Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай

УО «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

ВОЗБУЖДЕНИЕ БИ-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ ДИПОЛЬНЫМ ИЗЛУЧАТЕЛЕМ

Введение

Рассмотрим задачу о возбуждении сферической частицы радиуса a из биизотропного материала внешним дипольным источником электромагнитного излучения, ориентированным произвольным образом относительно частицы. Решение этой задачи в частном осесимметричном случае рассмотрено в работе [1]. Материальные уравнения в случае биизотропной среды имеют вид [2–5]

$$\vec{D} = \varepsilon_1 \vec{E} + \xi \vec{H}; \qquad \vec{B} = \mu_1 \vec{H} + \xi^* \vec{E}; \qquad \xi = \chi + i\alpha, \tag{1}$$

где ε_1, μ_1 – электрическая и магнитная проницаемость, χ – параметр Теллегена, α – киральный параметр. Дипольный источник и частица помещены в безграничную среду с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_2, μ_2. Ограничимся исследованием монохроматических полей

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\exp(-i\omega t),\ \rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})\exp(-i\omega t),\ \vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r})\exp(-i\omega t),$$

где выражения для плотности заряда и плотности тока монохроматического дипольного излучателя, имеющего дипольный момент $\vec{d}_0$ и расположенного в точке $\vec{r}\,'$ относительно центра биизотропного шара, имеют форму

$$\rho(\vec{r}) = -\left(\vec{d}_0 \cdot \vec{\nabla}\right)\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}\,'); \vec{j}(\vec{r}) = -i\omega \vec{d}_0 \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}\,'). \tag{2}$$

Система имеет сферическую симметрию, поэтому выражения для полей целесообразно представить в виде разложения по шаровым векторам [6]

$$\vec{Y}^{(1)}_{lm}(\vartheta,\varphi) = [l(l+1)]^{-1/2}(r\vec{\nabla})Y_{lm}(\vartheta,\varphi); \vec{Y}^{(-1)}_{lm}(\vartheta,\varphi) = \vec{r}/r\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi); \tag{3}$$
$$\vec{Y}^{(0)}_{lm}(\vartheta,\varphi) = -i[l(l+1)]^{-1/2}[\vec{r} \times \vec{\nabla}]Y_{lm}(\vartheta,\varphi),$$

где $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ – сферические гармоники [7]. В дальнейшем мы не будем писать аргументы функций (3).

1. Получение выражений для полей

Поле электрического диполя в неограниченном пространстве для фиксированных значений l, m приведём в следующем виде [8]:

$$\vec{E}^{dip}_{lm} = \frac{k_0 a_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} j_l(k_2 r)\vec{Y}^{(0)}_{lm} + \frac{b_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{\hat{j}'_l(k_2 r)}{r}\vec{Y}^{(1)}_{lm} + b_{lm}\frac{j_l(k_2 r)}{r}\vec{Y}^{(-1)}_{lm}\ ; \qquad (4)$$

$$\vec{H}^{dip}_{lm} = \frac{-k_0\varepsilon_2 b_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} j_l(k_2 r)\vec{Y}^{(0)}_{lm} + \frac{1}{\mu_2}\frac{a_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{\hat{j}'_l(k_2 r)}{r}\vec{Y}^{(1)}_{lm} + \frac{a_{lm}}{\mu_2}\frac{j_l(k_2 r)}{r}\vec{Y}^{(-1)}_{lm}\ ,$$

где коэффициенты a_{lm}, b_{lm} имеют форму

$$a_{lm} = -4\pi i k_0^2 \mu_2 n_2 h_l(k_2 r')[\vec{d}_0 \cdot \hat{\vec{L}}' Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')]\ ; \qquad (5)$$

$$b_{lm} = \frac{4\pi i k_0 n_2}{\varepsilon_2}\{2(\vec{d}_0 \cdot \hat{\vec{L}}') - \vec{d}_0 \cdot [\hat{\vec{L}}' \times \vec{\nabla}']\} Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi') h_l(k_2 r');\ \hat{\vec{L}}' = -i[\vec{r}' \times \vec{\nabla}']\ .$$

