

6. Шамына, А.А. Генерация суммарной частоты от тонкого цилиндрического слоя / А.А. Шамына, В.Н. Капшай // Оптика и спектроскопия. – 2018. – Т. 124, № 1. – С. 105–121.

**А.А. Шамына**

УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

**ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В ТОНКОМ ОПТИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ СЛОЕ, НАНЕСЁННОМ НА ПОВЕРХНОСТЬ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ, ИМЕЮЩЕЙ ФОРМУ ВЫТЯНУТОГО ЭЛЛИпсоИДА ВРАЩЕНИЯ, ПРИ ЕЁ ОБЛУЧЕНИИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ**

**Введение**

Нелинейная генерация оптического излучения поверхностным слоем малой частицы вызывает особый интерес, так как она может быть использована для исследования свойств поверхностей таких частиц [1] и свойств адсорбированных молекул (ориентации, тензора гиперполяризуемости, динамических свойств). Возможность этого явления обусловлена избирательностью нелинейных эффектов: генерация излучения кратных частот, обусловленная нелинейными эффектами чётного порядка, в диэлектриках может происходить только на двумерных объектах, таких как поверхности частиц, тонкие плёнки, границы раздела сред – их структуре не свойственна центральная симметрия, и часто они анизотропны.

Так как частицы строго симметричной формы не всегда можно получить практически, и в некоторых случаях под влиянием внешних воздействий форма частицы может меняться, то возникает необходимость изучения генерации второй гармоники (ГВГ) в поверхностном слое частиц, форма которых сложнее сферической. В нашей работе рассмотрена ГВГ в тонком оптически нелинейном слое на поверхности частицы, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения.

**1. Постановка задачи**

Введём декартову  $(x, y, z)$  и сферическую  $(r, \theta, \varphi)$  системы координат, у которых начала отсчёта и оси  $Oz$  совпадают. Пусть  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  – базисные векторы декартовой системы координат,

а  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  – базисные векторы сферической системы координат. Не нарушая общности, расположим диэлектрическую частицу в форме вытянутого эллипсоида вращения таким образом, чтобы её геометрический центр совпадал с началом координат, а её ось симметрии была совмещена с осью  $Oz$ .

Зададим уравнение падающей на частицу плоской эллиптически поляризованной электромагнитной волны в комплексном виде следующей формулой:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = E_0 \mathbf{e}^{(\omega)} \exp(i\mathbf{k}^{(\omega)} \mathbf{x} - i\omega t), \quad (1)$$

где  $E_0$  – комплексная амплитуда падающей волны,  $\mathbf{e}^{(\omega)}$  – единичный вектор поляризации,  $\mathbf{k}^{(\omega)}$  – волновой вектор,  $\omega$  – циклическая частота (далее в тексте временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  опускается). Здесь и далее символ  $i$  вне индексов означает мнимую единицу.

Пусть толщина тонкого слоя, локализованного на поверхности частицы и обладающего нелинейными оптическими свойствами, равна  $d_0$ . Условие малости толщины запишем в виде  $d_0 \ll a_x, d_0 \ll a_z$ , где  $a_x$  и  $a_z$  – соответственно длина малой и большой полуосей эллипсоида вращения, совпадающего по форме с поверхностью частицы (рисунок 1).

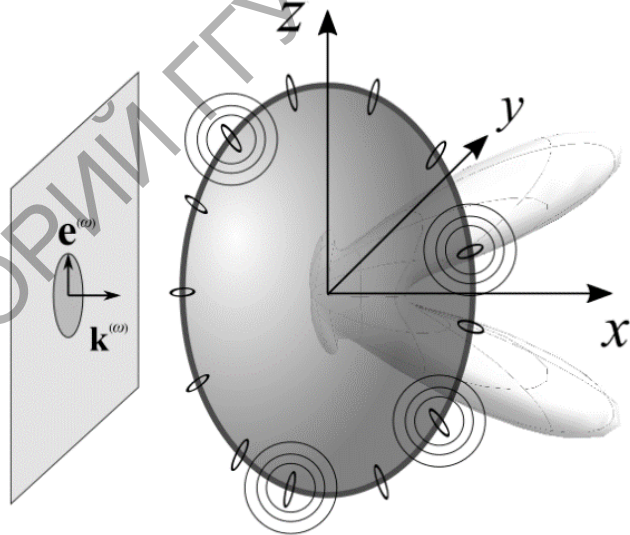


Рисунок 1 – Геометрическая схема задачи о генерации второй гармоники в тонком оптически нелинейном слое на поверхности частицы, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения

Найдём пространственное распределение поля второй гармоники в дальней зоне и выявим его характерные особенности.

