Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

П. А. ЖИЗНЕВСКИЙ

О РЕШЕТКЕ τ-ЗАМКНУТЫХ n-КРАТНО ω-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

ПРЕПРИНТ № 8, сентябрь 2009

Гомель
УО «ГГУ им.Ф.Скорины»
2009

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используется терминология, принятая в [1-4]. Напомним, что решетка называется модулярной, если для любых элементов x, y, z решетки из $x \leqslant z$ следует, что $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

В 1986 году А.Н. Скибой было доказано, что решетка всех формаций является модулярной, но не является дистрибутивной. Данный результат получил развитие в работах многих авторов. Отметим, в частности, что в монографии [1] Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой была доказана модулярность решетки всех n-кратно насыщенных формаций; в совместной работе А. Баллестера-Болинше и Л.А. Шеметкова [5] установлена модулярность решетки всех ω-насыщенных формаций; А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым была доказана модулярность решеток всех n-кратно ω-насыщенных формаций [6] и n-кратно ω-композиционных формаций [3]. В работе И.П. Шабалиной [7] была доказана модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций, а В.Г. Сафоновым установлена модулярность решеток всех тотально насыщенных и τ-замкнутых тотально насыщенных формаций [8, 9]. Модулярность решетки всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций была установлена М.В. Задорожнюк в [10]. Развивая наблюдения указанных работ, нами доказана модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathfrak{L}$ — произвольный непустой класс простых абелевых групп и $\omega = \pi(\mathfrak{L})$. Тогда любую функцию вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\},$$

принимающую одинаковые значения на изоморфных группах называют ω-композиционным спутником. Напомним, что через $R_\omega(G)$ обозначают наибольшую нормальную разрешимую ω-подгрупну группы G, а символом $C^p(G)$ — пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют порядок p (если таких факторов у группы G нет, то полагают $C^p(G) = G$). Следуя [3], для произвольного ω-композиционного спутника f положим

$$CF_\omega(f) = \{G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и}$$

$$G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(Com(G)) \cap \omega\},$$

где $Com(G)$ — множество всех абелевых композиционных факторов группы G. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторого ω-композиционного спутника f, то говорят, что она ω-композиционна, а f — её ω-композиционный спутник.

Всякую формацию считают 0-кратно ω-композиционной. При $n \geqslant 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно ω-композиционной, если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями.

Подгрупповым функтором (в смысле А.Н.Скибы [2]) называется всякое отображение τ, сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что:

1) $G \in \tau(G)$;

2) для всякого эпиморфизма $\varphi : A \to B$, и для любых групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$, $T^{\varphi^{-1}}\tau(A)$.

В данной работе мы рассматриваем только такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G множество $\tau(G)$ содержится во множестве всех субнормальных подгрупп группы G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутым, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$. Если n-кратно ω-композиционная формация является τ-замкнутой, то её называют τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной формаций. ω-Композиционный спутник, все значения которого являются τ-замкнутыми $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями называется $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значным ω-композиционным спутником.

Для произвольного класса групп $\mathfrak{X}$ через $c^{\tau}_{\omega_n}\operatorname{form}\mathfrak{X}$ обозначают пересечение всех тех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций, которые содержат $\mathfrak{X}$.

Для произвольного набора $\{f_i \mid i \in I\}$ $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значных ω-композиционных спутников f_i через $\bigcap_{i\in I} f_i$ обозначают такой спутник, что

$$(\bigcap_{i\in I} f_i)(a) = \bigcap_{i\in I} f_i(a)$$

для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Если $\{f_i \mid i \in I\}$ набор всех $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значных ω-композиционных спутников формации $\mathfrak{F}$, то спутник $\bigcap_{i\in I} f_i$ называют минимальным $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значным ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{F}$. Для произвольной совокупности τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают

$$\vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c^{\tau}_{\omega_n}\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая система $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значных ω-композиционных спутников. Тогда через $\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)$ обозначают такой $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник f, что

$$f(a) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I} f_i(a)),$$

если по крайней мере одна из формаций $f_i(a) \neq \varnothing$. Если же $f_i(a) = \varnothing$ для всех $i \in I$, то полагают $f(a) = \varnothing$, где $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Совокупность формаций θ называют полной решеткой формаций, если пересечение любой совокупности формаций из θ снова принадлежит θ и во множестве θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \theta$. Для произвольной полной решетки формаций θ символом θ^{ω} обозначается совокупность всех таких формаций, которые имеют ω-композиционный спутник со значениями в θ.

