $\{2, 2, 3, 5, 11\}$;

5) $G \simeq PSL_2(2^n)$, где $2^n + 1 = p$ — простое число Ферма, 1 имеет ряд подгрупп типа $\{2, 2, \ldots, 2, p_1, p_2, \ldots, p_l, p\}$, причем $\{p_1, p_2, \ldots, p_l, p\}$ — тип любой цепи, соответствующей циклической группе Z_{2^n-1}.

Доказательство. Из теоремы 1.1 следует, что необходимо рассмотреть следующие случаи.

1. $G \simeq PSL_3(3)$. Группа $PSL_3(3)$ содержит подгруппу $3^2 : 2S_4$ индекса 13 [10] и, следовательно, 1 в группе G имеет ряды типа $\{3, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 13\}$ и $\{3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 13\}$. Таким образом, выполнено утверждение 1) теоремы.

2. $G \simeq PSL_3(5)$. Данная группа содержит подгруппу $5^2 : GL_2(5)$ индекса 31 [10]. В ней 1 имеет ряд подгрупп типа $\{5, 5, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 2, 31\}$ и выполняется утверждение 2) теоремы.

3. $G \simeq PSL_2(q)$, где $q = s^m$, s — простое число. По теореме Диксона (теорема 2.8.27 [1]) максимальными подгруппами M простого индекса в группе G могут быть подгруппы A_4, S_4, A_5 и подгруппа Бореля порядка $\epsilon^{-1}q(q-1)$, где $\epsilon = (2, q-1)$.

(a) $M \simeq A_4$. В этом случае $|PSL_2(q)| = 2^2 \cdot 3 \cdot s$, где s — простое число. Группы, порядок которых делится в точности на три простых числа это: $PSL_2(4), PSL_2(9), PSL_2(7), PSL_2(8), PSL_2(17)$, $PSL_3(3), PSU_3(3), PSU_4(2)$
(с. 20 [11]). Очевидно, что в этом случае $G \simeq PSL_2(4)$ и выполняется утверждение 5) теоремы.

(b) $M \simeq S_4$. Рассуждениями как в (a) легко устанавливается, что $G \simeq PSL_2(7)$ и 1 имеет ряд подгрупп типа $\{2, 2, 3, 2, 7\}$ или $\{2, 2, 2, 3, 7\}$ и, следовательно, выполняется утверждение 3) теоремы.

(c) $M \simeq A_5$. В этом случае $|G| \in \{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5; 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2; 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot s$, где s — простое число$\}$. Если выполняется первый или второй случай, то $|G|$ делится в точности на три простых числа. В списке простых неабелевых групп, порядок которых делится на три простых числа, нет групп порядков $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ и $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ (см. (a)). Следовательно, $|PSL_2(q)| =$

$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot s$ и $G \simeq PSL_2(s)$. Поэтому $|G| = 2^{-1}s(s^2-1) = s(s^2-1)/2$. Отсюда следует, что $(s^2-1)/2 = 60$ и $s = 11$. Таким образом, $G \simeq$ $\simeq PSL_2(11)$, 1 имеет ряд подгрупп типа $\{2, 2, 3, 5, 11\}$ и выполняется утверждение 4) теоремы.

(d) M — подгруппа Бореля в $PSL_2(q)$. Тогда $|G : M| = q + 1$ — простое число. Следовательно, $q = 2^n$ и $G \simeq PSL_2(2^n)$, где $2^n + 1 = p$ — простое число Ферма. При этом в G подгруппа 1 имеет ряд подгрупп типа $\{2, 2, \ldots, 2, p_1, p_2, \ldots, p_l, p\}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_l$, как в утверждении 5) теоремы. Таким образом, выполняется утверждение 5) теоремы, что завершает доказательство.

Из теоремы 2.8 вытекает следующий результат.

