МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв

GENERALIZING POLIADIC OPERATIONS

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

Для любых целых $l \geq 2$, $k \geq 2$, подмножества T симметрической группы $\mathbf{S}_k$ и полугруппы A на декартовом произведении $T \times A^k$ определяется l-арная операция $[\ ]_{l,\,T,\,k}$. Эта l-арная операция является аналогом полиадической операции Э. Поста, которую он определил на множестве полиадических подстановок. В работе изучаются свойства операции $[\ ]_{l,\,T,\,k}$.

***Ключевые слова**: операция, полугруппа, группа, l-арная полугруппа, l-арная группа, косой элемент, идемпотент.*

For any integers $l \geq 2$, $k \geq 2$, of a subset T of the symmetric group $\mathbf{S}_k$ and semi-group A on the Cartesian product $T \times A^k$ an l-ary operation $[\ ]_{l,\,T,\,k}$ is determined. This l-ary operation is similar to the Post poliadic operations, which he defined on the set of poliadic permulations. In the paper the properties of the operation$[\ ]_{l,\,T,\,k}$ are studied.

***Keywords**: operation, semigroup, group, l-ary semigroup, l-ary group, skew element, idempotent.*

Введение

Основным объектом изучения в данной работе является l-арная операция $[\ ]_{l,\,T,\,k}$, которая определяется для любых целых $l \geq 2$, $k \geq 2$ на подмножестве $T \times A^k$ декартова произведения

$$\mathbf{S}_k \times A^k = \mathbf{S}_k \times \underbrace{A \ldots A}_{k} =$$

$$= \{(\sigma, \mathbf{a}) = (\sigma, (a_1, \ldots, a_k)) \mid \sigma \in \mathbf{S}_k, a_1, \ldots, a_k \in A\},$$

где $\mathbf{S}_k$ – симметрическая группа всех подстановок множества $\{1, \ldots, k\}$, A – произвольная полугруппа. Если $T = \{\sigma\}$, $\sigma^l = \sigma$, то, как будет показано в заключительном разделе работы, операцию $[\ ]_{l,\,\{\sigma\},\,k}$ можно отождествить с определенной на декартовой степени A^k l-арной операцией $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, которая была определена в [1] и подробно изучена в [2]. Указанное отождествление позволяет рассматривать операцию $[\ ]_{l,\,T,\,k}$ как обобщение операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$. В свою очередь, если $l = k + 1$, $\sigma = (12\ldots k)$, $A = \mathbf{S}_M$ – симметрическая группа всех биекций множества M, то $k + 1$-арная операция $[\ ]_{k+1,\,(12\ldots k),\,k}$ совпадает с полиадической операцией, которую Э. Пост определил в [3] на множестве $\mathbf{S}_M^{\,k}$. Таким образом, l-арная операция $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, а значит и l-арная операция $[\ ]_{l,\,T,\,k}$, являются обобщениями отмеченной выше полиадической операции Э. Поста.

Мы предполагаем известными определения n-арной полугруппы, n-арной группы, единицы n-арной полугруппы, косого элемента n-арной группы, абелевой n-арной операции. В случае необходимости можно обратиться к [3], [4] или к главе 1 книги [2]. В работе символом $\mathbf{A}_k$ обозначается знакопеременная группа всех четных подстановок из $\mathbf{S}_k$, а символом $\mathbf{T}_k$ – множество всех нечетных подстановок из $\mathbf{S}_k$.

© Гальмак А.М., 2013

1 Операция $[\ ]_{m,\,\mathbf{S}_k,\,k}$

Для любого целого $m \geq 2$ и любой полугруппы A определим на множестве $\mathbf{S}_k \times A^k$ m-арную операцию $[\ ]_{m,\,\mathbf{S}_k,\,k}$ следующим образом: для любых

$$(\sigma_i, \mathbf{a}_i) = (\sigma_i, (a_{i1}, \ldots, a_{ik})) \in \mathbf{S}_k \times A^k, \qquad (1.1)$$

где $i = 1, \ldots, m$, положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1)(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \ldots (\sigma_m, \mathbf{a}_m)]_{m,\,\mathbf{S}_k,\,k} =$$

$$= (\sigma, (b_1, \ldots, b_k)) = (\sigma, \mathbf{b}), \qquad (1.2)$$

где

$$\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_m, \qquad (1.3)$$

$$b_j = a_{1j}\, a_{2\sigma_1(j)}\, a_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \ldots a_{m\sigma_1\ldots\sigma_{m-1}(j)} \qquad (1.4)$$

для любого $j = 1, \ldots, k$.