Полная решетка формаций θ называется индуктивной, если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i = CF_{\omega}(f_i) \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \theta^{\omega}$ и для всякого такого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ θ-значных спутников f_i, что f_i — некоторый внутренний спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\theta^{\omega}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_{\omega}(\vee_{\theta}(f_i \mid i \in I)).$$

Здесь символом $\vee_\theta(f_i \mid i \in I)$ обозначается такой спутник f, что для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ формация $f(a)$ является верхней гранью для множества $\{f_i(a) \mid i \in I\}$ в θ.

Лемма 1. [3] *Формация $\mathfrak{F}$ n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционна тогда и только тогда, когда она обладает таким спутником f, значения которого на абелевых простых группах $(n-1)$-кратно $\mathfrak{L}$-композиционны.*

Лемма 2. [3] *Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = CF_{\mathfrak{L}}(f_i)$. Тогда $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, где $f = \bigcap_{i \in I} f_i$.*

Лемма 3. [11] *Пусть $\mathfrak{M}$ — непустая наследственная формация, $\mathfrak{F}$ — непустая τ-замкнутая формация. Тогда $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация.*

Лемма 4. [12] *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-композиционная формация. Тогда, если $\mathfrak{F}$ имеет внутренний τ-значный ω-композиционный спутник, то $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация.*

Следуя [3], для двух $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значных ω-композиционных спутников положим $f \leqslant h$, если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \bigcup \{\omega'\}$.

Лемма 5. [3] *Пусть f_1 и f_2 — минимальные $\mathfrak{L}$-композиционные Θ-значные спутники формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leqslant f_2$.*

Лемма 6. [2] *Решетка l^{τ}_{n} $(n \geqslant 0)$ модулярна, но не дистрибутивна.*

Лемма 7. [3] *Пусть Θ — такая полная решетка формаций, что для любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \in \Theta$ при любом $Z_p \in \mathfrak{L}^+$, $\Theta^{\mathfrak{L}} \subseteq \Theta$. И пусть $\mathfrak{F}_i = CF_{\mathfrak{L}}(f_i)$ $(i = 1, 2)$, где $f_i(a) = \mathfrak{F}_i$ для всех $a \in \mathfrak{L} \bigcup \{\mathfrak{L}'\}$, причем спутники f_1 и f_2 Θ-значны и являются внутренними. Тогда, если $\mathfrak{F} = \Theta^{\mathfrak{L}} \operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \bigcup \mathfrak{F}_2)$, то $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, где $f(A) = \Theta \operatorname{form}(f_1(A) \bigcup f_2(A))$ при любом $a \in \mathfrak{L} \bigcup \{\mathfrak{L}'\}$.*

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = CF_{\omega}(f_i)$ и $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значных ω-композиционных спутников. Тогда $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где $f = \bigcap_{i \in I} f_i$.*

Доказательство осуществляется с использованием лемм 1, 2 и непосредственной проверкой τ-замкнутости формации $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Напомним, что через $c^{\tau}_{\omega_n}$ обозначают множество всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций. Если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор элементов из $c^{\tau}_{\omega_n}$, то через $\vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ обозначается верхняя грань для $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ в $c^{\tau}_{\omega_n}$. Тогда ввиду леммы 8, получаем, что частично упорядоченное множество $c^{\tau}_{\omega_n}$ с частичным порядком „$\subseteq$" является полной решеткой τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.

Лемма 9. *Для любого натурального числа n и подгруппового функтора $\tau \leqslant s_{sn}$ справедливы следующие утверждения:*

1) $c^{\tau}_{\omega_n} \subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$;

2) для любой формации $\mathfrak{H} \in c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \in c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$ при любом $p \in \omega$.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно. Утверждение 2) следует из следствия 4 [3] и леммы 3. Лемма доказана.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 5 [3] с применением лемм 1, 4 и 9.