Теорема 2.9 *Пусть G — простая неабелева группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если в G силовская p-подгруппа G_p $\mathbb{P}$-sn G, то $p = 2$;

2) если в G силовская p-подгруппа G_p $\mathbb{P}$-sn G и p — нечетное простое число, то $p \in \{3, 5\}$;

3) если 1 $\mathbb{P}$-sn G и 1 имеет ряд подгрупп, тип которого начинается с числа 2, то 1 не имеет рядов подгрупп, тип которых начинается с нечетного простого числа;

4) в группе G 1 не имеет рядов подгрупп, типы которых одновременно начинаются с двух различных нечетных простых чисел;

5) если G — $3'$-группа ($G \simeq Sz(2^{2m+l})$), то 1 не является $\mathbb{P}$-субнормальной в G.

Предложение 2.10 *Если G — $3'$-группа и 1 $\mathbb{P}$-sn G, то G разрешима.*

Доказательство. Следует из 5) теоремы 2.9 и 1) леммы 2.1.

Теорема 2.11 *Группа G, имеющая $\mathbb{P}$-субнормальную в G силовскую 3-подгруппу, является разрешимой.*

Доказательство. Пусть G — минимальный контрпример к теореме. Согласно 1) теоремы 2.9, группа G не является простой неабелевой группой. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G. Если $N \simeq Z_r \times Z_r \times \ldots \times Z_r$, то в G наибольшая нормальная разрешимая подгруппа $S(G) \neq 1$. Рассмотрим факторгруппу $\bar{G} =$ $= G/S(G)$. Если $\bar{G}$ — $3'$-группа, то $\bar{G}$ по лемме 2.1 и предложению 2.10 $\bar{G}$ является разрешимой группой. Отсюда следует, что группа G будет разрешимой. Таким образом, 3 делит $|\bar{G}|$ и по лемме 2.2 группа $\bar{G}$ имеет $\mathbb{P}$-субнормальную в $\bar{G}$ силовскую 3-подгруппу группы $\bar{G}$. Так как $|\bar{G}| < |G|$, то, в силу минимальности контрпримера, $\bar{G}$ — разрешимая группа. Поэтому G также разрешима.

Таким образом, $S(G) = 1$ и $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$, где N_i

— изоморфные простые неабелевы группы. По лемме 2.1 подгруппа 1 $\mathbb{P}$-sn N. Поэтому из предложения 2.10 следует, что 3 делит $|N|$. Согласно лемме 2.2, в N силовская 3-подгруппа группы N является $\mathbb{P}$-субнормальной в N Так как $|N| < |G|$, то из минимальности контрпримера следует, что N — разрешимая группа. Последнее невозможно. Это завершает доказательство теоремы.

3. Свойства произведений $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп

Лемма 3.1 *Пусть группа $G = AB$, где подгруппы A и B дисперсивны по Оре и имеют простые индексы в G. Тогда G дисперсивна по Оре.*

Доказательство. Вначале докажем разрешимость G. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G = AB$, где подгруппы A и B дисперсивны по Оре, $|G : A| = p$, $|G : B| = q$, p и q — простые числа, а G неразрешима. Рассмотрим два случая.

1. Если $p \neq q$, то по лемме 1.6 группа G не является простой. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Если $N \subseteq A \cap \cap B$, то G/N разрешима ввиду выбора G. Из разрешимости A и $N \subseteq A$ отсюда получаем противоречие $G \in \mathfrak{S}$. Предположим, что $N \not\subseteq A$. Если $N \subseteq B$, то N разрешима и из $G/N = AN/N \simeq A/A \cap N \in \mathfrak{S}$ следует противоречие $G \in \mathfrak{S}$. Поэтому $N \not\subseteq B$ и $G = AN = BN$. Из $p = |G : A| = |N : N \cap A|$ и $q = |G : B| = |N : N \cap B|$ заключаем, что $N \cap \cap A$ и $N \cap B$ — максимальные подгруппы в N, имеющие взаимно простые индексы. По лемме 20.2 из [4] $N = (N \cap A)(N \cap B)$. Из дисперсивности по Оре $N \cap A$ и $N \cap B$ по выбору G получаем разрешимость N. Отсюда и из $G/N \simeq A/A \cap N \in \mathfrak{S}$ следует противоречие $G \in \mathfrak{S}$.