## 2. Решение

В дипольной модели ГВГ принято, что этот эффект обусловлен нелинейной частью поляризации, задаваемой вектором  $\mathbf{P}^{(2)}$  [1], компоненты которого можно найти по формуле (с использованием правила суммирования по повторяющимся индексам)

$$P_i^{(2)} = \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k, \quad (2)$$

где  $E_j$  – компоненты вектора электрической напряжённости падающей волны, а  $\chi_{ijk}^{(2)}$  – тензор нелинейной диэлектрической восприимчивости:

$$\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_1^{(2)} n_i n_j n_k + \chi_2^{(2)} n_i \delta_{jk} + \chi_3^{(2)} (n_j \delta_{ki} + n_k \delta_{ij}) + \chi_4^{(2)} n_m (n_k \varepsilon_{ijm} - n_j \varepsilon_{imk}). \quad (3)$$

Здесь  $n_i$  – компоненты вектора нормали к элементу поверхности,  $\delta_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ijk}$  – дельта-символ Кронекера и символ Леви-Чивита соответственно,  $\chi_{1-4}^{(2)}$  – коэффициенты анизотропии, характеризующие анизотропные оптические свойства нелинейного слоя [1, 3]. Количество независимых элементов тензора  $\chi_{ijk}^{(2)}$  меньше числа, которым определяется количество независимых элементов тензора  $\chi_{ijk}^{(2)}$ , характерное для среды, в которой возможна генерация суммарной частоты [4], – из-за необходимости наличия симметрии по отношению к перестановке последних двух индексов. Выражение (2) является правильным только в приближении Рэлея – Ганса – Дебая, когда влиянием рассеянных электромагнитных волн в решаемой задаче можно пренебречь. Это приближение можно использовать, если числовые значения показателей преломления частицы и окружающей её среды близки.

Напряжённость поля второй гармоники и модуль вектора Умова – Пойнтинга в дальней зоне, в соответствии с [1], можно найти по формулам

$$\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = (1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2 \exp(ik_{2\omega} r)}{c^2 r} \int_V \exp(-i\mathbf{k}^{(2\omega)} \mathbf{x}') \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (4)$$

$$S_r^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = \frac{c}{8\pi} \frac{n_{2\omega}}{\mu_{2\omega}} |\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x})|^2, \quad (5)$$

где интегрирование ведётся по всему объёму  $V$  нелинейного слоя,  $\mu_{2\omega}$ ,  $n_{2\omega}$  – соответственно магнитная проницаемость и показатель преломления окружающей частицу среды по отношению к излучению частоты  $2\omega$ ,  $\mathbf{k}^{(2\omega)} = k^{(2\omega)} \mathbf{e}_r$  – волновой вектор генерируемой волны, а  $k^{(2\omega)}$  – его модуль,  $r = |\mathbf{x}|$  – расстояние от центра частицы до точки

наблюдения; символом  $\otimes$  обозначена операция тензорного произведения.

Подставляя (1)–(3) в (4), можно получить следующую формулу для составляющих вектора напряжённости генерируемого поля:

$$E_i^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = \mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} \frac{\exp(ik_{2\omega}r)}{r} d_0 (\delta_{im} - e_{r,i} e_{r,m}) e_j^{(\omega)} e_k^{(\omega)} \int_S \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}') \chi_{ijk}^{(2)}(\mathbf{x}') dS, \quad (6)$$

где интегрирование ведётся по площади поверхности эллипсоида вращения, а  $\mathbf{q} = 2\mathbf{k}^{(\omega)} - \mathbf{k}^{(2\omega)}$  – вектор рассеяния.

