

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

А. Ф. ВАСИЛЬЕВ, Т. И. ВАСИЛЬЕВА

О Р-ДОСТИЖИМЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

ПРЕПРИНТ № 3,

март 2011

УД 8709

Установа адукацыі
"Гомельскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя Францыска Скарыны"
БІБЛІЯТЭКА

Гомель
УО «ГГУ им. Ф.Скорины»
2011

26.17

УДК 512.542
ББК 22.144.12
В 191

Рецензенты:

М. В. Селькин, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»;

С. П. Новиков, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Рекомендовано к изданию научно-техническим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Васильев, А. Ф.

В 191 О $\mathbb{P}$ -достижимых подгруппах конечных групп [Текст] / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева. -- Гомель. ГГУ им. Ф. Скорины, 2011. — 20 с. — (Препринт / М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 3).

Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$ -достижимой в G , если H можно соединить с группой цепью подгрупп, каждая из которых либо нормальна в последующей, либо максимальна в последующей и имеет в ней простой индекс. Получены свойства $\mathbb{P}$ -достижимых в G подгрупп. В частности, установлено, что класс всех разрешимых групп G , которые обладают $\mathbb{P}$ -достижимыми в G силовскими p -подгруппами для $p \in \pi$, является наследственной π -насыщенной формацией. Получен критерий w -сверхразрешимости группы.

УДК 512.542
ББК 22.144.12

© Васильев А. Ф., Васильева Т. И., 2011
© УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины», 2011

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Понятие субнормальной подгруппы является одним из центральных в теории групп. В 1978 году О. Кегель в работе [1] предложил обобщение субнормальности, введя определение $\mathfrak{F}$ -достижимой подгруппы.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$ -достижимой в G , если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = G$$

такая, что либо H_i нормальна в H_{i+1} , либо $H_{i+1}^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G , для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Следуя идее О. Кегеля, введем

Определение 1. Подгруппу H группы G будем называть $\mathbb{P}$ -достижимой в G и обозначать $H \mathbb{P}\text{-}rn\ G$, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = G$$

такая, что либо H_i нормальна в H_{i+1} , либо $|H_{i+1} : H_i|$ — простое число для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Ввиду [2, теорема 9.5] всякая подгруппа сверхразрешимой группы G является $\mathbb{P}$ -достижимой в G .

В случае, когда $\mathfrak{F} = \mathcal{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп, любая $\mathcal{U}$ -достижимая в группе G подгруппа является $\mathbb{P}$ -достижимой в G . Обратное в общем случае не выполняется. Например, силовская 2-подгруппа P знакопеременной группы G на 5 символах соединена с G цепью подгрупп $P \subset K \subset G$, где K изоморфна знакопеременной группе на 4 символах, $P \triangleleft K$, $|G : K| = 5$. Подгруппа P является $\mathbb{P}$ -достижимой в G , но P — не $\mathcal{U}$ -достижимая подгруппа в G ввиду простоты G .

Возникает задача изучения систем подгрупп группы, которые являются в ней $\mathbb{P}$ -достижимыми.

Пусть π — некоторое множество простых чисел.

Определение 2. Группу G будем называть $\bar{w}_{\pi}$ -сверхразрешимой, если силовская p -подгруппа группы G является $\mathbb{P}$ -достижимой в G для любого $p \in \pi$.

По определению всякая π' -группа G , в которой единичная подгруппа $1 \mathbb{P}\text{-}rn\ G$, является $\bar{w}_{\pi}$ -сверхразрешимой.

Обозначим через $\bar{w}_{\pi}\mathcal{U}$ класс всех $\bar{w}_{\pi}$ -сверхразрешимых групп.

Для случая, когда $\pi(G) \subseteq \pi$, т.е. всякая силовская подгруппа из G является $\mathbb{P}$ -достижимой в G , будем называть $\bar{w}_{\pi}$ -сверхразрешимую

группу $\bar{w}$ -сверхразрешимой и использовать обозначения $\bar{w}\mathcal{U}$ для класса всех $\bar{w}$ -сверхразрешимых групп.

Ясно, что класс $\mathcal{U}$ всех сверхразрешимых групп содержится в классе $\bar{w}\mathcal{U} \cap \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп. Как следует из [3, пример 1], $\mathcal{U} \neq \bar{w}\mathcal{U} \cap \mathfrak{S}$.

Настоящая работа посвящена изучению свойств $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимых групп.

1. Предварительные результаты

Используются обозначения и терминология из [4, 5]. Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе.

Через $|G|$ обозначается порядок группы G .

$\pi(G)$ — множество всех различных простых делителей порядка группы G .

$\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел.

π — некоторое множество простых чисел.

$\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$.

$O_\pi(G)$ — наибольшая нормальная π -подгруппа группы G .

1 — единичная группа.

$\text{Syl}_p(G)$ — множество силовских p -подгрупп группы G .

$\text{Core}_G(M)$ — ядро подгруппы M в G , т.е. пересечение всех подгрупп, сопряженных с M в G .

$F_p(G)$ — p -нильпотентный радикал группы G , т.е. произведение всех нормальных p -нильпотентных подгрупп группы G .

$\mathcal{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп.

$\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп.

Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$, p_i — простое число, называется дисперсивной по Оре [4, с. 251], если $p_1 > p_2 > \cdots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия: 1) каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$; 2) из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$. По определению пустой класс групп является формацией.

Формация $\mathfrak{F}$ называется:

1) нормально наследственной, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит и все ее нормальные подгруппы;

2) насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Всякая функция $f : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется локальным экраном. Формация $\mathfrak{F}$ называется локальной, если существует

локальный экран f такой, что $\mathfrak{F}$ совпадает с классом групп $\{G|G/F_p(G) \in f(p) \text{ для любого } p \in \pi(G)\}$.

Теорема 1.1 [5, гл. IV, теорема 4.6]. *Формация насыщена тогда и только тогда, когда она локальна.*

Теорема 1.2 [5, гл. А, теорема 15.2]. *Пусть G – группа и M – максимальная подгруппа из G с $\text{Core}_G(M) = 1$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

- 1) G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , которая самоцентризуема и дополняет M в G ;
- 2) G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , которая неабелева и добавляет M в G ;
- 3) G имеет только две минимальные нормальные подгруппы N и N^* такие, что каждая из них дополняет M в G , $C_G(N) = N^*$, $C_G(N^*) = N$ и $N \simeq N^* \simeq NN^* \cap M$.

Теорема 1.3 [5, гл. А, теорема 6.4]. *Пусть G – группа и p – простое число. Тогда*

- 1) если $P \in \text{Syl}_p(G)$ и $N \trianglelefteq G$, то $P \cap N \in \text{Syl}_p(N)$ и $PN/N \in \text{Syl}_p(G/N)$;
- 2) если $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$ и $P \in \text{Syl}_p(G)$, то $N_1 N_2 \cap P = (N_1 \cap P)(N_2 \cap P)$ и $N_1 P \cap N_2 P = (N_1 \cap N_2)P$.

Теорема 1.4 [5, гл. А, теорема 9.2]. *Пусть G – группа. Если $N \trianglelefteq G$, то $\Phi(N) \subseteq \Phi(G)$ и $\Phi(G)N/N \subseteq \Phi(G/N)$.*

Теорема 1.5 [6, гл. I, теорема 1.4]. *Пусть H/K – главный p -фактор группы G . Тогда и только тогда $|H/K| = p$, когда $\text{Aut}_G(H/K)$ – абелева группа экспоненты, делящей $p - 1$.*

Лемма 1.6 [4, лемма 3.9]. *Если H/K – главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p -подгрупп, причем $F_p(G) \subseteq C_G(H/K)$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$ -субнормальной в G [4, ?], если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $H_{i+1}^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Отметим следующие свойства $\mathfrak{F}$ -достижимых и $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп.

Лемма 1.7 [7, леммы 3.1.1 и 3.1.3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H — подгруппа из G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$ -достижима ($\mathfrak{F}$ -субнормальна) в G ;

2) если H — $\mathfrak{F}$ -достижимая ($\mathfrak{F}$ -субнормальная) в G подгруппа, K — подгруппа из G , то $(H \cap K)$ — $\mathfrak{F}$ -достижимая (соответственно $\mathfrak{F}$ -субнормальная) в K подгруппа ;

3) если H_1 и H_2 — $\mathfrak{F}$ -достижимые ($\mathfrak{F}$ -субнормальные) в G подгруппы, то $(H_1 \cap H_2)$ — $\mathfrak{F}$ -достижимая (соответственно $\mathfrak{F}$ -субнормальная) в G подгруппа.

Теорема 1.8 [4, следствие 16.2.3]. Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, H — толлова подгруппа разрешимой группы G . Если $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Лемма 1.9 [4, лемма 1.2]. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, K — нормальная подгруппа группы G . Тогда $(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$.

В [3] было введено следующее

Определение 1.10 [3]. Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$ -субнормальной в G (обозначается $H \mathbb{P}\text{-sn } G$), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $|H_{i+1} : H_i|$ — простое число для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Группа G называется w -сверхразрешимой [3], если любая силовская подгруппа группы G является $\mathbb{P}$ -субнормальной в G .

Очевидно, в любой группе G всякая $\mathbb{P}$ -субнормальная в G подгруппа является $\mathbb{P}$ -достижимой в G . Обратное утверждение в общем случае неверно.

Теорема 1.11 [8]. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда G можно представить в виде произведения двух nilпотентных $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп.

Через $w\mathfrak{M}$ обозначается класс всех w -сверхразрешимых групп. В [3] получены свойства w -сверхразрешимых групп. Приведем некоторые из них, необходимые в дальнейшем.

Предложение 1.12 [3, предложение 2.8]. Любая w -сверхразрешимая группа является дисперсивной по Оре.

Теорема 1.13 [3, теорема 2.7]. Класс $w\mathfrak{M}$ является наследственной насыщенной формацией.

Теорема 1.14 [3, теорема 2.13]. Любая бипримарная подгруппа w -сверхразрешимой группы является сверхразрешимой.