2. Пусть $p = q$. Обозначим $D = A \cap B$. Пусть N_1 — минимальная нормальная подгруппа группы A, N_2 — минимальная нормальная подгруппа группы B.

Если $N_1 \subseteq D$, то подгруппа

$$K = N_1^G = < N_1^{ab} | a \in A, b \in B > = < N_1^b | b \in B > \subseteq B.$$

При $K \subseteq A$ по выбору G получаем, что G/K разрешима. При $K \not\subseteq A$ из $G = AK$ следует разрешимость G/K. Так как K разрешима, то получаем противоречие $G \in \mathfrak{S}$. Если $N_2 \subseteq D$, то аналогичные рассуждения приводят к противоречию.

Пусть $N_i \not\subseteq D$ для $i = 1, 2$. Из $|G : A| = |B : D| = |G : B| = = |A : D| = p$ следует, что D является максимальной подгруппой в A и в B. Тогда $A = DN_1$ и $B = DN_2$. Значит, N_i — элементарная абелева p-группа, $i = 1, 2$. В D существует холлова p'-подгруппа L.

Ввиду $G = DN_1N_2$ получаем, что $|G:L| = |D:L| \cdot |N_1N_2 : D \cap N_1N_2|$ не делится на p'-числа. Значит, L — холлова p'-подгруппа группы G. Пусть P — силовская p-подгруппа группы G. По лемме 11.6 из [4] найдутся силовские p-подгруппы P_1 и P_2 из A и B такие, что $P = P_1P_2$. Из $O_{p'}(A) = O_{p'}(B) = 1$ и дисперсивности по Оре групп A и B следует, что $N_1 \subseteq O_p(A) = P_1$, $N_2 \subseteq O_p(B) = P_2$ и p — наибольшее простое число в $\pi(A)$ и в $\pi(B)$. Из $G = AP = BP$ и $|G:A| = |G:B| = p$ получаем, что P_i — максимальная подгруппа группы P, $i = 1,2$. Тогда $P \subseteq N_G(P_i)$, $i = 1,2$. Из дисперсивности по Оре A и B заключаем, что $A \subseteq N_G(P_1)$ и $B \subseteq N_G(P_2)$. Откуда $G = AP \subseteq N_G(P_1)$ и $G = BP \subseteq N_G(P_2)$. Значит, P_i — нормальная подгруппа в G, $i = 1,2$. Отсюда $P \triangleleft G$. Тогда из $G/P \simeq A/A \cap P \in \mathfrak{S}$ получаем противоречие $G \in \mathfrak{S}$. Разрешимость доказана.

Докажем дисперсивность по Оре индукцией по $|G|$. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G = AB$, подгруппы A и B дисперсивны по Оре, $|G:A| = p$, $|G:B| = q$, а G не дисперсивна по Оре. По доказанному выше G разрешима. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Из дисперсивности по Оре групп A и B и выбора группы G следует, что G/N дисперсивна по Оре. Так как класс всех дисперсивных по Оре групп является насыщенной формацией [4, п. 7, с. 35], то N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, $N = C_G(N)$, $\Phi(G) = 1$.

Если $N \subseteq A \cap B$, то N содержится в силовских p-подгруппах P_1 и P_2 групп A и B соответственно, p — наибольший простой делитель $|A|$ и $|B|$. Тогда $P = P_1P_2$ — силовская p-подгруппа группы G, p — наибольший простой делитель $|G|$. Из $N \subseteq P$ и дисперсивности по Оре G/N получаем, что G дисперсивна по Оре. Это противоречит выбору G.

Пусть $N \not\subseteq A \cap B$. Если $N \not\subseteq A$, то $G = AN$ и $A \cap N = 1$. Тогда $|N|$ является простым числом. Из $N = C_G(N)$ и $A \simeq G/N$ следует, что G — сверхразрешимая группа. Получили противоречие с выбором G. Если $N \not\subseteq B$, то $G = BN$, $B \cap N = 1$ и рассуждения как выше приводят к противоречию с выбором G. Лемма доказана.

