

В.В. Андреев¹, К.С. Бабич¹, А.Е. Дорохов²

¹УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

²Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

СТРУКТУРНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ СИСТЕМ

Введение

Изучение характеристик связанных систем является важнейшим источником информации о свойствах взаимодействий элементарных частиц. В этой связи, для объяснения экспериментальных данных в рамках квантовополевых моделей необходимо учитывать как релятивистские эффекты, так и эффекты высших порядков по константе взаимодействия. Для такого рода вычислений требуются методики, позволяющие проводить численные расчеты этих эффектов с высокой точностью.

В данной работе предлагается для определения вклада релятивистских эффектов в структурные поправки спектра водородоподобных систем использовать методику вычислений, основанную на использовании импульсного представления и точного вычисления спинорной части потенциала таких систем. С помощью этой методики рассчитаны релятивистские вклады высших порядков для мюонного и обычного атома водорода, связанные состояния которых описываются калибровочно-инвариантной пуанкаре-ковариантной моделью, основанной на точечной форме пуанкаре-инвариантной квантовой механики (ПИКМ).

1. Описание связанной двухчастичной системы в пуанкаре-ковариантной модели

Главным требованием ПИКМ является условие сохранения пуанкаре-инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц. В случае системы двух частиц с массами m_q и m_Q и соответственно с 4-импульсами $p_1 = (\omega_{m_q}(p_1), \mathbf{p}_1)$ и $p_2 = (\omega_{m_Q}(p_2), \mathbf{p}_2)$ это требование, в рамках мгновенной и точечной форм ПИКМ, приводит к уравнению для связанного состояния с волновой функцией $\Phi_{\ell,S}^{J,\mu}(k)$:

$$\sum_{\ell',S'} \int_0^\infty V_{\ell,S;\ell',S'}^J(k,k') \Phi_{\ell',S'}^{J,\mu}(k') k'^2 dk' = (M - M_0) \Phi_{\ell,S}^{J,\mu}(k), \quad (1)$$

где $M_0 = \omega_{m_Q}(\mathbf{k}) + \omega_{m_q}(\mathbf{k})$ – эффективная масса системы невзаимодействующих частиц, имеющих импульс относительного движения \mathbf{k} ($k = |\mathbf{k}|$). Расчеты поправок проведем для связанных систем: e^-p (атом водорода) и μ^-p (мюонный атом водорода).

2. Оценка релятивистских вкладов

Как правило, при вычислении энергетических поправок водородоподобных систем используется разложение потенциала: k^2/m^2 (см. обзор [1]). Включение слагаемых более высокого порядка, чем $0: k^2/m^2$, при разложении по скоростям фермионов приводит к сложностям, а именно, при вычислениях релятивистских поправок появляются расходящиеся интегралы за счет высоких степеней k . Поэтому, для исследования релятивистских вкладов более высокого порядка, воспользуемся точным выражением для ядра интегрального уравнения (1). Ядро потенциала было получено в работах [2, 3] без всяких допущений относительно скоростей фермионов и величины q^2 , а следовательно является адекватным способом анализа релятивистских вкладов более высокого порядка, чем k^2/m^2 .

Для численных расчетов используем значения фундаментальных физических констант, взятые из [4]. Энергетические поправки релятивистской водородоподобной системы с $J = S$ найдем с помощью выражения

$$\Delta E = \iint_{00}^{\infty} \tilde{R}_{n\ell=0}^C(\mathbf{k}) \Delta V^{J=S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \tilde{R}_{n\ell=0}^C(\mathbf{k}') k'^2 k^2 dk' dk, \quad (2)$$

где $\Delta V^{J=S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ – добавка к потенциалу с точечными фермионами и $R_{n\ell}^C(\mathbf{k})$ пробные волновые функции

$$\tilde{R}_{n\ell}^C(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{2(n-\ell-1)!}{\pi(n+\ell)!}} \frac{n^2 2^{2(\ell+1)} \ell! n^\ell (k/\beta)^\ell}{\beta^{3/2} (n^2 (k/\beta)^2 + 1)^{\ell+2}} G_{n-\ell-1}^{\ell-1} \left(\frac{n^2 (k/\beta)^2 + 1}{n^2 (k/\beta)^2 + 1} \right) \quad (3)$$

с полиномами Гегенбауэра $G_n^\ell(x)$ и $\beta = \mu\alpha$.