2. Свойства $\mathbb{P}$ -достижимых подгрупп

Лемма 2.1. Пусть H и K — подгруппы группы G такие, что $H \subseteq K$, и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $H \mathbb{P}\text{-}rn K$ и $K \mathbb{P}\text{-}rn G$, то $H \mathbb{P}\text{-}rn G$;
- 2) если $N \subseteq H$ и $H/N \mathbb{P}\text{-}rn G/N$, то $H \mathbb{P}\text{-}rn G$;
- 3) если $H \mathbb{P}\text{-}rn K$, то $HN \mathbb{P}\text{-}rn KN$ и $HN/N \mathbb{P}\text{-}rn KN/N$;
- 4) если $H \mathbb{P}\text{-}rn G$, то $(H \cap N) \mathbb{P}\text{-}rn N$. В частности, $(H \cap N) \mathbb{P}\text{-}rn G$.

Доказательство. Утверждение 1) проверяется прямой проверкой определения $\mathbb{P}$ -достижимой подгруппы.

Утверждение 2) следует из определения $\mathbb{P}$ -достижимой подгруппы и того, что если в G/N подгруппа T/N содержится в подгруппе L/N , то $|T/N : L/N| = |T : L|$, а при $T/N \trianglelefteq L/N$, также $T \trianglelefteq L$.

Докажем утверждение 3). Допустим, что $HN \neq KN$. Тогда $H \neq K$. Ввиду $H \mathbb{P}\text{-}rn K$ в K найдется цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = K$ такая, что либо $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$, либо $|H_{i+1} : H_i|$ — простое число для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$. Рассмотрим все $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, для которых $H_{j+1}N \neq H_jN$. Если $H_j \trianglelefteq H_{j+1}$, то $H_jN \trianglelefteq H_{j+1}N$ и $H_jN/N \trianglelefteq H_{j+1}N/N$. Пусть $|H_{j+1} : H_j|$ — простое число. Так как

$$\begin{aligned} |H_{j+1}N : H_jN| &= |H_{j+1}N/N : H_jN/N| = \frac{|H_{j+1} : H_j|}{|H_{j+1} \cap N : H_j \cap N|} = \\ &= \frac{|H_{j+1} : H_j|}{|(H_{j+1} \cap N)H_j : H_j|}, \end{aligned}$$

$H_j \subseteq (H_{j+1} \cap N)H_j \subseteq H_{j+1}$ и H_j — максимальная подгруппа в H_{j+1} , то $(H_{j+1} \cap N)H_j = H_{j+1}$ и $|H_{j+1}N/N : H_jN/N|$ — простое число. Отсюда ввиду наличия цепей $HN = H_0N \subseteq H_1N \subseteq \dots \subseteq H_{n-1}N \subseteq H_nN = KN$ и $HN/N = H_0N/N \subseteq H_1N/N \subseteq \dots \subseteq H_{n-1}N/N \subseteq H_nN/N = KN/N$ получим, что $HN \mathbb{P}\text{-}rn KN$ и $HN/N \mathbb{P}\text{-}rn KN/N$.

Утверждения 4) докажем индукцией по $|G|$. Пусть $H \mathbb{P}\text{-}rn G$. Можно считать, что $H \neq G \neq N$. В G существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = G$ такая, что либо $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$, либо $|H_{i+1} : H_i|$ — простое число для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$. Тогда найдется $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, для которого $H_j \neq G$, а $H_{j+1} = G$. Если $N \subseteq H_j$, то по индукции $(H \cap N) \mathbb{P}\text{-}rn N$. Допустим, что $N \not\subseteq H_j$. Тогда $H_jN = G$. По индукции $H \cap N = (H \cap (H_jN)) \mathbb{P}\text{-}rn (H_jN)$.

Если $H_j \trianglelefteq G$, то из $(H_j \cap N) \trianglelefteq N$ следует, что $(H \cap N) \mathbb{P}\text{-}rn N$.

Если $|G : H_j|$ — простое число, то из $|N : H_j \cap N| = |G : H_j|$ заключаем, что $(H \cap N) \mathbb{P}\text{-}rn N$. Ввиду того, что $N \trianglelefteq G$, получаем $\mathbb{P}$ -достижимость $H \cap N$ в G . Лемма доказана.

Лемма 2.2. Пусть H — подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $HN_i \mathbb{P}\text{-}rn\ G$, $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, то $(HN_1 \cap HN_2) \mathbb{P}\text{-}rn\ G$;
- 2) если $H \mathbb{P}\text{-}rn\ G$, то $H^x \mathbb{P}\text{-}rn\ G$ для любого $x \in G$;
- 3) если $G^u \subseteq H$, то $H \mathbb{P}\text{-}rn\ G$.

Доказательство. Утверждение 1). Пусть $HN_i \mathbb{P}\text{-}rn\ G$, $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$. Если существует $i \in \{1, 2\}$ такое, что $HN_i = G$, то $(HN_1 \cap HN_2) \mathbb{P}\text{-}rn\ G$.

Пусть $HN_1 \neq G \neq HN_2$. Так как $HN_1 \mathbb{P}\text{-}rn\ G$, то существует цепь подгрупп $HN_1 = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_{t-1} \subseteq K_t = G$ такая, что либо $K_i \trianglelefteq K_{i+1}$, либо $|K_{i+1} : K_i|$ — простое число, $i = 0, 1, \dots, t-1$.

Если $HN_1 \cap HN_2 = HN_2$, то $(HN_1 \cap HN_2) \mathbb{P}\text{-}rn\ G$.