В (1.3) и далее полагаем

$$\sigma_s(\ldots\sigma_2(\sigma_1(j))\ldots) = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_s(j).$$

Заметим, что в определении операции $[\ ]_{m,\,\mathbf{S}_k,\,k}$ подстановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ не обязательно все различные.

В определении операции $[\ ]_{m,\,\mathbf{S}_k,\,k}$ можно считать $m = 1$. В этом случае имеем один набор

$$(\sigma_1, \mathbf{a}_1) = (\sigma_1, (a_{11}, \ldots a_{1k})),$$

а также $\sigma = \sigma_1$, $b_j = a_{1j}$, $(\sigma, \mathbf{b}) = (\sigma_1, \mathbf{a}_1)$.

Таким образом, $[(\sigma_1, \mathbf{a}_1)]_{1,\,\mathbf{S}_k,\,k} = (\sigma_1, \mathbf{a}_1)$.

***Предложение* 1.1.** Для всех i и l, таких, что $1 \leq i + 1 \leq i + l \leq m$, и любых

$$\mathbf{u}_1 = (\sigma_1, \mathbf{a}_i), \ldots, \mathbf{u}_m = (\sigma_m, \mathbf{a}_m) \in \mathbf{S}_k \times A^k$$

имеет место равенство

$$[\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_m]_{m,\,\mathbf{S}_k,\,k} =$$

$$= [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_i[\mathbf{u}_{i+1} \ldots \mathbf{u}_{i+l}]_{m,\,\mathbf{S}_k,\,k}\, \mathbf{u}_{i+l+1} \ldots \mathbf{u}_m]_{m-l+1,\,\mathbf{S}_k,\,k}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Доказательство. Положим

$$\mathbf{u}_i = (\sigma_i, \mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik})),\ i = 1, \ldots, m,$$

$$[\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_m]_{m, \mathbf{S}_k, k} = (\alpha, (b_1, \ldots, b_k)) = \mathbf{p},$$

$$[\mathbf{u}_{i+1} \ldots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, \mathbf{S}_k, k} = (\beta, (c_1, \ldots, c_k)) = \mathbf{q},$$

$$[\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_i[\mathbf{u}_{i+1} \ldots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, \mathbf{S}_k, k}\, \mathbf{u}_{i+l+1} \ldots \mathbf{u}_m]_{m-l+1, \mathbf{S}_k, k} =$$

$$= (\gamma, (d_1, \ldots, d_k)) = \mathbf{r}.$$

Так как

$$\alpha = \sigma_1 \ldots \sigma_m,\ \beta = \sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l},$$

$$\gamma = \sigma_1 \ldots \sigma_i \beta \sigma_{i+l+1} \ldots \sigma_m =$$

$$= \sigma_1 \ldots \sigma_i(\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l})\sigma_{i+l+1} \ldots \sigma_m = \sigma_1 \ldots \sigma_m,$$

то

$$\alpha = \gamma. \tag{1.5}$$

Ясно, что

$$b_j = a_{1j}\, a_{2\sigma_1(j)} a_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \cdots a_{m\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}(j)}, \tag{1.6}$$

$$c_t = a_{(i+1)t}\, a_{(i+2)\sigma_{i+1}(t)} a_{(i+3)\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}(t)} \cdots a_{(i+l)\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l-1}(t)} \tag{1.7}$$

для любого $t = 1, \ldots, k$.