Теорема 3.2 *Пусть $G = AB$, где A и B — дисперсивные по Оре $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы G. Тогда G дисперсивна по Оре.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G = AB$, A и B — дисперсивные по Оре $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы G, а G не дисперсивна по Оре. Тогда существуют цепи подгрупп

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_{n-1} \subset A_n = G,$$
$$B = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_{m-1} \subset B_m = G$$

такие, что $|A_{i+1} : A_i|$ и $|B_{j+1} : B_j|$ являются простыми числами для любых $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Из тождества Дедекинда получаем, что $A_{n-1} = A(A_{n-1} \cap B)$ и $B_{m-1} = (B_{m-1} \cap A)B$. Рассмотрим цепь подгрупп

$$A_{n-1} \cap B_0 \subseteq A_{n-1} \cap B_1 \subseteq \ldots \subseteq A_{n-1} \cap B_{m-1} \subseteq A_{n-1} \cap B_m = A_{n-1}. \quad (1)$$

Если $A_{n-1} \cap B_{m-1} = A_{n-1}$, то $G \subseteq B_{m-1} \neq G$. Получили противоречие. Значит, $A_{n-1} \cap B_{m-1} \neq A_{n-1} = A_{n-1} \cap B_m$. Поэтому $A_{n-1} \cap B_j \neq A_{n-1} \cap B_{j+1}$ для некоторого $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Так как $A_{n-1} \cap B_{j+1} = A(A_{n-1} \cap B) \cap B_{j+1} = (A \cap B_{j+1})(A_{n-1} \cap B)$ и $A_{n-1} \cap B_j = (A \cap B_j)(A_{n-1} \cap B)$, то

$$|A_{n-1} \cap B_{j+1} : A_{n-1} \cap B_j| = \frac{|A \cap B_{j+1}|}{|A \cap B_{j+1} \cap B|} : \frac{|A \cap B_j|}{|A \cap B_j \cap B|} = |B_{j+1} : B_j|$$

— простое число.

Отбросив в (1) повторения, получим для $A_{n-1} \cap B$ в A_{n-1} цепь подгрупп с простыми индексами. Значит, $(A_{n-1} \cap B)$ $\mathbb{P}$-sn A_{n-1}. Аналогично, рассматривая цепь подгрупп

$$B_{m-1} \cap A_0 \subseteq B_{m-1} \cap A_1 \subseteq \ldots \subseteq B_{m-1} \cap A_{n-1} \subseteq B_{m-1} \cap A_n = B_{m-1} \quad (2)$$

и учитывая равенство $B_{m-1} \cap A_k = (B_{m-1} \cap A)(B \cap A_k)$, получим равенство $|B_{m-1} \cap A_{k+1} : B_{m-1} \cap A_k| = |A_{k+1} : A_k|$ для всех $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, для которых $B_{m-1} \cap A_k \neq B_{m-1} \cap A_{k+1}$. Отбросив в (2) повторения, заключаем, что $(B_{m-1} \cap A)$ $\mathbb{P}$-sn B_{m-1}.

Так как A_{n-1} и B_{m-1} являются произведениями дисперсивных по Оре подгрупп $A, (A_{n-1} \cap B)$ и $(B_{m-1} \cap A), B$ соответственно, то A_{n-1} и B_{m-1} дисперсивны по Оре ввиду выбора G. Тогда по лемме 3.1 группа $G = A_{n-1}B_{m-1}$ дисперсивна по Оре. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Согласно [12] и [13], группа $G = AB$ называется произведением взаимно (sn-перестановочных) перестановочных подгрупп A и B, если A перестановочна с любой (соответственно, субнормальной) подгруппой из B, а B перестановочна с любой (соответственно, субнормальной) подгруппой из A.