Допустим, что $HN_1 \cap HN_2 \neq HN_2$. Тогда найдется такое $j \in \{0, 1, \dots, t-1\}$, что $K_{j+1} \cap HN_2 \neq K_j \cap HN_2$.

Если $K_j \trianglelefteq K_{j+1}$, то $K_j \cap HN_2 \trianglelefteq K_{j+1} \cap HN_2$.

Пусть $|K_{i+1} : K_i|$ — простое число. Тогда $1 \neq |K_{j+1} \cap HN_2 : K_j \cap HN_2| = |(K_{j+1} \cap HN_2)K_j : K_j| = |K_{i+1} : K_i|$, так как $K_j \subseteq (K_{j+1} \cap HN_2)K_j \subseteq K_{j+1}$ и $(K_{j+1} \cap HN_2)K_j \neq (K_{j+1} \cap N_2)K_j$ — подгруппа в K_{j+1} . Поэтому наличие цепи $HN_1 \cap HN_2 = K_0 \cap HN_2 \subseteq K_1 \cap HN_2 \subseteq \dots \subseteq K_{t-1} \cap HN_2 \subseteq K_t \cap HN_2 = HN_2$ указывает на $\mathbb{P}$ -достижимость $HN_1 \cap HN_2$ в HN_2 . Отсюда и из $HN_2 \mathbb{P}\text{-}rn\ G$ следует, что $HN_1 \cap HN_2 \mathbb{P}\text{-}rn\ G$.

Утверждение 2) прямо следует из определения $\mathbb{P}$ -достижимой подгруппы.

Утверждение 3) справедливо ввиду того, что H/G^u — подгруппа сверхразрешимой группы G/G^u . Лемма доказана.

Лемма 2.3. Пусть силовская p -подгруппа группы G является $\mathbb{P}$ -достижимой подгруппой в G и $N \trianglelefteq G$. Тогда силовская p -подгруппа группы N и силовская p -подгруппа группы G/N являются $\mathbb{P}$ -достижимыми подгруппами в G и G/N соответственно.

Доказательство. Следует из 1) теоремы 1.3 и 4) и 3) леммы 2.1.

Теорема 2.4. Пусть G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $G \bar{\mathbb{W}}_\pi$ -сверхразрешима и $N \trianglelefteq G$, то N и $G/N \bar{\mathbb{W}}_\pi$ -сверхразрешимы;
- 2) если G/N_1 и $G/N_2 \bar{\mathbb{W}}_\pi$ -сверхразрешимы для любых $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, то $G/N_1 \cap N_2$ также $\bar{\mathbb{W}}_\pi$ -сверхразрешима;
- 3) прямое произведение $\bar{\mathbb{W}}_\pi$ -сверхразрешимых групп является $\bar{\mathbb{W}}_\pi$ -сверхразрешимой группой;

4) класс $\bar{w}_\pi\mathcal{U}$ является нормально наследственной формацией.

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из леммы 2.3 и определения $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимой группы.

Докажем 2). Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что в G существуют нормальные подгруппы N_1 и N_2 , для которых G/N_1 и G/N_2 $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимы, а $G/N_1 \cap N_2$ не является $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимой.

Если $K = N_1 \cap N_2 \neq 1$, то $G/K/N_i/K \simeq G/N_i$ $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешима для $i = 1, 2$. Из $|G/K| < |G|$ получаем, что $G/K/(N_1/K \cap N_2/K) \simeq \simeq G/N_1 \cap N_2$ $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешима. Это противоречит выбору G .

Пусть $N_1 \cap N_2 = 1$. Возьмем $p \in \pi$ и рассмотрим силовскую p -подгруппу P группы G . Так как PN_i/N_i — силовская p -подгруппа в G/N_i и G/N_i $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешима, то PN_i/N_i $\mathbb{P}$ -р-н G/N_i , $i = 1, 2$. Тогда PN_i $\mathbb{P}$ -р-н G , $i = 1, 2$ по 2) леммы 2.1. Ввиду теоремы 1.2 и 1) леммы 2.2 подгруппа $PN_1 \cap PN_2 = P(N_1 \cap N_2) = P$ $\mathbb{P}$ -достижима в G . Следовательно, $G/N_1 \cap N_2$ $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешима. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 2).

Утверждение 3) непосредственно следует из 2).

Утверждение 4) следует из 1) и 2). Теорема доказана.

Благодарим доктора физико-математических наук В.С.Монахова за наблюдение, с помощью которого легко доказывается следующее свойство.

Предложение 2.5. Если G — $\bar{w}$ -сверхразрешимая группа, то G дисперсивна по Оре.

Доказательство. Проведем индукцией по $|G|$. Для $G = 1$ предложение верно. Для $|\pi(G)| = 1$ утверждение очевидно. Пусть $|\pi(G)| > 1$ и $H \in \text{Syl}_p(G)$, где p — наибольший делитель $|G|$. В G найдется цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = G$ такая, что либо $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$, либо $|H_{i+1} : H_i|$ — простое число для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$. По индукции $H \trianglelefteq H_{n-1}$. Если $H_{n-1} \trianglelefteq G$, то $H \trianglelefteq G$.