Ядро фермион-фермионной системы в $\ell-S$ базисе для произвольного полного углового момента J , после точного вычисления спинорной части методом базисных спиноров, запишется в виде:

$$V_{\ell', S'; \ell, S}^J(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}}{2J+1} \sum_{\lambda_{k_i}, \lambda_{p_i}=-1}^1 C_{\lambda_{k_1}/2, \lambda_{k_2}/2, \lambda/2}^{1/2, 1/2, S} C_{0, 0, \lambda}^{\ell, S, J} C_{0, 0, \lambda'}^{\ell', S', J} \times \quad (4)$$

$$C_{\lambda_{p_1}/2, \lambda_{p_2}/2, \lambda'/2}^{1/2, 1/2, S'} \frac{Z\alpha}{4\pi} \left(\sum_{i=I-IV} V^i_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}} + V^{\text{(B)}}_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} \right),$$

где составные части $V_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^i(k, k')$ представляют собой комбинацию функций $\tilde{R}_\ell^{(i)}(k, k')$ и $\tilde{U}_\ell^{(i)}(k', k)$. Эти функции выражаются в виде одномерных интегралов:

$$\tilde{R}_\ell^{(i)}(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{K^i(\tilde{q}^2) P_\ell(x)}{q^2} dx, \quad \tilde{U}_\ell^{(i)}(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{K^i(\tilde{q}^2) P_\ell(x)}{q^4} dx$$

с функциями $K^i(\tilde{q}^2)$ зависящими только от формфакторов. Для обозначения коэффициентов Клебша-Гордана используем выражение вида $C_{\lambda_{k_1}/2, \lambda_{k_2}/2, \lambda/2}^{1/2, 1/2, S}$.

3. Оценка релятивистских вкладов

Проведем оценку релятивистских поправок высших порядков, связанных с движением фермионов, а также эффектов высоких переданных импульсов для структурных вкладов в $1s$ и $2s$ -состояний водородоподобных систем. Для выделения слагаемых, связанных с конечными размерами протона, саксовские формфакторы протона представим виде сумм:

$$G_M^p(q^2) = \mu_p + \Delta G_M^p(q^2), \quad G_E^p(q^2) = 1 + \Delta G_E^p(q^2), \quad (4)$$

где $\Delta G_{M,E}^p(q^2) = \langle r_p^2 \rangle$ при малых q^2 .

Далее произведем вычисления трех видов поправок: ΔE_{NR} , ΔE_{LC} и ΔE_{rel} , используя различные приближения:

- нерелятивистское приближение ΔE_{NR} ($k^2/m_{1,p}^2, k'^2/m_{1,p}^2 = 1$ и $q^2 = m_p^2$)
- лидирующий вклад ΔE_{LC} (используется только приближение $k^2/m_{1,p}^2, k'^2/m_{1,p}^2 = 1$);
- точное вычисление ΔE_{rel} (без разложения по параметрам $k^2, k'^2/m_{1,p}^2$ и q^2/m_p^2).

Поправка ΔE_{Rel} с потенциалом (4) даст результат с учетом релятивистского движения фермионов системы. Для оценки релятивистских вкладов высших порядков используем величину:

$$\Delta_{HO} = \Delta E_{Rel} - \Delta E_{LC}. \quad (5)$$

Явный вид слагаемых потенциала, которые содержат интегралы вида

$$G_\ell^p(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{\Delta G^p(q^2)}{q^2} P_\ell(x) dx, \quad F_\ell^p(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{\Delta G^p(q^2)}{q^2(1 - q^2/(4m_p^2))} P_\ell(x) dx \quad (6)$$

будет зависеть от формфакторов протона.

Для расчета поправок используем различные параметризации протонных формфакторов:

- стандартная дипольная параметризация

$$G_E^p(Q^2) = G_D(Q^2), \quad G_M^p(Q^2) = \mu_p G_D(Q^2), \quad (7)$$

$$G_D(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{m_D^2}\right)^{-2}, \quad Q^2 = -q^2, \quad (8)$$

где $m_D^2 = 0,71 \text{ ГэВ}^2$. Данный вариант параметризации будем называть как фит I;

- вариант параметризации [5] будем называть фитом II:

$$G_{E,M}(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{a_{E,M}}\right)^{-2}, \quad \langle r_{E,M}^2 \rangle = \frac{12}{a_{E,M}}, \quad (9)$$

где

$$\langle r_M^2 \rangle^{1/2} = (0,777 \pm 0,013_{\text{stat}} \pm 0,009_{\text{syst}} \pm 0,005_{\text{model}} \pm 0,002_{\text{group}}) \Phi_M, \quad (10)$$

$$\langle r_E^2 \rangle^{1/2} = (0,879 \pm 0,005_{\text{stat}} \pm 0,004_{\text{syst}} \pm 0,002_{\text{model}} \pm 0,004_{\text{group}}) \Phi_M;$$

