

С.С. Гиргель

УО «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

АСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ БЕССЕЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПОРЯДКА

Введение

В настоящее время продолжается бум в поиске и исследовании новых типов световых пучков [1–4]. Большой интерес привлекают пучки Бесселя [5–9]. Дурнин [4] впервые обратил внимание на то, что пучки Бесселя обладают уникальным свойством бездифракционности, и экспериментально подтвердил это. Впрочем, еще Стрэттон [10] в 1948 году описал решения уравнения Гельмгольца, содержащие функции Бесселя целочисленного порядка. Недавно, Тао и др. [3] ввели непрерывный индекс ν для пучков Бесселя и описывали так называемые фракционные (fractional) пучки Бесселя. В наших работах [11–14] исследовались поляризационные и энергетические характеристики векторных пучков Бесселя. Совсем недавно, Ковалев и Котляр [6–8] ввели скалярные асимметричные моды Бесселя (aB-моды) целочисленного индекса, у которых

поперечные координаты x и y имеют дополнительные сдвиги (вещественные или комплексные).

В настоящей работе результаты [6–9] обобщаются и вместо целочисленного порядка вводится непрерывный неотрицательный порядок $\nu \geq 0$. и обсуждаются новый тип пучков – фракционные асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка.

1. Волновые поля Бесселя и их обобщения

Для монохроматического излучения ($E \sim \exp(-i\omega t)$) волновые поля описываются уравнением Гельмгольца, которое, в частности, имеет классическое решение [1, 2, 10]

$$E = A \exp[i(z\sqrt{k^2 - \alpha^2} + n\varphi)] J_n(\alpha\rho), \quad (1)$$

выражающиеся через цилиндрические функции 1 рода – функции Бесселя J_ν . С физической точки зрения стандартный пучок Бесселя представляет суперпозицию плоских монохроматических волн, волновые векторы каждой из которых расположены по круговому конусу вокруг оси z . Для физических приложений в теории планарных и цилиндрических волноводов применяются также и цилиндрические функции третьего рода – функции Ханкеля H_n .

Ковалев и Котляр [6–8] ввели более общие асимметричные моды Бесселя (aB -моды) целочисленного индекса, у которых поперечные координаты x и y имеют дополнительные сдвиги

$$E_n(x, y, z) = A \exp(iz\sqrt{k^2 - \alpha^2}) \cdot \left[\frac{x_1 + iy_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \right]^n J_n(\alpha\sqrt{x_1^2 + y_1^2}). \quad (2)$$

где $x_1 = x - x_0$, $y_1 = y - y_0$. Константы x_0 , y_0 – произвольные комплексные параметры комплексных смещений поперечных координат x и y . Цилиндрическая система координат хорошо приспособлена для физических объектов, обладающих вращательной симметрией, например, для стандартных поле Бесселя (1). Однако она становится не совсем удобной для асимметричных пучков, у которых цилиндрическая симметрия нарушается. По-видимому, поэтому в работах [6–9] обсуждаются частные случаи aB -мод. Практически авторы применяли вещественный x_0 сдвиг по x и чисто мнимый сдвиг по y , т. е. $y_0 = -ix_0$, чтобы упростить получающиеся выражения в цилиндрической системе координат. В поперечном сечении aB -мод (при определенном соотношении между параметрами) распределение интенсивности имеет вид полумесяца [7, 8]. Экспериментально наблюдали острую фокусировку aB -мод с помощью жидкокристаллического дисплея и зонной пластинки (см. также недавнюю экспериментальную работу [9]).

Сначала [6–7] авторы получили aB -моды путем суперпозиции обычных мод Бесселя. Позже они заметили [8], что выражения для aB -мод можно также получить путем комплексных смещений поперечных координат x и y . Авторы отметили, что когда $x_1^2 + y_1^2 \rightarrow 0$ в (2), тогда одновременно и аргумент функции Бесселя стремится к нулю и неопределенность раскрывается.

Следует заметить, что прием записи набега комплексной фазы в (2), использующий формулу $\text{arctg}(t) = (-i/2) \ln[(1+it)/(1-it)]$, не нов и использовался ранее в работе [4] для описания волнового пакета 2-D X-волн Бесселя.