Если $|G : H_{n-1}| = q$ — простое число и $N_G(H) = H_{n-1}$, то по теореме Силова p делит $q-1$, что невозможно ввиду выбора p . Следовательно, $N_G(H) = G$. Теперь G/H $\bar{w}$ -сверхразрешима по 1) теоремы 2.4. По индукции G/H дисперсивна по Оре. Отсюда следует, что G дисперсивна по Оре. Предложение доказано.

Лемма 2.6. Пусть H — подгруппа разрешимой группы G . Тогда и только тогда H — $\mathcal{U}$ -достижимая в G подгруппа, когда H — $\mathbb{P}$ -достижимая в G подгруппа.

Доказательство. Всякая $\mathcal{U}$ -достижимая в G подгруппа является $\mathbb{P}$ -достижимой в G подгруппой.

Докажем обратное утверждение. Пусть G — группа наименьшего порядка, имеющая $\mathbb{P}$ -достижимую, но не $\mathcal{U}$ -достижимую в G подгруппу H . Тогда $H \neq G$ и в G существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = G$ такая, что либо $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$, либо $|H_{i+1} : H_i|$ — простое число для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$. Можно считать, что $H_{n-1} \neq G$. По выбору G подгруппа H $\mathcal{U}$ -достижима в H_{n-1} . Тогда $|G : H_{n-1}| = p$ — простое число. Пусть $C = \text{Core}_G(H_{n-1})$.

Если $C \neq 1$, то $|G/C : H_{n-1}/C| = p$. Поэтому H_{n-1}/C — $\mathbb{P}$ -достижимая подгруппа в G/C . Из $|G/C| < |G|$ получаем, что H_{n-1}/C — $\mathcal{U}$ -достижимая подгруппа в G/C . Отсюда и из леммы 1.8 заключаем, что $G^{\mathcal{U}}C/C \subseteq H_{n-1}/C$. Значит, $G^{\mathcal{U}} \subseteq H_{n-1}$.

Предположим, что $C = 1$. Тогда в G найдется минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N = C_G(N)$, $G = H_{n-1}N$ и $N \cap H_{n-1} = 1$. Из $|N| = |G : H_{n-1}| = p$ и теоремы 1.5 следует, что G — сверхразрешимая группа. Тогда $1 = G^{\mathcal{U}} \subseteq H_{n-1}$.

Итак, H_{n-1} — $\mathcal{U}$ -достижимая подгруппа в G . Так как H $\mathcal{U}$ -достижима в H_{n-1} , H $\mathcal{U}$ -достижима в G . Получили противоречие с выбором G .

Лемма 2.7. Пусть G — разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $H \mathbb{P}\text{-}rn\ G$, K — подгруппа из G , то $(H \cap K) \mathbb{P}\text{-}rn\ K$;
- 2) если $H_i \mathbb{P}\text{-}rn\ G$, $i = 1, 2$, то $(H_1 \cap H_2) \mathbb{P}\text{-}rn\ G$;
- 3) если $G \in \overline{w}_\pi \mathcal{U}$ и K — подгруппа из G , то $K \in \overline{w}_\pi \mathcal{U}$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) следуют из лемм 2.6 и 1.7.

Утверждение 3). Пусть K — подгруппа $\overline{w}_\pi$ -сверхразрешимой группы G и $p \in \pi$. Если $p \in \pi(K)$, то по теореме Силова силовская p -подгруппа L из K содержится в некоторой силовской p -подгруппе P группы G . Так как G разрешима, то из $P \mathbb{P}\text{-}rn\ G$ по утверждению 1) леммы следует $\mathbb{P}$ -достижимость $K \cap P = L$ в K и $K \in \overline{w}_\pi \mathcal{U}$. Если $p \notin \pi(K)$, то $1 \mathbb{P}\text{-}rn\ K$ и $K \in \overline{w}_\pi \mathcal{U}$. Лемма доказана.

Согласно [9], формация $\mathfrak{F}$ называется π -насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \cap O_\pi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Теорема 2.8. Класс $\overline{w}_\pi \mathcal{U} \cap \mathfrak{S}$ является наследственной π -насыщенной формацией.

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{F} = \overline{w}_\pi \mathcal{U} \cap \mathfrak{S}$. Согласно 3) леммы 2.7 и 4) теоремы 2.4 класс $\mathfrak{F}$ является наследственной формацией.

Докажем π -насыщенность $\mathfrak{F}$ индукцией по $|G|$. Пусть $G/\Phi(G) \cap O_\pi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как $G/\Phi(G) \cap O_\pi(G)$ разрешима, то G разрешима.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . По теореме 1.4 $\Phi(G)N/N \subseteq \Phi(G/N)$. Из $O_\pi(G)N/N \subseteq O_\pi(G/N)$ и $G/\Phi(G)N \cap O_\pi(G)N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/N/\Phi(G/N) \cap O_\pi(G/N) \in \mathfrak{F}$. Ввиду $|G/N| < |G|$ получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Класс $\mathfrak{F}$ является формацией, поэтому N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Значит, $N \subseteq \Phi(G) \cap O_\pi(G)$. Отсюда следует, что N — p -группа для некоторого простого числа $p \in \pi$ и $O_p(G) = 1$. Пусть Q — силовская q -подгруппа группы G для $q \in \pi$. Так как $\Phi(G)$ не содержит силовских подгрупп, то $q \in \pi \cap \pi(G/N)$. Тогда $QN/N \cong \mathbb{P}\text{-}rn\ G/N$.

