

**П.С. Шаповалов**

УО «Гомельский государственный технический университет  
имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь

## **ОПИСАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ**

Для описания физических нелинейных систем используются системы нелинейных дифференциальных уравнений. Случаи интегрируемых систем крайне редки [1]. Часто для таких систем отсутствуют интегралы движения, что указывает на наличие в динамике сложных (в том числе и хаотических) режимов. Задачи исследования нелинейных осцилляторов часто сводятся к системам Ермакова, для которой существует Ермаков-Левис-Рей-Рейд инвариант [2].

В данной работе задача взаимодействия гауссовых лазерных пучков в средах с кубической нелинейностью с помощью вариационного метода сводится к системе уравнений Ермакова, для которой найден интеграл движения. Распространение взаимодействующих пучков сводится к системе нескольких нелинейных уравнений, имеющих форму и инвариант движения, аналогичный обычной системе Ермакова из двух уравнений. Поэтому данную систему можно рассматривать как обобщение систем Ермакова.

Для описания взаимодействия световых пучков в среде с кубической нелинейностью и квадратичной неоднородностью будем исходить из системы нелинейных параболических уравнений [3], записанных в декартовой системе координат  $(x, y, z)$ . В данном случае пучки считаются некогерентными поэтому интерференционное взаимодействие света не учитывается.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - 2ik_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} - k_1^2 \alpha (x^2 + y^2) U_1 + k_1^2 \beta (|U_1|^2 + 2|U_2|^2) U_1 &= 0, \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} - 2ik_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} - k_2^2 \alpha (x^2 + y^2) U_2 + k_2^2 \beta (|U_2|^2 + 2|U_1|^2) U_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь для  $j$ -го пучка ( $j=1, 2$ )  $U_j$  – комплексная амплитуда электромагнитного поля на круговой частоте колебаний  $\omega_j$ ,  $k_j = \sqrt{\varepsilon_j} \omega_j$  – волновое число,  $\varepsilon_j$  – линейная диэлектрическая проницаемость среды,  $\alpha$  – коэффициент квадратичной неоднородности среды ( $\alpha=0$  – среда однородная),  $\beta$  – коэффициент нелинейности. Система (1) описывает взаимодействие лазерных пучков в диапазоне частот, где временная дисперсия среды пренебрежимо мала.

Для системы уравнений (1) запишем интеграл действия

$$\begin{aligned} J = \int_0^z dz \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{k_1^2} \left( \left| \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial U_1}{\partial y} \right|^2 \right) - \frac{i}{k_1} \left( U_1 \frac{\partial U_1^*}{\partial z} - U_1^* \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) + \frac{1}{k_2^2} \left( \left| \frac{\partial U_2}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial U_2}{\partial y} \right|^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{i}{k_2} \left( U_2 \frac{\partial U_2^*}{\partial z} - U_2^* \frac{\partial U_2}{\partial z} \right) + \alpha (x^2 + y^2) (|U_1|^2 + |U_2|^2) - \frac{\beta}{2} (|U_1|^4 + 4|U_1|^2 |U_2|^2 + |U_2|^4) \right]. \end{aligned}$$

Решая систему (1) вариационным методом в классе круговых гауссовых пучков для их радиусов, получим систему уравнений [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \alpha w_1 &= \left[ \frac{4(1 - k_1^2 \mu_1) w_2}{k_1^2 w_1} - \frac{32 \mu_2 w_1 / w_2}{(w_1 / w_2 + w_2 / w_1)^2} \right] \frac{1}{w_1^2 w_2}, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} + \alpha w_2 &= \left[ \frac{4(1 - k_2^2 \mu_2) w_1}{k_2^2 w_2} - \frac{32 \mu_1 w_2 / w_1}{(w_1 / w_2 + w_2 / w_1)^2} \right] \frac{1}{w_1 w_2^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $i=1, 2$ ,  $\mu_i = \beta P_i / 4\pi$ ,  $P_i$  – мощность  $i$ -го пучка,  $w_i$  – радиус светового пятна кругового пучка. Система (2) представляет собой систему уравнений для двух связанных нелинейных осцилляторов и записана в стандартной ермаковской форме [5]:

$$\ddot{a} + \omega^2 a = f(b/a) / a^2 b, \quad \ddot{b} + \omega^2 b = g(a/b) / ab^2. \quad (3)$$

В случае, когда мощности взаимодействующих пучков совпадают ( $P_1 = P_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ), система (2) относится к классу гамильтоновых систем.