Записывая подробнее интеграл по площади, содержащийся в (6), можно разделить интегрирование по углам  $\theta$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} I(n_i) &= \frac{1}{a_x} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(iq_x a_x \sin \theta \cos \varphi + iq_y a_x \sin \theta \sin \varphi + iq_z a_z \cos \theta) \times \\ &\times \sin \theta \sqrt{a_z^2 \sin^2 \theta + a_x^2 \cos^2 \theta} n_i(\theta, \varphi) d\varphi d\theta, \\ I(n_i n_j) &= \frac{1}{a_x} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(iq_x a_x \sin \theta \cos \varphi + iq_y a_x \sin \theta \sin \varphi + iq_z a_z \cos \theta) \times \\ &\times \sin \theta \sqrt{a_z^2 \sin^2 \theta + a_x^2 \cos^2 \theta} n_i(\theta, \varphi) n_j(\theta, \varphi) d\varphi d\theta, \\ I(n_i n_j n_k) &= \frac{1}{a_x} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(iq_x a_x \sin \theta \cos \varphi + iq_y a_x \sin \theta \sin \varphi + iq_z a_z \cos \theta) \times \\ &\times \sin \theta \sqrt{a_z^2 \sin^2 \theta + a_x^2 \cos^2 \theta} n_i(\theta, \varphi) n_j(\theta, \varphi) n_k(\theta, \varphi) d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (7)$$

где индексы  $i, j, k$  могут принимать значения  $x, y, z$ ;  $q_i$  – компоненты вектора рассеяния  $\mathbf{q}$ . Компоненты вектора  $\mathbf{n}$  можно выделить из формулы для вектора нормали:

$$\mathbf{n}(\theta, \varphi) = \frac{a_z \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + a_z \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + a_x \cos \theta \mathbf{e}_z}{\sqrt{a_z^2 \sin^2 \theta + a_x^2 \cos^2 \theta}}. \quad (8)$$

Явный вид интегралов (7) можно выразить через функцию

$$\begin{aligned} M_{s,c,q}(z_1, z_2, \rho) &= \frac{z_2^{2\{q/2\}}}{z_1^{q/2+\{q/2\}}} \frac{4\pi i^{2\{q/2\}}}{i^c \rho^{s+c+q-1}} \times \\ &\times \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{s/2} \sum_{k=0}^{s/2-m} \sum_{l=0}^{2m+c} \frac{(-1)^{k+l+g} (q + 2\{q/2\} + 2n + 2g + 2k - 1)!!}{(2g + 2\{q/2\})!} \times \\ &\times (q/2 + \{q/2\} + n + g + k)_l \binom{-(c+q-1)/2 - s/2}{n} \binom{s/2}{m, k, s/2 - m - k} \times \\ &\times \binom{2m+c}{l} \left( \frac{1}{\rho^2} - 1 \right)^n j_{q/2+\{q/2\}+n+g+k}^{(2m+c-l)}(z_1) z_1^{-(n+g+k+l)} z_2^{2g}. \end{aligned} \quad (9)$$

где  $j_m^{(p)}(z)$  –  $p$ -ая производная от сферической функции Бесселя  $m$ -го порядка,  $\binom{n}{k}$  – символ Похгаммера; конструкциями  $\binom{n}{k}$  и  $\binom{n}{k_1, k_2, k_3}$  обозначены биномиальный и мультиномиальный коэффициенты;  $\{n\}$  – дробная часть числа  $n$ . Ряды в (9) сходятся только при  $\rho^2 > 1/2$ .

Тогда явный вид интегралов (7) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 I\left(\binom{n_z}{z}\right) &= M_{0,0,m}(q_x a_x, q_z a_z, \rho), & m = 1, 2, 3; \\
 I\left(\binom{n_z}{z} n_i\right) &= \rho M_{0,1,m}(q_x a_x, q_z a_z, \rho) v_i, & m = 0, 1, 2; \quad i = x, y; \\
 I\left(\binom{n_z}{z} n_i n_j\right) &= \rho^2 \left( (M_{0,2,m}(q_x a_x, q_z a_z, \rho) - M_{2,0,m}(q_x a_x, q_z a_z, \rho)) v_i v_j \right) + \\
 &+ \rho^2 M_{2,0,m}(q_x a_x, q_z a_z, \rho) \delta_{ij}, & m = 0, 1; \quad i, j = x, y; \\
 I(n_i n_j n_k) &= \rho^3 \left( (M_{0,3,0}(q_x a_x, q_z a_z, \rho) - 3M_{2,1,0}(q_x a_x, q_z a_z, \rho)) v_i v_j v_k \right) + \\
 &+ \rho^3 M_{2,1,0}(q_x a_x, q_z a_z, \rho) (v_i \delta_{jk} + v_j \delta_{ki} + v_k \delta_{ij}), & i, j, k = x, y,
 \end{aligned} \tag{10}$$