Выражения для асимметричных волновых полей Бесселя (1) можно обобщить, если вместо целочисленного индекса n взять непрерывный индекс ν . Так как функция Бесселя имеет особенность при $x_1^2 + y_1^2 \rightarrow 0$, то отсюда следует, что индекс ν должен быть неотрицательным, т.е. $\nu \geq 0$. В итоге получаем пятипараметрические асимметричные бездифракционные непараксиальные волновые поля Бесселя непрерывного порядка.

$$E_\nu(x, y, z) = A \exp\left(iz\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right) \cdot \left[\frac{x_1 + iy_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right]^\nu J_\nu\left(\alpha\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right). \quad (3)$$

Какие ограничения следует наложить на свободные параметры в (3)? Известно, что, с математической точки зрения, в общем случае, согласно [14], у функции Бесселя 1 рода аргумент u и порядок (или индекс) ν могут быть произвольными комплексными числами. Однако мы ищем физически приемлемые решения. Тогда функция $E_\nu(x, y, z)$ должна быть регулярной функцией комплексной переменной $(\alpha\sqrt{x_1^2 + y_1^2})$. Известно [15], что при фиксированном ν функция $J_\nu(u)$ является аналитической. Для произвольных ν при $|u| \rightarrow 0$

$$J_\nu(u) = \frac{(u/2)^\nu}{0!\Gamma(\nu+1)} + \frac{(u/2)^{\nu+2}}{1!\Gamma(\nu+2)} + \dots, \text{ поэтому } J_\nu(u) \text{ ограничена только при } \text{Re}(u) \geq 0.$$

Как показывают анализ и графическое моделирование, наличие мнимой части порядка ν приводит к разрывам в графиках интенсивности, что недопустимо. Итак, можно использовать $\nu \geq 0$. Асимптотическое значение $J_\nu(u)$ при $|u| \rightarrow \infty$

$$J_\nu(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \dots, \text{ arg}(u) < \pi. \text{ Поскольку индекс } \nu \text{ может прини-}$$

мать непрерывные значения, то фаза при полном обороте вокруг оси пучка также является непрерывной и не обязана быть равной 2π . Пучки, характеризуемые нецелыми индексами ν , называются фракционными [2], [3], [15]. Поэтому обсуждаемые нами пучки являются также фракционными и имеют спиральный волновой фронт.

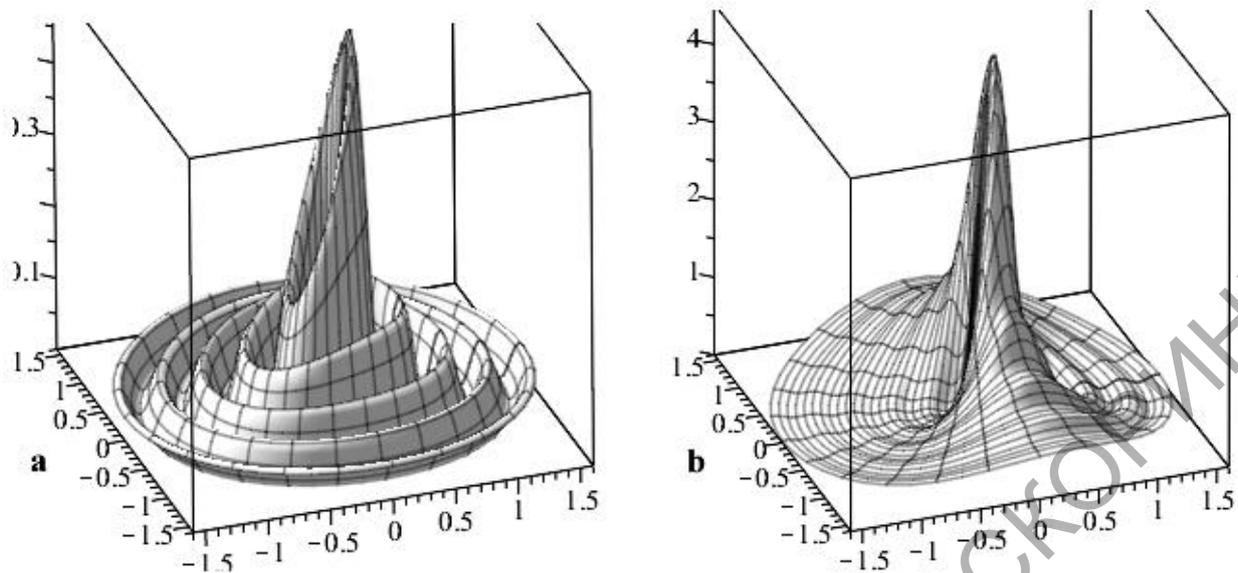


Рисунок 1 – 3D графики интенсивности аВ-мод при $\nu = 1,5$; $x_0 = 0$; $\alpha = 10$;
слева а) $y_0 = 0,05i$, справа б) $y_0 = 0,2i$

Фракционные аВ-моды зависят от трех переменных (x, y, z) и пяти параметров $(k, \alpha, x_0, y_0, \nu)$. Нами было проведено графическое моделирование интенсивности аВ-мод нецелочисленных порядков. В качестве примера на рисунках 1 и 2 соответственно изображены 3D и 2D графики интенсивности аВ-мод при $\nu = 1,5$. Использовались безразмерные параметры и координаты.