Полагая в (1.7) $t = \sigma_1 \ldots \sigma_i(j)$ и учитывая равенство $\beta = \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{i+l}$, получим

$$d_j = a_{1j}\, a_{2\sigma_1(j)} a_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \ldots a_{i\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1}(j)} c_{\sigma_1 \ldots \sigma_i(j)}$$

$$a_{(i+l+1)\sigma_1 \ldots \sigma_i\beta(j)} \cdots a_{m\sigma_1 \ldots \sigma_i\beta\sigma_{i+l+1} \ldots \sigma_{m-1}(j)} =$$

$$= a_{1j}\, a_{2\sigma_1(j)} a_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \ldots a_{i\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1}(j)}\ a_{(i+1)\sigma_1 \ldots \sigma_i(j)}$$

$$a_{(i+2)\sigma_{i+1}(\sigma_1 \ldots \sigma_i(j))} \cdots a_{(i+l)\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l-1}(\sigma_1 \ldots \sigma_i(j))}$$

$$a_{(i+l+1)\sigma_1 \ldots \sigma_i\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l}(j)} \cdots a_{m\sigma_1 \ldots \sigma_i\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l}\sigma_{i+l+1} \ldots \sigma_{m-1}(j)} =$$

$$= a_{ij}\, a_{2\sigma_1(j)} a_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \ldots a_{i\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1}(j)}\ a_{(i+1)\sigma_1 \ldots \sigma_i(j)}$$

$$a_{(i+2)\sigma_i \ldots \sigma_i\sigma_{i+1}(j)} \cdots a_{(i+l)\sigma_1 \ldots \sigma_i\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l-1}(j)}$$

$$a_{(i+l+1)\sigma_1 \ldots \sigma_{i+l}(j)} \cdots a_{m\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}(j)} =$$

$$= a_{1j}\, a_{2\sigma_1(j)} a_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \ldots a_{m\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}(j)},$$

то есть

$$d_j = a_{1j}\, a_{2\sigma_1(j)} a_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \ldots a_{m\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}(j)} \tag{1.8}$$

для любого $j = 1, \ldots, k$.

Из (1.5), (1.6) и (1.8) вытекает $\mathbf{p} = \mathbf{r}$. Следовательно, равенство из формулировки предложения верно. Предложение доказано.

***Теорема* 1.1.** Для любого $l \geq 2$ операция $[\,]_{l, S_k, k}$ ассоциативна, то есть универсальная алгебра $< \mathbf{S}_k \times A^k, [\,]_{l, \mathbf{S}_k, k} >$ является l-арной полугруппой.

Доказательство. Полагая в предложении 1.1

$$m = 2l - 1,\ i = 0, 1, \ldots, l - 1,$$

получим

$$[\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_{2l-1}]_{2l-1, \mathbf{S}_k, k} =$$

$$= [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_i[\mathbf{u}_{i+1} \ldots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, \mathbf{S}_k, k}\, \mathbf{u}_{i+l+1} \ldots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, \mathbf{S}_k, k},$$

для любых $\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_{2l-1} \in \mathbf{S}_k \times A^k$, то есть

$$[[\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_l]_{l, \mathbf{S}_k, k}\, \mathbf{u}_{l+1} \ldots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, \mathbf{S}_k, k} =$$

$$= [\mathbf{u}_1[\mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_{l+1}]_{l, \mathbf{S}_k, k}\, \mathbf{u}_{l+2} \ldots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, \mathbf{S}_k, k} = \ldots$$

$$\ldots = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_{l-1}[\mathbf{u}_l \ldots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, \mathbf{S}_k, k}]_{l, \mathbf{S}_k, k}.$$

Следовательно, $< \mathbf{S}_k \times A^k, [\,]_{l, \mathbf{S}_k, k} >$ l-арная полугруппа. Теорема доказана.

2 Операция $[\,]_{l, T, k}$

Определим на множестве $\mathbf{S}_k$ l-арную операцию

$$(\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_l)_l = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_l,$$

которая, как не сложно заметить, является ассоциативной. Другими словами, $< \mathbf{S}_k, (\,)_l >$ – l-арная полугруппа. Более того, $< \mathbf{S}_k, (\,)_l >$ – l-арная группа, производная от симметрической группы $\mathbf{S}_k$.