Если $|\pi \cap \pi(G)| = 1$, то $q = p$. Тогда из $QN/N = Q/N$ и 2) леммы 2.1 следует, что $Q \mathbb{P}\text{-}rn\ G$ и $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $|\pi \cap \pi(G)| \geq 2$ и $q \neq p$. Обозначим через H некоторую $\{p, q\}$ -холлову подгруппу группы G , содержащую Q . Ясно, что $N \subseteq H$. Так как $G/N \overline{\pi}$ -сверхразрешима, то ввиду 3) леммы 2.7 $H/N \overline{\pi}$ -сверхразрешима. Отсюда и из $\{p, q\} \subseteq \pi$ следует, что любая силовская подгруппа из H/N является $\mathbb{P}$ -достижимой в H/N . Так как $H/N \in \mathfrak{S}$, любая силовская подгруппа из H/N является $\mathbb{P}$ -субнормальной в H/N . Ввиду теоремы 1.10 заключаем, что H/N сверхразрешима. По теореме 1.8 получаем сверхразрешимость H . Поэтому QN является сверхразрешимой группой. Значит, $Q \mathbb{P}\text{-}rn\ QN$. Из $\mathbb{P}$ -достижимости QN/N в G/N и утверждений 2) и 1) леммы 2.1 получаем $\mathbb{P}$ -достижимость подгруппы Q в группе G . Так как для $q = p$ подгруппа $Q \mathbb{P}\text{-}rn\ G$, то любая силовская q -подгруппа из G для $q \in \pi \cap \pi(G)$ является $\mathbb{P}$ -субнормальной в G . Теорема доказана.

3. Одна характеристика w -сверхразрешимых групп

Пусть H — подгруппа группы G . Подгруппа $P_G(H)$ определяется в [6, с. 27] следующим образом:

$$P_G(H) = \langle x \in G \mid \langle x \rangle H = H \langle x \rangle \rangle.$$

Лемма 3.1. Пусть H — подгруппа группы G и $P_G(H) = G$. Если $N \triangleleft G$, то $P_{G/N}(HN/N) = G/N$.

Доказательство. Возьмем любой элемент $gN \in G/N$, $g \in G$. Пусть $G = P_G(H) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid \langle x_i \rangle H = H \langle x_i \rangle \rangle$. Тогда $g = \prod_{i \in I} x_i^{\alpha_i}$. Отсюда $gN = (\prod_{i \in I} x_i^{\alpha_i})N = \prod_{i \in I} (x_i N)^{\alpha_i} \in \langle x_1 N, x_2 N, \dots, x_n N \rangle = K/N$.

Циклическая группа, порожденная элементом $x_i N$, имеет вид $\langle x_i \rangle N/N$. Поэтому $\langle x_i \rangle N/N \cdot HN/N = HN/N \cdot \langle x_i \rangle N/N$. Это означает, что $x_i N \in P_{G/N}(HN/N)$. Следовательно, $gN \in K/N \subseteq P_{G/N}(HN/N)$. Лемма

доказана.

Лемма 3.2. Пусть группа $G = HQ$, где $H \in \text{Syl}_p(G)$, p — наибольший делитель $|G|$, Q — циклическая подгруппа из G . Тогда G p -замкнута.

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма не верна. Так как G является произведением нильпотентных подгрупп, по известной теореме Кегеля-Виландта [10], [11] G разрешима. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда G/N p -замкнута. Так как класс всех p -замкнутых групп является насыщенной формацией, то N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , $\Phi(G) = 1$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M с единичным ядром $\text{Core}_G(M) = 1$. По теореме 1.2 $G = MN$, где $M \cap N = 1$ и $N = C_G(N)$.

Если N — p -группа, то $NN/N = H/N$. Откуда $H \trianglelefteq G$. Получили противоречие с выбором G .

Пусть N — q -группа, $q \neq p$. Ввиду теоремы Силова $H^g \subseteq M$ для некоторого $g \in G$ и $N \subseteq Q$. Тогда $|N| = q$. Отсюда по теореме 1.5 $M \simeq G/N \simeq \text{Aut } N$ — абелева группа экспоненты, делящей $q-1$. Получили противоречие с тем, что p — наибольший делитель $|G|$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. Пусть $H \in \text{Syl}_p(G)$, p — наибольший делитель $|G|$. Если $P_G(H) = G$, то G p -замкнута.

Доказательство. Пусть x — образующий элемент группы G . Так как $\langle x \rangle H = H \langle x \rangle$, $\langle x \rangle H$ — подгруппа из G . По лемме 3.2 $H \trianglelefteq \langle x \rangle H$. Поэтому $\langle x \rangle \subseteq N_G(H)$. Это означает, что $G = P_G(H) \subseteq N_G(H)$. Лемма доказана.

Лемма 3.4. Пусть G — группа и $P_G(H) = G$ для любой силовой подгруппы H из G . Тогда G дисперсивна по Оре.