- параметризация [6]

$$G_M^p(Q^2) = \mu_p \frac{1 + a_{p,1}^M \tau_p}{1 + b_{p,1}^M \tau_p + b_{p,2}^M \tau_p^2 + b_{p,3}^M \tau_p^3}, \quad \tau_p = Q^2 / (4m_p^2), \quad (11)$$

$$G_E^p(Q^2) = \frac{G_M^p(Q^2)}{\mu_p} (c_0 + c_1 Q^2) \quad (12)$$

была применена в [7] для описания поведения формфакторов протона с параметрами:

$$\begin{aligned} a_{p,1}^M &= 1,53 \pm 0,01, & b_{p,1}^M &= 12,87 \pm 0,07, & c_0 &= 1,02 \pm 0,01, \\ b_{p,2}^M &= 29,16 \pm 0,25, & b_{p,3}^M &= 41,40 \pm 0,33, & c_1 &= -0,13 \pm 0,01. \end{aligned} \quad (13)$$

Этот вариант параметризации обозначим – фит III.

В таблице 1 представлены результаты вычислений для атома водорода.

Таблица 1 – Поправки для варианта «фит II», связанные с внутренней структурой протона и вклады ΔE_{NR} , ΔE_{LC} и релятивистские поправки высоких порядков ΔE_{Rel} для атома водорода (в кГц)

n	ΔE_{NR}	ΔE_{LC}	ΔE_{Rel}	Δ_{HO}
1	1208,31	1208,30	1202,52	-5,78
2	151,04	151,04	150,31	0,72

Как следует из данных таблицы 1, учет высоких q^2 посредством параметризации (9) не вносит существенного изменения по сравнению линейным поведением. А вот поправки, связанные с релятивистским

движением фермионов в данной ситуации дают видимый, хоть и относительно малый в процентном выражении $\approx 0,48\%$ эффект.

Расчеты с использованием стандартной дипольной параметризацией (7) (фит I) отличаются от данных таблицы 1 за счет различного поведения функций (7) и (9) при малых q^2 . Так для $1s$ и $2s$ -состояний имеем, что $\Delta E_{\text{Rel}} = 1024,33$ кГц и $\Delta E_{\text{Rel}} = 150,32$ кГц соответственно. Величина: 178 кГц и величина: 22 кГц для структурной поправки превосходят экспериментальную точность энергетических интервалов.

Для более полного представления о зависимости структурных поправок для водородоподобных атомов от вида параметризации рассмотрим численный расчет для варианта «фит III» (смотри таблицу 2).

Таблица 2 – Поправки для варианта параметризации фит III (в кГц)

n	ΔE_{NR}	ΔE_{LC}	ΔE_{Rel}	Δ_{HO}
1	$1223,15 \pm 22,36$	$1200,10 \pm 34,86$	$1194,43 \pm 33,67$	$-5,67$
2	$152,89 \pm 2,39$	$150,01 \pm 4,23$	$149,30 \pm 4,21$	$0,71$

Релятивистские поправки высших порядков Δ_{HO} : $-5,67$ кГц и $0,71$ кГц составляют $\approx 0,47\%$ для $1s$ и $2s$ -состояний и практически не отличаются от параметризации «фит II», в то время, сами вклады отличаются за счет различного поведения при малых q^2 . Однако, интервальные оценки обеих фитов практически совпадают.

В данном подходе имеется возможность вычислить вклад Δ_{Lab} , связанный с эффектом «Lab» (разница между двумя случаями $R(q^2) = 1$ и $R(q^2) = c_0 + c_1 q^2$, $c_1 = 0,13 \text{ ГэВ}^{-2}$): $\Delta_{\text{Lab}} = \{-23,42 \text{ кГц} - 2,93 \text{ кГц}\}$ для $1s$ и $2s$ -состояний.

Проведем аналогичные вышеприведенным, вычисления для мюонного атома водорода. Интерес к этой системе связан с необычными следствиями, вытекающими из эксперимента [8]. Вычисления для мюонного атома водорода для ситуации «фит II» представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Поправки для варианта «фит II», связанные с внутренней структурой протона (ΔE_{NR} и ΔE_{LC}) и с учетом релятивистских вкладов высоких порядков ΔE_{Rel} для мюонного атома водорода ($\mu^- p$ система) (в миллиэВ)

n	ΔE_{NR}	ΔE_{LC}	ΔE_{Rel}	Δ_{HO} , миллиэВ
1	32,1261	31,9498	32,0591	0,1093
2	4,0158	3,9937	4,0065	0,0128

Из таблицы 3 следует, что в отличие от атома водорода, μ - p система более чувствительна к поведению формфактора протона и менее чувствительна к релятивистским эффектам высоких порядков. Это объясняется тем, что первая боровская орбита этой системы ближе к ядру, чем в атоме водорода.