Ясно, что если $T \subseteq \mathbf{S}_k$, то $T \times A^k \subseteq \mathbf{S}_k \times A^k$, где

$$T \times A^k = \{(\sigma, \mathbf{a}) =$$

$$= (\sigma, (a_1, \ldots, a_k)) \mid \sigma \in T, a_1, \ldots, a_k \in A\}.$$

***Предложение* 2.1.** *Если подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_k$ замкнуто относительно l-арной операции $(\,)_l$, то множество $T \times A^k$ замкнуто относительно l-арной операции $[\,]_{l, \mathbf{S}_k, k}$, то есть $< T \times A^k, [\,]_{l, \mathbf{S}_k, k} >$ – l-арная подполугруппа l-арной полугруппы $< \mathbf{S}_k \times A^k, [\,]_{l, \mathbf{S}_k, k} >$.*

Доказательство. Если

$$(\sigma_i, \mathbf{a}_i) \in T \times A^k,\ i = 1, \ldots, l,$$

то из (1.2)–(1.4) и замкнутости T относительно l-арной операции $(\,)_l$ вытекает

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \ldots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{S}_k, k} \in T \times A^k.$$

Ассоциативность операции $[\,]_{l, S_k, k}$ доказана в теореме 1.1. Предложение доказано.

Так как $\mathbf{S}_k$ – конечное множество, то любое подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_k$, замкнутое относительно l-арной операции $(\,)_l$, является l-арной подгруппой l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\,)_l >$. В частности, в группе $\mathbf{S}_k$ любая её подполугруппа является подгруппой.

***Замечание* 2.1.** Если T – подгруппа группы $\mathbf{S}_k$, то множество T замкнуто относительно l-арной операции $(\,)_l$, то есть $< T, (\,)_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\,)_l >$.

Из предложения 2.1, ввиду замечания 2.1, вытекает

***Следствие* 2.1.** *Если T – подгруппа группы $\mathbf{S}_k$, то множество $T \times A^k$ замкнуто относительно l-арной операции $[\,]_{l, \mathbf{S}_k, k}$, то есть $< T \times A^k, [\,]_{l, \mathbf{S}_k, k} >$ – l-арная подполугруппа l-арной полугруппы $< \mathbf{S}_k \times A^k, [\,]_{l, \mathbf{S}_k, k} >$.*

Для фиксированного $l \geq 2$ и фиксированного подмножества $T \subseteq \mathbf{S}_k$ определим на $\mathbf{S}_k \times A^k$ частичную l-арную операцию $[\,]_{l, T, k}$ следующим образом: для любых l элементов вида (1.1) положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1)(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, T, k} =$$

$$= [(\sigma_1, \mathbf{a}_1)(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{S}_k, k},$$

если $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l \in T$; если же по крайней мере

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

одна из подстановок $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l$ не принадлежит T, то элемент

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1)(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l,\,T,\,k}$$

считается неопределенным.

Ясно, что при $T = \mathbf{S}_k$ операция $[\ ]_{l,\,T,\,k}$ определена на всем множестве $\mathbf{S}_k \times A^k$ и совпадает с операцией $[\ ]_{l,\,\mathbf{S}_k,\,k}$.

Если $\sigma_1, \ldots, \sigma_l \in T$, то, согласно определению операции $[\ ]_{l,\,T,\,k}$,

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1)(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l,\,T,\,k} = \\ = (\sigma, (b_1, \ldots, b_k)) = (\sigma, \mathbf{b}),$$

где σ и b_j определяются с помощью (1.3) и (1.4) соответственно.

***Замечание* 2.2.** Если подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_k$ замкнуто относительно l-арной операции $(\ )_l$, то, согласно определению операции $[\ ]_{l,\,T,\,k}$, она определена для любых l элементов множества $T \times A^k$, а её результат принадлежит этому же множеству. Поэтому в этом случае операции $[]_{l,\mathbf{S}_k,\,k}$ и $[\ ]_{l,\,T,\,k}$ определены на всем указанном множестве и совпадают на нём.

В связи с этим предложение 2.1 и следствие 2.1 позволяют обобщить теорему 1.1.