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{X}$ — такая непустая совокупность групп, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — некоторая τ-замкнутая формация, $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n}\operatorname{form}(\mathfrak{X})$, $n \in \mathbb{N}$ и $\pi = \pi(Com(\mathfrak{X}))$. Тогда $\mathfrak{F}$ имеет минимальный $c^{\tau}_{\omega_n}$-значный ω-композиционный спутник f и справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\operatorname{form}(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\operatorname{form}(\mathfrak{X}(C^p))$, для всех $p \in \pi \cap \omega$;

3) $f(p) = \varnothing$, для всех $p \in \omega \setminus \pi$.

4) Если $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(h)$ и спутник h $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значен, то

$$f(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\operatorname{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1)$$

для всех $p \in \pi \cap \omega$ и

$$f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\operatorname{form}(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_{\omega}(G) = 1);$$

5) Спутник f является внутренним.

Лемма 11. *Пусть f_i — минимальный ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I, n \geqslant 1$. Тогда $f = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)$ — минимальный ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F} = \vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация из условия леммы и пусть $\mathfrak{X} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$. Установим прежде справедливость равенства

$$\pi(Com(\mathfrak{X})) \cap \omega = \pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega.$$

Включение $\pi(Com(\mathfrak{X}))\cap\omega \subseteq \pi(Com(\mathfrak{F}))\cap\omega$ очевидно. Покажем обратное включение. Предположим противное, т.е. что

$$\pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega \not\subseteq \pi(Com(\mathfrak{X})) \cap \omega$$

и пусть

$$p \in (\pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega) \setminus (\pi(Com(\mathfrak{X})) \cap \omega).$$

Если t — минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form} \mathfrak{X} = c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form} \mathfrak{F}$, то, с одной стороны, из условия 3 леммы 10 имеем $t(p) = \varnothing$. С другой стороны, из условия 2 леммы 10 получаем, что

$$t(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}) \neq \varnothing.$$

Противоречие. Следовательно, $\pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega \subseteq \pi(Com(\mathfrak{X})) \cap \omega$. Таким образом,

$$\pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega = \pi(Com(\mathfrak{X})) \cap \omega.$$

Пусть h — минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что $f(a) = h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Если $a = q \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{X}))$, то по лемме 10 получим $f_i(q) = \varnothing$ для любого $i \in I$. Значит, $f(q) = \varnothing$. С другой стороны, из того, что h — минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, снова применяя лемму 10 имеем $h(q) = \varnothing$. Значит, $f(q) = h(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{X}))$.

Пусть $a = p \in \pi(Com(\mathfrak{X})) \cap \omega$. По лемме 10 имеет место

$$h(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\mathfrak{X}(C^p)) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i) =$$

$$= c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\bigcup_{i\in I} \tau \operatorname{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)) =$$

$$= c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\bigcup_{i\in I} f_i(p)) = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i(p) \mid i \in I) = f(p).$$

Аналогично, в случае когда $a = \omega'$ имеем

$$h(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i) =$$

$$c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)) =$$

$$= c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(\omega')) = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i(\omega') \mid i \in I) = f(\omega').$$

Значит, $f = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)$ — минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

2. Основной результат

Теорема 1. *Для любого натурального числа n решетка $c^{\tau}_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций индуктивна.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{F}_i = CF_{\omega}(f_i) \mid i \in I\}$ — некоторый набор τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций, где f_i — некоторый внутренний $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$. Пусть $\mathfrak{F} = \vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ и $\mathfrak{M} = CF_{\omega}(f)$, где $f = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)$. Обозначим через h минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$ и для каждого $i \in I$ через h_i — минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$.