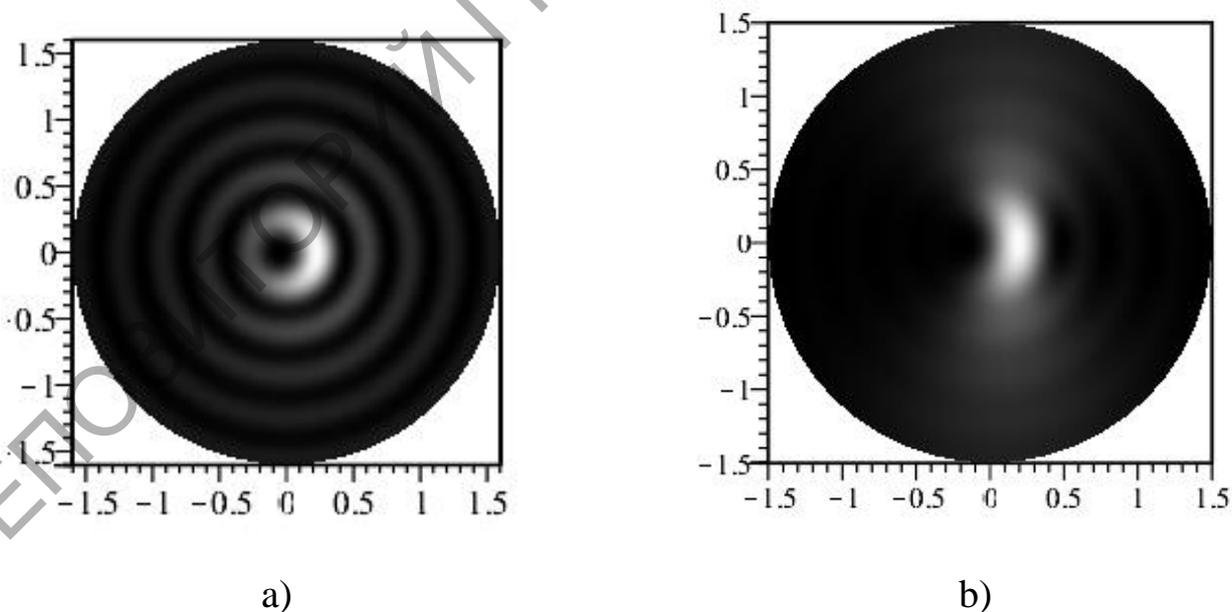


Рисунок 2 – 2D графики интенсивности аВ-мод при $\nu = 1,5$; $x_0 = 0$; $\alpha = 10$;
слева а) $y_0 = 0,05i$, справа б) $y_0 = 0,2i$

2. Обсуждение результатов

Основным результатом настоящей работы является выражение (2). Непрерывный порядок ν дает основание полученные пучки (2) трактовать, как фракционные асимметричные волновые поля Бесселя, которые обладают спиральным волновым фронтом. В частных случаях, когда неотрицательный индекс (порядок) ν фракционных пучков (2) становится целым числом, наши выражения (2) эквивалентны выражениям для aV -мод, обсуждаемых в работах [6–9]. В давней работе Валдрона [16] использовалась неортогональная спиральная (цилиндрическая вращающаяся) система координат. Для уравнения Гельмгольца получено решение в виде спиральных волновых полей Бесселя. В отличие от обычных световых полей Бесселя индекс (порядок) ν таких полей не обязан быть целым числом, а может пробегать непрерывный спектр значений: $\nu \geq 0$. Согласно интерпретации Оверфельт [17] в таких случаях непрерывный индекс ν связан не только с угловой фазой, но также является функцией шага спирали волнового фронта и продольной фазовой скорости волны Бесселя.

Из рисунков 1 и 2 видно, что комплексное смещение координаты y приводит к нарушению цилиндрической симметрии волновых полей Бесселя и возникновению асимметрии интенсивности. При увеличении параметра смещения y_0 пик интенсивности относительно увеличивается и картина качественно видоизменяется (рисунки справа).