Выражения для рассеянных на шаре волн приведём в следующем виде [9]:

$$\vec{E}^{(2)}_{lm} = \frac{k_0 a^{(2)}_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} h_l(k_2 r)\vec{Y}^{(0)}_{lm} + \frac{b^{(2)}_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{\hat{h}'_l(k_2 r)}{r}\vec{Y}^{(1)}_{lm} + b^{(2)}_{lm}\frac{h_l(k_2 r)}{r}\vec{Y}^{(-1)}_{lm}\ ; \qquad (6)$$

$$\vec{H}^{(2)}_{lm} = \frac{-k_0\varepsilon_2 b^{(2)}_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} h_l(k_2 r)\vec{Y}^{(0)}_{lm} + \frac{1}{\mu_2}\frac{a^{(2)}_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{\hat{h}'_l(k_2 r)}{r}\vec{Y}^{(1)}_{lm} + \frac{a^{(2)}_{lm}}{\mu_2}\frac{h_l(k_2 r)}{r}\vec{Y}^{(-1)}_{lm}\ ,$$

а выражения для поля в шаре – в форме [10]

$$\vec{E}^{(1)}_{lm} = \sum_{\nu=\pm1} a^{\nu}_{lm}\left[j_l(k_\nu r)\vec{Y}^{(0)}_{lm} + i\nu\frac{\hat{j}'_l(k_\nu r)}{k_\nu r}\vec{Y}^{(1)}_{lm} + i\nu\sqrt{l(l+1)}\frac{j_l(k_\nu r)}{k_\nu r}\vec{Y}^{(-1)}_{lm}\right]; \qquad (7)$$

$$\vec{H}^{(1)}_{lm} = \sum_{\nu=\pm1} a^{\nu}_{lm}\frac{k_\nu - i\nu k_0 \xi^*}{k_0 \mu_1}\left[-i\nu j_l(k_\nu r)\vec{Y}^{(0)}_{lm} + \frac{\hat{j}'_l(k_\nu r)}{k_\nu r}\vec{Y}^{(1)}_{lm} + \sqrt{l(l+1)}\frac{j_l(k_\nu r)}{k_\nu r}\vec{Y}^{(-1)}_{lm}\right].$$

В выражениях (4)–(7) k_0 – волновое число, связанное с частотой ω как $k_0 = \omega/c$, $k_2 = k_0 n_2$, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$, $k_\nu = k_0 n_\nu = k_0(\sqrt{\varepsilon_1\mu_1 - \chi^2} + \nu\alpha)$, $j_l(x)$ – сферические функции Бесселя, $h_l(x)$ – сферические функции Ханкеля первого рода [7], $\hat{j}_l(x) = x j_l(x)$ и $\hat{h}_l(x) = x h_l(x)$ – сферические функции Рикатти-Бесселя и Рикатти-Ханкеля первого рода, соответственно, $\hat{j}'_l(x)$, $\hat{h}'_l(x)$ – производные сферических функций Рикатти-Бесселя и Рикатти-Ханкеля первого рода, соответственно, величины $a^{(2)}_{lm}$, $b^{(2)}_{lm}$, a^{ν}_{lm} – неизвестны.

Выполнение граничных условий для тангенциальных компонент электрического и магнитного поля на поверхности сферической частицы

$$[\vec{r} \times (\vec{E}^{dip}_{lm} + \vec{E}^{(2)}_{lm} - \vec{E}^{(1)}_{lm})]_{r=a} = 0;\quad [\vec{r} \times (\vec{H}^{dip}_{lm} + \vec{H}^{(2)}_{lm} - \vec{H}^{(1)}_{lm})]_{r=a} = 0 \qquad (8)$$

приводит к линейной системе четырёх алгебраических уравнений для неизвестных величин $a^{(2)}_{lm}$, $b^{(2)}_{lm}$, a^{ν}_{lm}. Решение этой системы представим как

$$a_{lm}^{+1} = a_{lm}\,\frac{\Delta_{1l}^{-1}}{\Delta_l} - ib_{lm}\,\frac{\Delta_{2l}^{-1}}{\Delta_l}; \qquad a_{lm}^{-1} = a_{lm}\,\frac{\Delta_{1l}^{+1}}{\Delta_l} - ib_{lm}\,\frac{\Delta_{2l}^{+1}}{\Delta_l}; \tag{9}$$

$$a_{lm}^{(2)} = a_{lm}\,\frac{\Delta_{0l} - \Delta_{3l}}{\Delta_l} - ib_{lm}\,\frac{\Delta_{4l}}{\Delta_l}; \quad b_{lm}^{(2)} = -ia_{lm}\,\frac{\Delta_{5l}}{\Delta_l} + b_{lm}\,\frac{\Delta_{0l} - \Delta_{6l}}{\Delta_l},$$

