

Лекция 1. Системы множеств

Пусть X — произвольное множество, $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств X .

Определение. $K \subset \mathcal{P}(X)$ называется *кольцом*, если

- 1) $K \neq \emptyset$
- 2) $\forall A, B \in K \quad A \cup B \in K, \quad A \setminus B \in K$

Замечание вместо пары $(\cup, \setminus)$ можно использовать $(\cup, \Delta)$ или $(\setminus, \Delta)$.

Пример 1. $K = \{\emptyset\}$ — кольцо, $K = \mathcal{P}(X)$ — кольцо.

Утверждение. Если K — кольцо и A, B — его элементы, то $A \cap B \in K$
 $\square A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B) = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \in K \square$

Определение. Для $A \subset \mathcal{P}(X)$ наименьшее из колец, содержащих A , называется *кольцом, порождённым A* и обозначается $K(A)$. $K(A)$ содержится в любом кольце, содержащем A .

Утверждение. Кольцо, порождённое системой A , существует и единственно.

$\square K(A) = \bigcap_{\alpha} K_{\alpha} \quad (K_{\alpha} \supset A)$. $K(A)$ содержится в любом кольце $K(A) \neq \emptyset$,
 $\emptyset \in K_{\alpha}, \quad \emptyset \in K(A), \quad A, B \in K(A), \quad A, B \in K_{\alpha}, \quad \forall \alpha \Rightarrow A \cup B \in K_{\alpha} \quad A \cup B \in \bigcap_{\alpha} K_{\alpha} = K(A)$ т.к.

, (для $\setminus$ аналогично). По определению $K(A)$ является кольцом. $\square$

Определение. $S \in \mathcal{P}(X)$ называется *полукольцом*, если

- 1) $\emptyset \in S$
- 2) $\forall A, B \in S \quad A \cap B \in S$
- 3) $\forall A, B \in S \quad A \subset B \Rightarrow B \setminus A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, где $A_i \in S$ и $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
запись $A \cup B$ означает $A \cup B$, где $A \cap B = \emptyset$.

Пример 2. $\forall K$ — кольца, $\emptyset \in K$, т.к. $\forall A \in K \quad \emptyset = A \setminus A$

Пример 3. $S = \{[a; b) \mid a \leq b\} \quad a, b \in \mathbb{R}$ — полукольцо, $[a; a) = \emptyset$, а свойства 2, 3 очевидны.

Пример

$S = \{[a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n) \mid a_i \leq b_i \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$

Т.1.1 Пусть S — полукольцо, $K(S)$ — кольцо, порождённое S .
 $K(S) = \{\prod_{i=1}^n A_i \mid n \in \mathbb{N}, \quad \forall A_i \in S\}$

Принадлежность объединения очевидна. Для доказательства условия 2 кольца докажем лемму:

Л.1 Если S — полукольцо, $A \in S, \quad B = \prod_{i=1}^n B_i$, то $A \setminus B = \prod_{i=1}^p A_i$, где $\forall A_i \in S$

$\square$ Воспользуемся индукцией по n :

- 1) $n = 1, B = B_1, A \setminus B = A \setminus B_1 = A \setminus (A \cap B_1)$ — выполняется.
- 2)

$$n = k - 1 \quad B = \coprod_{i=1}^k B_i, \quad A \setminus \coprod_{i=1}^k B_i = (A \setminus \coprod_{i=1}^{k-1} B_i) \setminus B_k =$$

[по свойству 3 полукольца] $= (\coprod_{i=1}^p A_i) \setminus B_k = \coprod_{i=1}^p (A_i \setminus B_k) = \coprod_{i=1}^p A_i \setminus (A_i \cap B_k) = \coprod_{i=1}^p (\coprod_{j=1}^{n(A_i)} A_{ij})$

$$m_i = \sum_{i=1}^p n(A_i) \quad \square \text{ (леммы)}$$

$\square$ (теоремы): Докажем, что $K(S)$ — кольцо. $K(S) \neq \emptyset$, т.к. $\emptyset \in S \Rightarrow \emptyset \in K(S)$.

Пусть $A, B \in K(S)$, $A = \coprod_{k=1}^n A_k$, $B = \coprod_{k=1}^m B_k$, $\forall A_i, B_i \in S$

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B = \left(\coprod_{k=1}^n A_k \setminus B \right) \cup B = \left(\coprod_{k=1}^n (A_k \setminus B) \right) \cup B$$

$$= \coprod_{k=1, \overline{n}} \coprod_{j=1, \overline{p}} A_{kj} \setminus \left(\coprod_{k=1}^m B_k \right) \in K(S)$$

$A \setminus B = \coprod_{k=1}^n A_k \setminus \coprod_{k=1}^m B_k = \coprod_{k=1}^n \coprod_{j=1}^p A_{kj} \in S$. Итак, $K(S)$ — кольцо. $\square$

Определение. Кольцо K называется σ -кольцом, если $\forall A_1, \dots, A_n, \dots \in K \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in K$

Определение. Кольцо K называется δ -кольцом, если $\forall A_1, \dots, A_n, \dots \in K \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in K$

Определение. Пусть $A \subset \mathcal{P}(X)$. Наименьшее σ -кольцо, содержащее A , называется σ -кольцом, порождённым A . Аналогично определяется δ -кольцо, порождённое A .

Определение. Кольцо $K \subset \mathcal{P}(X)$ называется алгеброй, если $X \in K$.

Определение. Система подмножеств $R \subset \mathcal{P}(x)$ называется σ -алгеброй, если:

- 1) R — алгебра.
- 2) R — σ -кольцо.

Определение. Система подмножеств $R \subset \mathcal{P}(x)$ называется δ -алгеброй, если:

- 1) R — алгебра.
- 2) R — δ -кольцо.

Пример 5. $\mathcal{P}(X)$ является σ -алгеброй и δ -алгеброй.

Всякая δ -алгебра является σ -алгеброй.

Пример 6. Рассмотрим τ — систему интервалов прямой и их счётных объединений (естественная топология на прямой). σ -кольцо, порождённое τ называют σ -алгеброй борелевских множеств и обозначают $\mathcal{B}(\tau)$.