Численные оценки показывают, что релятивистские эффекты ($\approx 0,38\%$) больше необходимой точности для тонкой структуры: 10^{-4} миллиэВ и поэтому их также необходимо учитывать.

Как и в случае атома водорода, расчеты с использованием стандартной дипольной параметризацией (7) (фит I) отличаются от данных таблицы 1. Данный эффект усиливается, поскольку μ - p -система чувствительна к поведению формфакторов в зависимости от q^2 и составляет почти $14,7\%$. Поэтому для мюонного атома водорода важнейшую роль играет поведение формфакторов и, следовательно, зависимость от параметризации более сильная, чем для атома водорода. Расчеты для варианта «фит III» представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Поправки для варианта «фит III», связанные с внутренней структурой протона ΔE_{NR} и ΔE_{LC} и с учетом релятивистских вкладов высоких порядков ΔE_{Rel} для мюонного атома водорода (μ - p система) (в миллиэВ)

n	ΔE_{NR}	ΔE_{LC}	ΔE_{Rel}	Δ_{HO} , миллиэВ
1	32,5205	31,7717	31,8929	0,1212
2	4,0651	3,9715	3,9866	0,0152

Данные из таблиц 3 и 4 показывают, что для мюонного водорода эффекты высоких q^2 компенсируются релятивистскими эффектами, связанных с движением фермионов в отличие от обычного атома водорода.

Также оценим дополнительный вклад, связанный эффектом, обнаруженный на *Lab*. Поскольку он видоизменяет поведение зарядового формфактора протона, то следует ожидать большей чувствительности мюонного атома водорода к этим эффектам. Действительно, для $1s$ - и $2s$ -состояний атома водорода этот эффект дает дополнительные поправки равные $-0,6158$ миллиэВ и $-0,0770$ миллиэВ соответственно.

Заключение

Как следует из расчетов, предлагаемая методика вычислений, использующая представление потенциала взаимодействия фермионов в виде (4), является инструментом, позволяющим оценить релятивистские вклады

высоких, чем k^2/m^2 слагаемых. Расчеты показывают что, такие поправки лежат в пределах чувствительности современных экспериментов по измерению энергетических характеристик таких систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского Фонда Фундаментальных Исследований (г. Минск, Беларусь).

Литература

1. Eides, M.I. Theory of light hydrogenlike atoms / M.I. Eides, H. Grotch, V.A. Shelyuto // Phys. Rept. – 2001. – Vol. 342. – P. 63–261.
2. Андреев, В.В. Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевыми потенциалами / В.В. Андреев. – Гомель: УО «Гомельский государственный университет им.Ф. Скорины», 2008. – 294 с.
3. Андреев, В.В. Вычисление ядра уравнения релятивистской двухфермионной системы / В.В. Андреев // Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 88–95.
4. Review of Particle Physics / W.-M. Yao [et al.] // Journal of Physics G. – 2006. – Vol. 33. – P. 1.
5. High-precision determination of the electric and magnetic form factors of the proton / J. Bernauer [et al.] // Phys.Rev.Lett. – 2010. – Vol. 105. – P. 242001.
6. Kelly, J.J. Simple parametrization of nucleon form factors / J.J. Kelly // Phys. Rev. – 2004. – Vol. C70. – P. 068202.
7. Electromagnetic form factors of the nucleon: New fit and analysis of uncertainties / W. Alberico, S. Bilenky, C. Giunti, K. Graczyk // Phys.Rev. – 2009. – Vol. C79. – P. 065204.
8. The size of the proton / R. Pohl [et al.] // Nature. – 2010. – Vol. 466. – P. 231–216.

В.В. Андреев^{1,2}, А.Ф. Крутов²

¹УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

²Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара, Россия

УГЛЫ СМЕШИВАНИЯ ИЗ РАСПАДОВ ВЕКТОРНЫХ МЕЗОНОВ

Введение

Значения углов смешивания $\phi-\omega$ и $\eta-\eta'$ обсуждались много раз за последние пятьдесят лет. Интерес к такой тематике связан с нарушением