где

$$\Delta_l = h_{l2}\hat{h}'_{l2}\left(\frac{j_{l+}\hat{j}'_{l-}}{n_{-1}} + \frac{j_{l-}\hat{j}'_{l+}}{n_{+1}}\right)\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{(n_{+1} - i\xi^*)(n_{-1} + i\xi^*)}{\mu_1\varepsilon_2}\right) - \tag{10}$$

$$-(n_{+1} + n_{-1})\left(\frac{1}{\mu_1\varepsilon_2}\,j_{l+}j_{l-}(\hat{h}'_{l2})^2 + \frac{\mu_2/\mu_1}{n_{+1}n_{-1}}\,\hat{j}'_{l+}\hat{j}'_{l-}(h_{l2})^2\right);$$

$$\Delta_{1l}^{\nu} = \frac{k_0}{\sqrt{l(l+1)}}[j_{l2}\hat{h}'_{l2} - \hat{j}'_{l2}h_{l2}]\left[\frac{1}{n_\nu}\,\hat{j}'_{l\nu}h_{l2} - \frac{n_\nu - \nu i\xi^*}{\mu_1\varepsilon_2}\,j_{l\nu}\hat{h}'_{l2}\right];$$

$$\Delta_{2l}^{\nu} = \frac{\nu k_0}{\sqrt{l(l+1)}}[j_{l2}\hat{h}'_{l2} - \hat{j}'_{l2}h_{l2}]\left[j_{l\nu}\hat{h}'_{l2} - \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{n_\nu - \nu i\xi^*}{n_\nu}\,\hat{j}'_{l\nu}h_{l2}\right];$$

$$\Delta_{0l} = (n_{+1} + n_{-1})\left(\frac{\mu_2/\mu_1}{n_{+1}n_{-1}}\,j_{l2}h_{l2}\hat{j}'_{l+}\hat{j}'_{l-} + \frac{1}{\mu_1\varepsilon_2}\,\hat{j}'_{l2}\hat{h}'_{l2}j_{l+}j_{l-}\right);$$

$$\Delta_{3l} = \left(\frac{j_{l+}\hat{j}'_{l-}}{n_{-1}} + \frac{j_{l-}\hat{j}'_{l+}}{n_{+1}}\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{(n_{+1} - i\xi^*)(n_{-1} + i\xi^*)}{\mu_1\varepsilon_2}\,j_{l2}\hat{h}'_{l2} + h_{l2}\hat{j}'_{l2}\right);$$

$$\Delta_{4l} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\left[j_{l2}\hat{h}'_{l2} - \hat{j}'_{l2}h_{l2}\right]\left[\frac{n_{-1} + i\xi^*}{n_{-1}}\,j_{l+}\hat{j}'_{l-} - \frac{n_{+1} - i\xi^*}{n_{+1}}\,j_{l-}\hat{j}'_{l+}\right];$$

$$\Delta_{5l} = \frac{1}{\mu_1\varepsilon_2}\left[j_{l2}\hat{h}'_{l2} - \hat{j}'_{l2}h_{l2}\right]\left[\frac{n_{-1} + i\xi^*}{n_{+1}}\,j_{l-}\hat{j}'_{l+} - \frac{n_{+1} - i\xi^*}{n_{-1}}\,j_{l+}\hat{j}'_{l-}\right];$$

$$\Delta_{6l} = \left(\frac{j_{l+}\hat{j}'_{l-}}{n_{-1}} + \frac{j_{l-}\hat{j}'_{l+}}{n_{+1}}\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{(n_{+1} - i\xi^*)(n_{-1} + i\xi^*)}{\mu_1\varepsilon_2}\,\hat{j}'_{l2}h_{l2} + \hat{h}'_{l2}j_{l2}\right).$$

В выражениях (10) используются обозначения $j_{l2} = j_l(k_2a)$, $h_{l2} = h_l(k_2a)$, $j_{l\pm} = j_l(k_{\pm1}a)$, $h_{l\pm} = h_l(k_{\pm1}a)$, $\hat{j}'_{l2} = \hat{j}'_l(k_2a)$, $\hat{h}'_{l2} = \hat{h}'_l(k_2a)$, $\hat{j}'_{l\pm} = \hat{j}'_l(k_{\pm1}a)$. Отметим, что формулы (10) не зависят от типа излучателя.