Гамильтониан для нее будет равен:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)^2 + \frac{\alpha(w_1^2 + w_2^2)}{2} + \frac{2(1-k_1^2\mu)}{w_1^2} + \frac{2(1-k_2^2\mu)}{w_2^2} + \frac{16\mu}{w_1^2 + w_2^2}. \quad (4)$$

Данное утверждение легко проверить, подставляя (4) в систему:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = -\frac{\partial H}{\partial w_1}, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} = -\frac{\partial H}{\partial w_2}. \quad (5)$$

Умножая первое уравнения системы (2) на  $\mu_1$ , а второе уравнения на  $\mu_2$ , дифференцируя их по  $z$  и складывая, получим соотношение

$$\frac{d^3(\mu_1 w_1^2 + \mu_2 w_2^2)}{dz^3} + 4\alpha \frac{d(\mu_1 w_1^2 + \mu_2 w_2^2)}{dz} = 0. \quad (6)$$

Общее решение уравнения (6), в случае однородной среды ( $\alpha = 0$ ), имеет вид:

$$\mu_1 w_1^2 + \mu_2 w_2^2 = C_2 z^2 + C_1 z + C_0. \quad (6a)$$

Для квадратично неоднородной среды ( $\alpha \neq 0$ ) решение имеет вид:

$$\mu_1 w_1^2 + \mu_2 w_2^2 = S_2 \sin(2\sqrt{\alpha}z) + S_1 \cos(2\sqrt{\alpha}z) + S_0. \quad (6b)$$

Взаимодействие нескольких пучков, можно формально свести к распространению одного пучка в нелинейной среде, эффективный размер которого равен  $w_3^2 = \mu_1 w_1^2 + \mu_2 w_2^2$ , реальные пучки будут осциллировать вокруг эффективного.

При взаимодействии двух эллиптических гауссовых пучков система уравнений для полуосей светового пятна ( $w_{xi}, w_{yi}$ ) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial z^2} + \alpha w_{x1} &= \left[ \frac{4w_{y1}}{k_1^2 w_{x1}} - 4\mu_1 - \frac{32\mu_2}{\sqrt{(1+w_{x2}^2/w_{x1}^2)^3(1+w_{y2}^2/w_{y1}^2)}} \right] \frac{1}{w_{x1}^2 w_{y1}}, \\ \frac{\partial^2 w_{y1}}{\partial z^2} + \alpha w_{y1} &= \left[ \frac{4w_{x1}}{k_1^2 w_{y1}} - 4\mu_1 - \frac{32\mu_2}{\sqrt{(1+w_{y2}^2/w_{y1}^2)^3(1+w_{x2}^2/w_{x1}^2)}} \right] \frac{1}{w_{x1} w_{y1}^2}, \\ \frac{\partial^2 w_{x2}}{\partial z^2} + \alpha w_{x2} &= \left[ \frac{4w_{y2}}{k_2^2 w_{x2}} - 4\mu_2 - \frac{32\mu_1}{\sqrt{(1+w_{x1}^2/w_{x2}^2)^3(1+w_{y1}^2/w_{y2}^2)}} \right] \frac{1}{w_{x2}^2 w_{y2}}, \\ \frac{\partial^2 w_{y2}}{\partial z^2} + \alpha w_{y2} &= \left[ \frac{4w_{x2}}{k_2^2 w_{y2}} - 4\mu_2 - \frac{32\mu_1}{\sqrt{(1+w_{y1}^2/w_{y2}^2)^3(1+w_{x1}^2/w_{x2}^2)}} \right] \frac{1}{w_{x2} w_{y2}^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для системы уравнений (7), аналогично как и для системы уравнений (2), при одинаковых мощностях пучков ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ) получим инвариант по форме близкой гамильтониану (4).