Лемма 3.3 *Пусть $G = AB$ — разрешимая группа, A и B — сверхразрешимые подгруппы. Если A и B — взаимно sn-перестановочные подгруппы, то A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G.*

Доказательство. Если $G = A$ или $G = B$, то лемма верна. Предположим, что $A \neq G \neq B$. В A найдется субнормальный ряд $1 = A_0 \subset \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = A$ с простыми индексами $|A_{j+1} : A_j|$, $j = 0, 1, \ldots, n - - 1$. Тогда из $B \neq G$ следует, что $A_{j+1}B \neq A_jB$ для некоторого j. Так как $|A_{j+1}B : A_jB| = \dfrac{|A_{j+1} : A_j|}{|A_j(A_{j+1} \cap B) : A_j|}$ и $A_j \subseteq A_j(A_{j+1} \cap B) \subseteq A_{j+1}$, то заключаем, что $A_j(A_{j+1} \cap B) = A_j$. Из ряда $B = A_0B \subseteq A_1B \subseteq \ldots \subseteq$ $\subseteq A_nB = G$, отбросив повторения, получаем ряд с простыми индексами. Следовательно, B $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Аналогично показывается, что A $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Лемма доказана.

Теорема 3.4 *Пусть $G = AB$ — произведение $\mathbb{P}$-субнормальных* w*-сверхразрешимых подгрупп A и B. Если обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G —* w*-сверхразрешимая группа.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Ввиду теорем 1.7 и 3.2 группа G является разрешимой. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Для G/N все условия теоремы выполняются. Тогда G/N — w-сверхразрешимая группа. Так как класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ является насыщенной формацией, то N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. В этом случае $\Phi(G) = 1$, $N = C_G(N) = F(G)$, N — p-группа, p — некоторое простое число. Тогда $G = [N]M$, где M — некоторая максимальная подгруппа из G, при этом $M \simeq G/N$ w-сверхразрешима. Из теоремы 1.7 следует, что p — наибольшее простое число, делящее $|G|$.

Пусть G_p — силовская p-подгруппа группы G. Если $p \in \pi(M)$, то силовская p-подгруппа M_p из M является нормальной в M. С другой стороны $O_p(M) = 1$ ввиду леммы 3.9 из [4]. Получили противоречие. Следовательно, N — силовская p-подгруппа группы G.

Рассмотрим AN. Заметим, что $AN = AN \cap NM = N(AN \cap M)$. Так как $N = C_G(N) = C_{AN}(N)$, то $O_{p'}(AN) = 1$ и $F_p(AN) = N$. Из w-сверхразрешимости AN по лемме 4.5 из [4] и теореме 1.9 следует, что $AN/F_p(AN) = AN/N \simeq AN \cap M \in f(p) = (H \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(H) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$. Аналогично получаем, что $BN \cap M \in f(p) = (H \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(H) \subseteq \mathfrak{A}(p - 1))$. Заметим также, что $M = (AN \cap M)(BN \cap M)$. Так как по условию обобщенный коммутант группы G нильпотентен и $F(G) = N$, то M является группой с абелевыми силовскими подгруппами. Пусть $q \in \pi(M)$ и M_q — силовская q-подгруппа из M. Тогда $M_q = (AN \cap M)_q(BN \cap M)_q$, где $(AN \cap M)_q$ и $(BN \cap M)_q$ — некоторые силовские q-подгруппы из $AN \cap M$ и $BN \cap M$ соответственно. Из абелевости M_q и $(AN \cap M)_q \in \mathfrak{A}(p-1)$ и $(BN \cap M)_q \in \mathfrak{A}(p-1)$ следует, что $M_q \in \mathfrak{A}(p-1)$. В силу произвольности выбора $q \in \pi(M)$ получаем, что $M \in (H \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(H) \subseteq \mathfrak{A}(p - 1))$. Так как $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и $G/F_p(N) = G/N \simeq M \in$ $\in (H \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(H) \subseteq \mathfrak{A}(p - 1))$ по лемме 4.5 из [4] следует, что $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Из $\mathfrak{U} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и того, что обобщенный коммутант группы содержится в ее коммутанте, получаются следующие результаты.

Следствие 3.4.1 *Пусть $G = AB$ — произведение $\mathbb{P}$-субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G — w-сверхразрешимая группа.*

Следствие 3.4.2 *Пусть $G = AB$ — произведение $\mathbb{P}$-субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если коммутант группы G нильпотентен, то G — сверхразрешимая группа.*

С учетом теорем 1.11 и 1.10 получаются известные результаты.