Заключение

В данной работе вводится новый тип пучков (асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка), найдены условия их физической реализуемости. Они характеризуются пятью свободными непрерывными параметрами: тремя вещественными непрерывными (k, α, ν) и двумя комплексными параметрами (x_0, y_0). При целочисленных значениях порядка ν введенные здесь моды сводятся к aV -модам Котляра и Ковалева [6–8]. Показано, что физически приемлем непрерывный индекс $\nu \geq 0$. Эти aV -моды являются фракционными волновыми полями непрерывного порядка, обладающими спиральным волновым фронтом.

Варьирование новых свободных параметров таких пучков, несомненно, расширяет и предоставляет новые дополнительные возможности создания и исследования пучков с заданными свойствами для последующих практических применений.

Проведенное графическое моделирование интенсивности aV -мод нецелочисленных порядков показало резкую асимметрию таких мод, которая сильно возрастает при увеличении комплексного смещения поперечных координат.

Для экспериментального получения спиральных обобщенных ПБГ могут, в принципе, быть использованы после модернизации некоторые методики по-

лучения стандартных мод Бесселя и фракционных пучков. Так, в работах Тао и др. рассматривались возможности экспериментального получения и изучения фракционных пучков Бесселя (см., например, [3]).

В настоящем сообщении обсуждались скалярные асимметричные аВ-моды. Несложно перейти к соответствующим векторным пучкам с произвольной поляризацией, используя, например, формализм, предложенный нами в [19, 20].

Литература

1. Киселев, А.П. Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102. – № 4. – С. 661–681.
2. Gutierrez-Vega, J.C. Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence / J.C. Gutierrez-Vega, C. Lopez-Mariscal // J. Opt. A. Pure Appl. Opt. – 2008. – 10015009 (8pp).
3. Tao, S.H. Experimental study of holographic generation of fractional Bessel beams / Shao Hua Tao, Woei Ming Lee, Xiaocong Yuan // Applied Optics. – 2004. – Vol. 43. – № 1. – P. 122–126.
4. Christodoulides, D.N. Bessel X waves in two- and three-dimensional bidispersive optical systems / D.N. Christodoulides, N.K. Efremidis, P.D. Trapani, B.A. Malomed // Opt. Lett. – 2004. – Vol. 29. – № 13. – P. 1446–1448.
5. Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // JOSA A. – 1987. – Vol. 4. – № 4. – P. 651–654.
6. Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39. – № 8. – P. 2395–2398.
7. Kotlyar, V.V. Diffraction-free asymmetric elegant Bessel beams with fractional orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V., V.A. Soifer // Computer Optics. – 2014. – Vol. 38(1). – P. 4–10.
8. Ковалев, А.А. Асимметричные моды Бесселя первого и второго типа и их суперпозиции / А.А. Ковалев // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 39. – № 1. – С. 5–10.
9. Gong, Lei. Observation of the asymmetric Bessel beams with arbitrary orientation using a digital micromirror device / Lei Gong [et al.] // Optics Express. – 2014. – Vol. 22. – № 22. – С. 26763–26776.
10. Стрэттон, Дж.А. Теория электромагнетизма / Дж.А. Стрэттон // М. : ОГИЗ. ГИТТЛ, 1948. – 539 с.
11. Girgel, S.S. Vectorial of Bessel light beams / S.S. Girgel, S.N. Kurilkina // Proc. SPIE. – 2001. – Vol. 4358. – P. 258–264.

12. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства бесселевых волновых полей / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 6(9). – С. 146–149.

13. Гиргель С.С. Бесселевы световые пучки. / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2005. – № 3(30). – С. 93–98.

14. Гиргель С.С. Модовые и энергетические характеристики векторных бесселевых световых полей / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6(39). – Ч.1. – С. 49–52.

15. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш // М. : Наука, 1977. – 342 с.

16. Berry, M.V. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // Journal of Optics. – 2003. – № 6. – P. 259–268.

17. Waldron, R.A. A helical coordinate system and its applications in electromagnetic theory / R.A. Waldron // Quart. Journ. Mech. and Applied Math. – 1958. – Vol. 11. – № 4. – P. 438–461.

18. Overfelt, P.L. Scalar optical beams with helical symmetry / P.L. Overfelt // Phys. Rev.A. – 1992. – Vol. 46. – № 6. – P. 3516–3522.

19. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1(10). – С. 11–14.

20. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1(6). – С. 20–24.