***Теорема* 2.1.** *Если подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_k$ замкнуто относительно l-арной операции $(\ )_l$, в частности, T – подгруппа группы $\mathbf{S}_k$, то $< T \times A^k, [\ ]_{l,\,T,\,k} >$ – l-арная полугруппа.*

***Замечание* 2.3.** l-Арную полугруппу $< T \times A^k, [\ ]_{l,\,T,\,k} >$ из теоремы 2.1 можно рассматривать как l-арную подполугруппу l-арной полугруппы $< T \times A^k, []_{l,\,\mathbf{S}_k,\,k} >$, так как, согласно замечанию 2.2, операции $[]_{l,\,\mathbf{S}_k,\,k}$ и $[\ ]_{l,\,T,\,k}$ на множестве $T \times A^k$ совпадают.

Полагая в теореме 2.1 $T = \mathbf{A}_k$, получим

Следствие 2.2. *Для любого $l \geq 2$ универсальная алгебра $< \mathbf{A}_k \times A^k, []_{l,\,\mathbf{A}_k,\,k} >$ является l-арной полугруппой.*

Следствие 2.3. *Для любого нечетного $l \geq 3$ универсальная алгебра $< \mathbf{T}_k \times A^k, []_{l,\,\mathbf{T}_k,\,k} >$ является l-арной полугруппой. В частности, $< \mathbf{T}_k \times A^k, []_{3,\,\mathbf{T}_k,\,k} >$ – тернарная полугруппа.*

3 *l-Арная группа* $< \mathbf{S}_k \times A^k, [\ ]_{l,\,\mathbf{S}_k,\,k} >$

***Теорема* 3.1.** *Пусть A – группа, $< T, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\ )_l >$. Тогда $< T \times A^k, [\ ]_{l,\,T,\,k} >$ – l-арная группа. В частности, $< \mathbf{S}_k \times A^k, []_{l,\mathbf{S}_k,\,k} >$ – l-арная группа.*

Доказательство. Согласно теореме 2.1, $< T \times A^k, [\ ]_{l,\,T,\,k} >$ – l-арная полугруппа. Осталось доказать разрешимость в $T \times A^k$ уравнений

$$[\mathbf{x}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,T,\,k} = \mathbf{a},\ [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{y}]_{l,\,T,\,k} = \mathbf{a}, \qquad (3.1)$$

где

$$\mathbf{a}_i = (\sigma_i, a_i) = (\sigma_i, (a_{i1}, \ldots, a_{ik})) \in T \times A^k,\ i = 1, \ldots, l,$$

$$\mathbf{a} = (\sigma, \mathbf{b}) = (\sigma, (b_1, \ldots, b_k)) \in T \times A^k.$$

В *l-арной группе* $< T, (\ )_l >$ существуют такие $\delta, \rho \in T$, что

$$(\delta\sigma_2 \ldots \sigma_l)_l = \sigma,\ (\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}\rho)_l = \sigma. \qquad (3.2)$$

Для любого $j = 1, \ldots, k$ положим

$$u_j = b_j\, a^{-1}_{l\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j)} \ldots a^{-1}_{3\delta\sigma_2(j)} a^{-1}_{2\delta(j)} \qquad (3.3)$$

и покажем, что

$$\mathbf{u} = (\delta, (u_1, \ldots, u_k)) \in T \times A^k$$

является решением первого уравнения (3.1). Для этого положим

$$[\mathbf{u}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,T,\,k} = (\mu, (d_1, \ldots, d_k)). \qquad (3.4)$$

Согласно замечанию 2.2, операции $[\ ]_{l,\,\mathbf{S}_k,\,k}$ и $[\ ]_{l,\,T,\,k}$ на множестве $T \times A^k$ совпадают. Поэтому

$$[\mathbf{u}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,T,\,k} = [\mathbf{u}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\mathbf{S}_k,\,k},$$

то есть

$$[\mathbf{u}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\mathbf{S}_k,\,k} = (\mu, (d_1, \ldots, d_k)).$$

Согласно определению операции $[\ ]_{l,\mathbf{S}_k,\,k}$ и ввиду первого равенства из (3.2), а также равенства (3.3), имеем

$$\mu = \delta\sigma_2 \ldots \sigma_l = \sigma,$$

$$d_j = u_j a_{2\delta(j)}\, a_{3\delta\sigma_2(j)} \ldots a_{l\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j)} = \\ = b_j a^{-1}_{l\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j)} \ldots a^{-1}_{3\delta\sigma_2(j)} a^{-1}_{2\delta(j)}$$

$$a_{2\delta(j)} a_{3\delta\sigma_2(j) \ldots} a_{l\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j)} = b_j,\ j = 1, \ldots, k.$$

Следовательно,

$$(\mu, (d_1, \ldots, d_k)) = (\sigma, (b_1, \ldots, b_k)) = \mathbf{a},$$

откуда и из (3.4) вытекает

$$[\mathbf{u}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,T,\,k} = \mathbf{a},$$

то есть первое уравнение из (3.1) разрешимо в $T \times A^k$.

