

**ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ «МАТЕМАТИКА», СЕМЕСТР 5)**

1. Системы множеств (полуалгебра, алгебра, σ -алгебра). Примеры.
2. Теорема об алгебре, порожденной полуалгеброй.
3. Определение и примеры мер (не менее 4 примеров).
4. Свойства меры (доказать любые 3 свойства меры).
5. Определение и свойства внешней меры.
6. Лебеговское продолжение меры. Измеримые множества. Теоремы о продолжении (формулировка).
7. Меры Лебега-Стилтьеса и их σ -аддитивность (формулировка). Мера Лебега на прямой.
8. Измеримые функции и их свойства (доказать любые 2 из них).
9. Простые функции и их свойства. Аппроксимация измеримых функций простыми (формулировка).
10. Интеграл Лебега от простой функции и его свойства.
11. Интеграл Лебега от неотрицательной функции и его свойства (доказать любые 3 свойства).
12. Интеграл Лебега от знакопеременной измеримой функции и его свойства (доказать любые 3 из них).
13. Предельный переход под знаком интеграла Лебега (сформулировать теоремы Лебега и Б. Леви и доказать одну из них).
14. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана и несобственным интегралом (формулировка).
15. Прямое произведение мер. Теорема Фубини (формулировка).
16. Знакопеременные меры. Примеры. Теорема Радона-Никодима (формулировка).
17. Интеграл Лебега-Стилтьеса.
18. Пространства L^p , неравенства Гёльдера и Минковского (формулировки).
19. Определение и примеры метрических пространств (не менее 4 примеров).
20. Окрестность. Открытые и замкнутые множества и их свойства.
21. Предел последовательности в метрическом пространстве, единственность предела.
22. Замыкание. Теорема о принадлежности замыканию.
23. Непрерывные отображения метрических пространств, непрерывность по Гейне. Теорема о равносильности двух определений непрерывности (формулировка).
24. Неравенство четырехугольника и непрерывность метрики.
25. Критерий непрерывности отображения метрических пространств.

26. Полные метрические пространства, примеры полных и неполных пространств (не менее 4 примеров).
27. Свойства полных подмножеств.
28. Принцип вложенных шаров.
29. Теорема Бэра о категории.
30. Всюду плотные и нигде не плотные множества, примеры. Теорема о пополнении метрических пространств (формулировка).
31. Сжимающие отображения метрических пространств. Принцип сжимающих отображений.
32. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Фредгольма 2 рода.
33. Обобщенный принцип сжимающих отображений
34. Компактность в метрических пространствах. Ограниченные и вполне ограниченные множества и их свойства. Свойство Больцано-Вейерштрасса (формулировка).
35. Критерий компактности Хаусдорфа (формулировка). Предкомпактность, критерий предкомпактности Хаусдорфа в полных пространствах.
36. Теорема Арцела-Асколи.
37. Теорема о непрерывном образе компактного пространства.
38. Векторные пространства, линейная зависимость и независимость. Конечномерные и бесконечномерные пространства, примеры тех и других.
39. Векторное подпространство, линейная оболочка. Факторпространство. Примеры.
40. Нормированные и банаховы пространства, примеры (не менее 4 примеров). Факторпространство и прямое произведение нормированных пространств.
41. Эквивалентные нормы. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве.
42. Ряды в нормированных пространствах. Критерий полноты нормированного пространства.
43. Теорема Ф. Рисса о некомпактности шара (критерий конечномерности).
44. Линейные ограниченные операторы, примеры (не менее 4 примеров). Лемма об образе ограниченного множества.
45. Равносильность ограниченности и непрерывности.
46. Норма оператора и ее вычисление.
47. Пространство $L\mathcal{B}(X, Y)$ и его полнота.
48. Сильная и равномерная сходимости последовательности операторов, связь между ними.
49. Свойства нормы в алгебре $L\mathcal{B}(X)$.
50. Обратный оператор, его линейность.
51. Односторонняя обратимость операторов, примеры. Ядро и образ оператора. Леммы о существовании односторонних обратных операторов.
52. Лемма о связи односторонней обратимости с обратимостью.

53. Теорема об обратимости оператора, близкого к единичному. Ряд Неймана.
 54. Теорема об обратимости оператора, близкого к обратимому.
 55. Теоремы Банаха об открытом операторе (формулировка) и об обратном операторе.
 56. Замкнутые операторы, пример оператора дифференцирования. Теорема Банаха о замкнутом графике.
 57. Теорема Банаха-Штейнгауза.
 58. Следствие теоремы Банаха-Штейнгауза.
- Желаю успешной сдачи экзамена!**

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