Следствие 3.4.3 (Васильев А. Ф., Васильева Т. И. [14]) *Пусть $G = AB$ — произведение нормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G — сверхразрешимая группа.*

Следствие 3.4.4 (Бэр [15]) *Пусть $G = AB$ — произведение нормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если коммутант группы G нильпотентен, то G — сверхразрешимая группа.*

Ввиду леммы 3.3 из теоремы 3.4 вытекают известные результаты.

Следствие 3.4.6 (Алежандре, Баллестер-Болинше, Косси, Педраза-Агуилера [13]) *Пусть $G = AB$ — произведение взаимно sn-перестановочных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если коммутант группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.*

Следствие 3.4.7 (Ассад, Шаалан [12]) *Пусть $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если коммутант группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.*

Теорема 3.5 *Если группа $G = AB$ — произведение $\mathbb{P}$-субнормальных w-сверхразрешимых подгрупп A и B и $(|G : A|, |G : B|) = 1$, то G w-сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть G_p — силовская p-подгруппа группы G. Если $p \in \pi(|G : A|)$, то $p \notin \pi(|G : B|)$ и силовская p-подгруппа группы B является силовской p-подгруппой группы G. Если p не делит $|G : A|$, то силовская p-подгруппа группы A является силовской p-подгруппой группы G. Пусть $G_p^x \subseteq A$ для для некоторого $x \in G$. Ввиду w-сверхразрешимости A получаем, что G_p^x $\mathbb{P}$-sn A. Из утверждений 4) и 5) леммы 2.1 и A $\mathbb{P}$-sn G получаем, что G_p $\mathbb{P}$-sn G. При $G_p^x \subseteq B$ аналогичные рассуждения приводят к G_p $\mathbb{P}$-sn G. Итак, G — w-сверхразрешимая группа. Теорема доказана.

Следствие 3.5.1 *Если группа $G = AB$ — произведение $\mathbb{P}$-субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B и $(|G : A|, |G : B|) = 1$, то G w-сверхразрешима.*

Отсюда с учетом теоремы 1.10 получается

Следствие 3.5.2 (теорема 3.4, с. 128 [16]) *Если $G = AB$ —*

произведение нормальных сверхразрешимых подгрупп A и B и $(|G:A|, |G:B|) = 1$, то G — сверхразрешимая группа.

Summary

A subgroup H of G is called $\mathbb{P}$-subnormal in G if either $H = G$ or there is a chain $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ such that $|H_i : H_{i-1}|$ is a prime number for every $i = 1, 2, \ldots, n$. Finite groups for which its Sylow p-subgroups ($p \in \pi \cap \pi(G)$) $\mathbb{P}$-subnormal subgroups are studied. Properties of such groups are obtained.

Литература

[1] Huppert B. Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer, 1967.

[2] Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Тютянов В.Н. О расширенно сверхразрешимых конечных группах. — Гомель. ГГУ им. Ф. Скорины, 2009. — 20 с. — (Препринт / М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 9).

[3] Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

[4] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

[5] Казарин Л. С. О группах с факторизацией // ДАН СССР. 1981. Т. 256, № 1. С. 26–29.

[6] Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M. Classes of Finite Groups. Springer, 2006.

[7] Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.

[8] Васильев А. Ф. Новые свойства конечных динильпотентных групп // Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.-мат. навук. 2004. № 2. С. 39-43.

[9] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.

[10] Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. Atlas of finite groups. Oxford, 1985.

[11] Горенстейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. Мир. 1985.

[12] Assad M., Shaalan A. On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989. V. 53, № 4. P. 318–326.

[13] Alejandre M.J., Ballester-Bolinches A., Cossey J., Pedraza-Aguilera M.C. On some permutable products of supersoluble groups // Rev. Mat. Iberoamericana. 2004. V. 20. P. 413–425.

[14] Васильев А.Ф., Васильева Т.И. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами // Известия ВУЗов. Математика. 1997. № 11 (426). С. 10–14.

[15] Baer R. Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 318–326.

[16] Weinstein M. (editor) Between Nilpotent and Solvable. Passaic: Polugonal Publishing House, 1982.

СОДЕРЖАНИЕ