2. Резонансы в малых частицах

Рассмотрим условие появления резонансов при рассеянии электромагнитных волн на сферической биизотропной частице. В данной работе мы ограничимся исследованием резонансов в случае, когда радиус частицы много меньше длины волны излучения $ak_0 \ll 1$. Условием существования резонансов для фиксированного значения числа l является обращение в ноль знаменателя выражений (9) Δ_l. Подстановка в уравнение $\Delta_l = 0$ асимптотических выражений для сферических функций при малых значениях аргумента [11] и учёт в полученном равенстве только слагаемых, содержащих наименьшую степень $k_0 a$ (квазистатическое приближение), приводит к следующему уравнению:

$$1+\frac{\mu_2}{\mu_1}\left[\frac{n_{+1}n_{-1}+2i\alpha\xi^*+(\xi^*)^2}{\mu_1\varepsilon_2}+\frac{l+1}{l}+\frac{n_{+1}n_{-1}}{n_2^2}\frac{l}{l+1}\right]=0. \tag{11}$$

Решение уравнения (11) относительно величины $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ имеет вид

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=-\frac{l(l+1)\mu_1\varepsilon_2+(l+1)^2 n_2^2-l^2\,|\,\xi\,|^2}{l^2\mu_1\varepsilon_2+l(l+1)n_2^2}. \tag{12}$$

В частности, для $l = 1,2$ выражение (12) принимает следующую форму:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=-\frac{2\mu_1\varepsilon_2+4n_2^2-|\,\xi\,|^2}{\mu_1\varepsilon_2+2n_2^2};\quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=-\frac{6\mu_1\varepsilon_2+9n_2^2-4\,|\,\xi\,|^2}{4\mu_1\varepsilon_2+6n_2^2}. \tag{13}$$

Из приведенных выражений видно, что в квазистатическом приближении наличие резонансов в биизотропной частице возможно как при положительных, так и при отрицательных значениях диэлектрической проницаемости. В случае возбуждения диэлектрической сферической частицы, радиус которой много меньше длины волны электромагнитного излучения, существование резонансов в квазистатическом приближении возможно лишь при отрицательных значениях диэлектрической проницаемости [8]. Из формулы (12) также следует, что с увеличением l значение диэлектрической проницаемости ε_1, при которой возможно существование резонансов, стремится к следующему пределу:

$$\varepsilon_1=-\varepsilon_2\left(1-\frac{|\,\xi\,|^2}{\varepsilon_2(\mu_1+\mu_2)}\right). \tag{14}$$

Отметим, что при $\xi = 0$ уравнение $\Delta_l = 0$ и выражения (12)–(14) совпадает с уравнением и соответствующими выражениями, полученными в случае диэлектрической сферической частицы [8].

Заключение

В работе получены точные решения задачи о рассеянии электромагнитного излучения диполя на сферической биизотропной частице. Диполь расположен произвольным образом относительно частицы. Проведен анализ полученных решений на возможность резонансного рассеяния в случае, когда радиус частицы много меньше длины волны рассеиваемого излучения. Найдены условия существования резонансов в квазистатическом приближении. В дальнейшем мы планируем провести исследование возможности появления резонансов в случае биизотропной частицы произвольного радиуса.

Литература

1. Куц, А.И. Численное исследование рассеяния поля электрического диполя на биизотропном шаре / А.И. Куц, Г.Ч. Шушкевич // Информатика. – 2015. – № 2. – С. 46–54.

2. Semchenko, I.V. Research on chiral and bianisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years / I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov, A.N. Serdyukov // Progress in electromagnetic research. – 1996. – Vol. 12. – P. 335–370.

3. Obukhov, Y.N. On the boundary-value problems and the validity of the Post constraint in the modern electromagnetism / Y.N. Obukhov, F.W. Hehl // Optik. – 2009. – Vol. 120. – P. 418–421.

4. Lindell, I.V. Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media / I.V.Lindell, A.H. Sihvola, S.A. Tretyakov, A.J. Viitanen. – Boston and London : Artech House, 1994. – 500 p.

5. Serdyukov, A. Electromagnetics of bi-anisotropic materials theory and applications / A. Serdyukov, I. Semchenko, S. Tretyakov, A. Sihvola. – Overseas Publishers Association, 2001. – 400 p.

6. Варшалович, А.Б. Квантовая теория углового момента / А.Б. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Л.: Наука, 1975. – 600 с.

7. Arfken, G. Mathematical methods for physicists / G. Arfken, H. Weber, F. Harris – 7-th ed. – San Diego: Academic Press, 2012. – 1205 p.

8. Климов, В.В. Наноплазмоника / В.В. Климов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 480 с.

9. Капшай, В.Н. Резонансная структура сечений рассеяния и экстинкции в проблеме Ми для биизотропного шара / В.Н. Капшай, А.А. Шамына, В.В. Кондратюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 28–32.

10. Капшай, В.Н., Электромагнитные поля в биизотропной среде внутри и вне металлической сферы / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Известия ВУЗов. Физика. – 2000. – № 11. – С. 79–84.

11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.