Согласно лемме 11 спутник $k = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(h_i \mid i \in I)$ является минимальным $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значным ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{F}$, т.е. $h = k$. Поскольку $h_i \leq f_i$ для любого $i \in I$, то для каждого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ имеет место включение

$$c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I} h_i(a)\right) \subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I} f_i(a)\right).$$

Значит, $h \leq f$. Тогда по лемме 5 получаем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Согласно замечанию 1 [3] формация $\mathfrak{F}_i$ обладает таким $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значным ω-композиционным спутником F_i, что $F_i(p) = \mathfrak{N}_p h_i(p)$ для любого $p \in \omega$ и $F_i(\omega') = \mathfrak{F}_i$. Кроме того, ясно, что $f_i \leq F_i$. Следовательно, $f \leq \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(F_i \mid i \in I)$, т.е.

$$f(p) = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i(p) \mid i \in I) \subseteq$$

$$\subseteq \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(F_i(p) \mid i \in I) = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(\mathfrak{N}_p h_i(p) \mid i \in I).$$

для всех $p \in \omega$ и

$$f(\omega') = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i(\omega') \mid i \in I) \subseteq$$

$$\subseteq \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(F_i(\omega') \mid i \in I) = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Ввиду того, что $\mathfrak{N}_p h_i(p) \subseteq \mathfrak{N}_p(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(h_i(p) \mid i \in I))$, имеем

$$c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{N}_p h_i(p)\right) \subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\left(\mathfrak{N}_p\left(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(h_i(p) \mid i \in I)\right)\right).$$

Кроме того, из следствия 4 [3] и леммы 3, получаем

$$c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\left(\mathfrak{N}_p\left(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(h_i(p)\mid i\in I)\right)\right)=\mathfrak{N}_p\left(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(h_i(p)\mid i\in I)\right).$$

Итак,

$$f(p)\subseteq\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathfrak{N}_p\left(h_i(p)\mid i\in I\right)\subseteq\mathfrak{N}_p\left(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(h_i(p)\mid i\in I)\right)=\mathfrak{N}_p h(p).$$

Из замечания 1 [3], имеем $\mathfrak{F}=CF_\omega(t)$, где t — такой $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник, что $t(p)=\mathfrak{N}_p h(p)$ для всех $p\in\omega$ и $t(\omega')=\mathfrak{F}$. Теперь получаем, что $f\leq t$, т.е. $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{M}=\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Для любого целого неотрицательного n решетка $c^{\tau}_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций модулярна.*

Доказательство. При $n=0$ утверждение теоремы верно в силу леммы 6. Пусть $n>0$ и утверждение теоремы верно при $n-1$. Пусть $\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z}$ — τ-замкнутые n-кратно ω-композиционные формации такие, что $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{Z}$, и пусть X,Y,Z — канонические $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значные ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z}$ соответственно. Покажем, что

$$\mathfrak{X}\vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{Y}\bigcap\mathfrak{Z})=(\mathfrak{X}\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{Y})\bigcap\mathfrak{Z}.$$

Пусть x_0,y_0,z_0 — минимальные $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значные ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z}$ соответственно и пусть x,y,z — такие $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значные ω-композиционные спутники, что

$$\begin{aligned}x(\omega')&=\mathfrak{X}=X(\omega'),\\ y(\omega')&=\mathfrak{Y}=Y(\omega'),\\ z(\omega')&=\mathfrak{Z}=Z(\omega')\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}x(p)&=c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(\mathfrak{X}(C^p)),\\ y(p)&=c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(\mathfrak{Y}(C^p)),\\ z(p)&=c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(\mathfrak{Z}(C^p))\end{aligned}$$

при всех $p\in\omega$. Понятно, что

$$x_0\leqslant x\leqslant X,\qquad y_0\leqslant y\leqslant Y,\qquad z_0\leqslant z\leqslant Z.$$

Отсюда получаем

$$\mathfrak{X} = CF_\omega(x),$$
$$\mathfrak{Y} = CF_\omega(y),$$
$$\mathfrak{Z} = CF_\omega(z).$$

Кроме того, понятно, что спутники x, y и z являются внутренними. Тогда по лемме 7, получаем

$$\mathfrak{X} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{Y} = CF_\omega(x \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} y).$$

Значит, в силу леммы 8 спутник $(x \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} y) \bigcap z$ является внутренним $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значным ω-композиционным спутником формации $(\mathfrak{X} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{Y}) \bigcap \mathfrak{Z}$.