Доказательство. Проведем индукцией по $|G|$. Для $G = 1$ лемма верна. Если G — примарная группа, то утверждение леммы очевидно. Пусть $|\pi(G)| > 1$ и $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, где p_i — простые числа, $i = 1, 2, \dots, k$, $p_1 > p_2 > \cdots > p_k$. Для $P_1 \in \text{Syl}_{p_1}(G)$ по лемме 3.3 $P_1 \trianglelefteq G$. Так как любая силовская p_i -подгруппа группы G/P_1 имеет вид $P_i P_1 / P_1$, где $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$, $i = 2, \dots, k$, ввиду леммы 3.1 $P_{G/P_1}(P_i P_1 / P_1) = G / P_1$. По индукции G / P_1 дисперсивна по Оре. Отсюда G дисперсивна по Оре. Лемма доказана.

Теорема 3.5 [6, теорема 3, с. 209]. Для каждой разрешимой группы G существует множество Σ силовых подгрупп такое, что

(1) для каждого множества π простых чисел Σ содержит в точности одну холлову π -подгруппу из G ;

(2) любые две холловы подгруппы из Σ перестановочны.

Множество Σ холловых подгрупп группы G , которое удовлетворяет условиям (1) и (2), называется силовской системой группы G . (Отметим, что в [5, гл. I, определение 4.1] Σ называется холловой системой группы G .)

Пусть H — подгруппа разрешимой группы G и Σ_H — силовская система из H . Согласно [6, гл. I, с. 39]

(1) элемент $x \in G$ называется Σ_H -квазинормальным, если $\langle x \rangle A = A \langle x \rangle$ для всех $A \in \Sigma$;

(2) подгруппа, порожденная всеми Σ_H -квазинормальными элементами, обозначается $N_G^*(\Sigma_H)$. Если $N_G^*(\Sigma_H) = G$, то Σ_H называется слабо нормальной в G ;

(3) H называется слабо нормальной в G , если $G = HN_G^*(\Sigma_H)$.

Теорема 3.6 [6, теорема 8.7, с. 41]. Пусть G — разрешимая группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) G сверхразрешима;

(b) каждая силовская система группы G слабо нормальна в G ;

(c) каждая максимальная подгруппа группы G слабо нормальна в G .

Лемма 3.7. Если G — сверхразрешимая группа, то $P_G(H) = G$ для любой силовской подгруппы H из G .

Доказательство. Пусть $H \in \text{Syl}_p(G)$. Тогда H принадлежит некоторой силовской системе Σ группы G . По (b) теоремы 3.6 $N_G^*(\Sigma) = G$. Пусть x — любой образующий элемент группы G . Тогда $\langle x \rangle A = A \langle x \rangle$ для всех $A \in \Sigma$, в частности, $\langle x \rangle H = H \langle x \rangle$. Это означает, что x — образующий элемент подгруппы $P_G(H)$. Откуда $G = N_G^*(\Sigma) \subseteq P_G(H)$. Лемма доказана.

Лемма 3.8. Если G — w -сверхразрешимая группа, то $P_G(H) = G$ для любой силовской подгруппы H из G .

Доказательство. Ввиду леммы 3.7 можно считать, что группа G w -сверхразрешима, но не сверхразрешима. Тогда $|\pi(G)| \geq 2$. По теореме 1.12 G дисперсивна по Оре. Пусть $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, где p_i — простые числа, $i = 1, 2, \dots, k$ и $p_1 > p_2 > \cdots > p_k$. Тогда $P_1 \trianglelefteq G$, где $P_1 \in \text{Syl}_{p_1}(G)$. Поэтому $P_G(P_1) = G$. Отметим, что P_1 принадлежит любой силовской системе группы G . Пусть P_j — любая силовская p_j -подгруппа группы G и Σ_j — силовская система группы G , содержащая

$P_j, j = 2, \dots, k$. Обозначим через $\bar{P}_{ji}$ силовскую p_i -подгруппу группы G , входящую в $\Sigma_j, i \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j$. Тогда $H_{ji} = P_j \bar{P}_{ji}$ — подгруппа из G и по теореме 1.14 H_{ji} — сверхразрешимая группа, где $i \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j$. Ввиду леммы 3.7 $H_{ji} = P_{H_{ji}}(P_j)$. Отсюда $\bar{P}_{ji} \subseteq P_{H_{ji}}(P_j) \subseteq P_G(P_j), i \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j$. Так как $P_j \subseteq P_G(P_j)$, группа $G \subseteq P_G(P_j)$, т.е. $G = P_G(P_j)$. Лемма доказана.

Определение 3.9. Подгруппу H группы G будем называть перестановочно вложенной в G , если для любой подгруппы M из G такой, что $H \subseteq M \subseteq G$, всегда $P_M(H) = M$.

Теорема 3.10. Группа G w-сверхразрешима тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа группы G является перестановочно вложенной в G .

Доказательство. Если группа G является w-сверхразрешимой, то для любой силовской подгруппы H из G ввиду леммы 3.8 $P_G(H) = G$. По теореме 1.13 $w\mathfrak{U}$ — наследственная формация. Поэтому для любой силовской подгруппы H группы G из условия $H \subseteq M \subseteq G$ всегда следует, что $P_M(H) = M$, т.е. H является перестановочно вложенной в G .