где  $v_i$  – компоненты единичного вектора, параллельного вектору рассеяния ( $\mathbf{v} = \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$ ),  $\rho = a_z/a_x$  – отношение длин большой и малой полуосей эллипсоида.

Учитывая явный вид интегралов (10), можно записать выражение для вектора электрической напряжённости поля второй гармоники:

$$E_i^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = \mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2 \exp(ik_{2\omega} r)}{c^2 r} d_0 a_x^2 (\delta_{im} - e_{r,i} e_{r,m}) e_j^{(\omega)} e_k^{(\omega)} X_{ijk}^{(2\omega)}, \tag{11}$$

где  $X_{ijk}^{(2\omega)}$  – тензор эффективной нелинейной диэлектрической восприимчивости [1-6], который можно найти по формуле

$$\begin{aligned}
 X_{ijk}^{(2\omega)} &= \chi_1^{(2)} I(n_i n_j n_k) + \chi_2^{(2)} I(n_i) \delta_{jk} + \chi_3^{(2)} (I(n_j) \delta_{ki} + I(n_k) \delta_{ij}) \\
 &+ \chi_4^{(2)} (I(n_m n_k) \varepsilon_{ijm} - I(n_m n_j) \varepsilon_{imk}).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Вектор, компоненты которого равны  $e_j^{(\omega)} e_k^{(\omega)} X_{ijk}^{(2\omega)}$ , характеризует пространственное распределение поля второй гармоники в дальней зоне.

### Заключение

В тензорном виде получена формула для расчёта в дальней зоне составляющих электрической напряжённости поля второй гармоники, генерируемого в тонком оптически нелинейном слое на поверхности

частицы, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения. На основе этой формулы для генерируемого излучения могут быть найдены плотность мощности, степень поляризации, ориентация эллипса поляризации.

Результаты, полученные в статье, могут быть полезны при постановке эксперимента с регистрацией излучения второй гармоники, генерируемого в тонком оптически нелинейном слое на поверхности деформированных сферических частиц, а также при решении задач о генерации суммарной частоты и о генерации второй гармоники-суммарной частоты в тонком оптически нелинейном слое на поверхности частицы, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант по проекту Ф18М-026).

### Литература

1. Viarbitskaya, S. Size dependence of second-harmonic generation at the surface of microspheres / S. Viarbitskaya, V. Kapshai, P. van der Meulen, and T. Hansson // *Phys. Rev. A.* – 2010. – № 81. – P. 053850.

2. Капшай, В.Н. Генерация второй гармоники от тонкого сферического слоя и условия отсутствия генерации / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // *Оптика и спектроскопия.* – 2017. – Т. 123, № 3. – С. 416–429.

3. Толкачѳв, А.И. Генерация второй гармоники от тонкого сферического слоя при наличии двух источников / А.И. Толкачѳв, В.Н. Капшай // *Актуальные вопросы физики и техники: материалы VII Респ. научной конф. студентов, магистрантов и аспирантов.* – 2018. – Ч. 1. – С. 287–290.

4. Шамына, А.А. Генерация суммарной частоты от тонкого цилиндрического слоя / А.А. Шамына, В.Н. Капшай // *Оптика и спектроскопия.* – 2018. – Т. 124, № 1. – С. 105–121.

5. Капшай, В.Н. Генерация суммарной частоты от тонкого сферического слоя. I. Аналитическое решение / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // *Оптика и спектроскопия.* – 2018. – Т. 124, № 6. – С. 795–803.

6. Шамына, А.А. Генерация суммарной частоты от тонкого сферического слоя. II. Анализ решения / А.А. Шамына, В.Н. Капшай // *Оптика и спектроскопия.* – 2018. – Т. 125, № 1. – С. 74–81.