Поскольку $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Z}$, то по лемме 5, имеем $x(p) \subseteq z(p)$ для всех $p \in \in \omega$. Кроме того, $x(\omega') = \mathfrak{X} \subseteq Z = Z(\omega')$. Таким образом, $x \leqslant z$. Тогда согласно предположению индукции для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ верно равенство

$$(x(a) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} y(a)) \bigcap z(a) = x(a) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} (y(a) \bigcap z(a)).$$

Или, иначе

$$x \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} (y \bigcap z) = (x \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} y) \bigcap z.$$

Но $y \bigcap z$ — внутренний $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{Y} \bigcap \mathfrak{Z}$. Следовательно, из леммы 7, получаем

$$\mathfrak{X} \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{Y} \bigcap \mathfrak{Z}) = CF_\omega(x \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} (y \bigcap z)) =$$

$$= CF_\omega((x \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} y) \bigcap z) = (\mathfrak{X} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{Y}) \bigcap \mathfrak{Z}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает ряд следствий. Приведем лишь некоторые из них. Так, при $n = 1$ из теоремы 2, получаем .

Следствие 1 (Задорожнюк М.В. [10]). *Решетка всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций модулярна.*

В случае, когда $\tau = \{G\}$ — тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы 2, получаем

Следствие 2 (Шеметков Л.А., Скиба А.Н. [3]). *Для любого целого неотрицательного n решетка c^{ω}_{n} всех n-кратно ω-композиционных формаций модулярна.*

Если $n = 0$ и $\tau = \{G\}$ — тривиальный подгрупповой функтор, то из теоремы 2, получаем

Следствие 3 (Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба [1, С.97]). *Решетка формаций конечных групп L модулярна.*

Литература

[1] Л.А.Шеметков, А.Н.Скиба Формации алгебраических систем. — М.: Наука, 1989. — 253 с.

[2] А.Н.Скиба Алгебра формаций. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

[3] А.Н.Скиба, Л.А.Шеметков Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп. — Украинский математический журнал, том 52, № 6, 2000. — С. 783-797.

[4] Г.Биркгоф Теория решеток. — М.: Наука, 1984. — 568 с.

[5] A.Ballester-Bolinches, L.A.Shemetkov On latties of p-local formations of finite groups. — Math. Nachr., Vol. 186, 1997. — P. 57-65.

[6] А.Н.Скиба, Л.А.Шеметков Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. — Матем. Труды, Т.2, №2, 1999. – С. 114–147.

[7] И.П.Шабалина О решетке всех τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций конечных групп. — Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, № 1, 2003. — С. 28-30.

[8] V.G.Safonov On modularity of the lattice of totally saturated formations. — Comm. Algebra, Vol. 35, № 11, 2007. — P.3495.

[9] В.Г.Сафонов О модулярности решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций конечных групп. — Украинский математический журнал, том 58, № 6, 2006. — С. 852-858.

[10] М.В.Задорожнюк О решетке τ-замкнутых ω-композиционных формаций. — Классы групп алгебр и их приложения: материалы международной алгебраической конференции, посвящ. 70-летию со дня рождения Л.А.Шеметкова / ГГУ им. Ф.Скорины; редкол. В.С.Монахов, А.Н.Скиба, И.В.Близнец. — Гомель, 2007. — С. 73-74.

[11] В.Г.Сафонов Характеризация разрешимых однопорожденных тотально насыщенных формаций конечных групп. — Сибирский мат. журнал, Т. 48, № 1, 2007. — С.185-191.

[12] Л.И.Белоус (Буякевич) О минимальных τ-замкнутых ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-формациях. — Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки, № 4, 2006. — С. 21-25.

Научное издание

Жизневский Павел Александрович

О РЕШЕТКЕ τ-ЗАМКНУТЫХ n-КРАТНО ω-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Препринт № 8

В авторской редакции

Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09. Подписано в печать 29.09.09.
Формат 60×84 1/16. Бумага офисная № 1. Гарнитура "Таймс".
Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 1,02. Тираж 25 экз. Заказ № 320.

585-00

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"
Лицензия № 02330/150450 от 03.02.09.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104.