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_{x1}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_{y1}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_{x2}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_{y2}}{\partial z} \right)^2 + \frac{\alpha(w_{x1}^2 + w_{y1}^2)}{2} + \frac{\alpha(w_{x2}^2 + w_{y2}^2)}{2} +$$

$$+ \frac{2}{k_1^2} \left( \frac{1}{w_{x1}^2} + \frac{1}{w_{y1}^2} \right) + \frac{2}{k_2^2} \left( \frac{1}{w_{x2}^2} + \frac{1}{w_{y2}^2} \right) - \frac{4\mu}{w_{x1}w_{y1}} - \frac{4\mu}{w_{x2}w_{y2}} + \frac{16\mu}{\sqrt{(w_{x1}^2 + w_{x2}^2)(w_{y1}^2 + w_{y2}^2)}}$$

Систему уравнений (7) можно рассматривать как обобщение систем Ермакова на случай многомерных нелинейных осцилляторов. Такие системы должны подчиняться тем же закономерностям, что и классические системы Ермакова, т.е. они должны быть разрешимы.

Умножая первое второе уравнения системы (7) на  $\mu_1$ , а третье и четвертое уравнения на  $\mu_2$ , дифференцируя их по  $z$  и складывая, получим соотношение

$$\frac{d^3(\mu_1(w_{x1}^2 + w_{y1}^2) + \mu_2(w_{x2}^2 + w_{y2}^2))}{dz^3} + 4\alpha \frac{d(\mu_1(w_{x1}^2 + w_{y1}^2) + \mu_2(w_{x2}^2 + w_{y2}^2))}{dz} = 0. \quad (8)$$

Общее решение уравнения (8), в случае однородной среды ( $\alpha = 0$ ), имеет вид:

$$\mu_1(w_{x1}^2 + w_{y1}^2) + \mu_2(w_{x2}^2 + w_{y2}^2) = C_2 z^2 + C_1 z + C_0. \quad (8a)$$

Для квадратично неоднородной среды ( $\alpha \neq 0$ ) решение имеет вид:

$$\mu_1(w_{x1}^2 + w_{y1}^2) + \mu_2(w_{x2}^2 + w_{y2}^2) = S_2 \sin(2\sqrt{\alpha}z) + S_1 \cos(2\sqrt{\alpha}z) + S_0. \quad (8б)$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий. Осцилляции реальных пучков, относительно эффективного размера  $w_s^2 = \mu_1(w_{x1}^2 + w_{y1}^2) + \mu_2(w_{x2}^2 + w_{y2}^2)$ , можно изучить с помощью построения фазовой поверхности уравнения.

## Литература

1. Лихтенберг, А. Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман. – М.: Мир, 1985. – 529 с.
2. Haas, F. Dynamical symmetries and the Ermakov invariant / F. Haas, J. Goedert // Phys. Lett. A. – 2001. – Vol. 279. – P. 181–188.
3. Гончаренко, А.М. О взаимодействии круговых гауссовых пучков света в нелинейных средах / А.М. Гончаренко, П.С. Шаповалов // Доклады НАНБ. – 2003. – Т. 47. – № 2. – С. 66–68.
4. Шаповалов, П.С. О нелинейном взаимодействии соосных гауссовых пучков света в неоднородной среде / П.С. Шаповалов, Е.А. Ермолаев // Известия НАНБ Сер. Физ.-мат. наук – 2006. – № 1. – С. 81–85.
5. Беркович, Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений / Л.М. Беркович. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 464 с.