Пусть $\mathfrak{F} = \{G \mid \text{любая силовская подгруппа группы } G \text{ является перестановочно вложенной в } G\}$.

По доказанному выше $w\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть G — группа наименьшего порядка, принадлежащая $\mathfrak{F} \setminus w\mathfrak{U}$. Так как $P_G(H) = G$ для любой силовской подгруппы H группы G , то по лемме 3.4 G дисперсивна по Оре. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Возьмем любую силовскую p -подгруппу R/N группы G/N . Предположим, что $R/N \subseteq M/N \subseteq G/N$. В G найдется силовская p -подгруппа P такая, что $R/N = PN/N$. Тогда $P \subseteq R \subseteq M \subseteq G$. Из $G \in \mathfrak{F}$ следует, что $P_M(P) = M$. По лемме 3.1 $P_{M/N}(PN/N) = M/N$. Значит, $G/N \in \mathfrak{F}$. По выбору G фактор-группа $G/N \in w\mathfrak{U}$. Так как $w\mathfrak{U}$ — насыщенная формация по теореме 1.13, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , $\Phi(G) = 1$. Пусть $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$, где p_i — простые числа, $i = 1, 2, \dots, k$ и $p_1 > p_2 > \dots > p_k$. Обозначим через P_i силовскую p_i -подгруппу группы G , $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда $N \subseteq P_1$. Так как $P_1 \trianglelefteq G$, $H_i = P_i P_1$ — холлова π_i -подгруппа группы G для $\pi_i = \{p_1, p_i\}, i \in \{2, \dots, k\}$.

Если $H_i \neq G$ для любого $i \in \{2, \dots, k\}$, то $H_i \in \mathfrak{F}$. По выбору G группа H_i w-сверхразрешима. Отсюда и из наследственности формации $w\mathfrak{U}$ следует, что $P_i N \in w\mathfrak{U}$. Поэтому $P_i \mathbb{P}\text{-}sn P_i N$. Тогда из $P_i N \mathbb{P}\text{-}sn G$ получаем, что $P_i \mathbb{P}\text{-}sn G$. Отсюда следует, что $G \in w\mathfrak{U}$. Это

противоречит выбору группы G .

Значит, $H_i = G$ для некоторого i из $\{2, 3, \dots, k\}$. Из $\Phi(G) = 1$ следует, что $G = MN$, где M — некоторая максимальная подгруппа группы G , $M \cap N = 1$, $N = C_G(N)$. Из теоремы Силова заключаем, что найдется $g \in G$ такой, что $P_i \subseteq M^g$. Так как $M^g \cap P_1 \trianglelefteq M^g$ и $M^g \simeq G/N$ по лемме 1.6 не содержит неединичных нормальных p_1 -подгрупп, заключаем, что $M^g \cap P_1 = 1$. Отсюда $M = P_i$ — максимальная подгруппа группы G . Ввиду того, что $P_G(P_i) = G$, найдется образующий элемент y группы G такой, что $y \notin P_i$, $\langle y \rangle P_i = P_i \langle y \rangle$. Тогда $G = P_i \langle y \rangle$. Откуда следует, что $|N| = p$. По теореме 1.5 G сверхразрешима. Получили противоречие с выбором G . Теорема доказана.

Summary

A subgroup H of a group G is called $\mathbb{P}$ -accessible in G if there exists a chain of subgroups $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = G$ such that either H_{i-1} is normal in H_i or $|H_i : H_{i-1}|$ is a prime for every $i = 1, \dots, n$. Finite groups for which its Sylow p -subgroups ($p \in \pi$) $\mathbb{P}$ -accessible subgroups in G are studied. Properties of such groups are obtained. The criterion of w -supersolubility for a group is received.

Литература

- [1] Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. — 1978. — Bd. 30, № 3. — S. 225–228.
- [2] Huppert, B. Endliche Gruppen. I / B. Huppert. — Berlin: Springer, 1967. — 794 s.
- [3] Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / , Т.И. Васильева, В.Н.Тютянов // Сиб. мат. журн. — 2010. — Т. 51, № 6. — С. 1270–1281.
- [4] Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. — М.: Наука, 1978. — 278 с.
- [5] Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. — 898 p.
- [6] Between Nilpotent and Solvable / H.G. Bray [and others]; edited by M. Weinstein. — Passaic: Polugonal Publishing House, 1982. — 240 p.

- [7] Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. — Мн.: Бел. наука, 2003. — 254 с.
- [8] Васильев, А.Ф. Новые свойства конечных динильпотентных групп / А.Ф. Васильев // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2004. — № 2. — С. 39–43.
- [9] Скиба, А.П. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Мат. труды. 1999. — Т. 2, № 2. — С. 114–147.
- [10] Kegel, O.H. Produkte nilpotenter Gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math. — 1961. — Vol. 12, № 2. — P. 90–93.
- [11] Wielandt, H. Über Produkte von nilpotenten Gruppen. III / H. Wielandt // J. Math. — 1958. — Bd. 2, № 4B. — S. 611–618.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Предварительные результаты	4
2. Свойства $\mathbb{P}$ -достижимых подгрупп	7
3. Одна характеристика w -сверхразрешимых групп	11
Литература	15