Для любого $s = 1, \ldots, k$ положим

$$v_{\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(s)} = \\ = a^{-1}_{(l-1)\sigma_1 \cdots \sigma_{l-2}(s)}\, a^{-1}_{(l-2)\sigma_1 \cdots \sigma_{l-3}(s) \ldots}\, a^{-1}_{2\sigma_1(s)} a^{-1}_{1s} b_s. \qquad (3.5)$$

Так как A – группа, $\rho \in T$, то

$$\mathbf{v} = \{\rho, (v_1, \ldots, v_k)) \in T \times A^k.$$

Покажем, что $\mathbf{v}$ является решением второго уравнения из (3.1). Для этого положим

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{v}]_{l,\,T,\,k} = (\eta, (c_1, \ldots, c_k)). \qquad (3.6)$$

Снова, используя совпадение операций $[\ ]_{l,\,\mathbf{S}_k,\,k}$ и $[\ ]_{l,\,T,\,k}$ на множестве $T \times A^k$, получим

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{v}]_{l,\,\mathbf{S}_k,\,k} = (\eta, (c_1, \ldots, c_k)).$$

Согласно определению операции $[\ ]_{l,\,\mathbf{S}_k,\,k}$ и ввиду второго равенства из (3.2), а также равенства (3.5), имеем

$$\eta = \sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}\rho = \sigma,$$

$$c_s = a_{1s} a_{2\sigma_1(s)} \ldots a_{(l-1)\sigma_1 \ldots \sigma_{l-2}(s)} v_{\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(s)} = \\ = a_{1s} a_{2\sigma_1(s)} \ldots a_{(l-1)\sigma_1 \ldots \sigma_{l-2}(s)}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$a^{-1}_{(l-1)\sigma_1\ldots\sigma_{l-2}(s)}\ldots a^{-1}_{2\sigma_1(s)}a^{-1}_{1s}b_s = b_s$$

для любого s = 1, …, k. Следовательно,

$$(\eta, (c_1, \ldots, c_k)) = (\sigma, (b_1, \ldots, b_k)) = \mathbf{a},$$

откуда и из (3.6) вытекает

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{v}]_{l,\,T,\,k} = \mathbf{a},$$

то есть второе уравнение из (3.1) также разрешимо в $T \times A^k$. Таким образом, доказано, что $< T \times A^k, [\ ]_{l,\,T,\,k} >$ – l-арная группа.

Полагая $T = \mathbf{S}_k$, получим утверждение теоремы для множества $\mathbf{S}_k \times A^k$. Теорема доказана.

***Замечание* 3.1.** Ввиду замечания 2.2, l-арную группу $< T \times A^k, [\ ]_{l,\,T,\,k} >$ из теоремы 3.1 можно рассматривать как l-арную подгруппу l-арной группы $< T \times A^k, [\ ]_{l,\,\mathbf{S}_k,\,k} >$. В дальнейшем мы не будем оговаривать эту ситуацию для различных конкретных множеств T.

***Следствие* 3.1.** *Если A – группа, T – подгруппа группы $\mathbf{S}_k$, то $< T \times A^k, [\ ]_{l,\,T,\,k} >$ – l-арная группа.*

Полагая в следствии 3.1 $T = \mathbf{A}_k$, получим

Следствие 3.2. *Если A – группа, то для любого $l \geq 2$ универсальная алгебра $< \mathbf{A}_k \times A^k, [\ ]_{l,\,\mathbf{A}_k,\,k} >$ является l-арной группой.*

***Следствие* 3.3.** *Для любой группы A и любого нечетного $l \geq 3$ универсальная алгебра $< \mathbf{T}_k \times A^k, [\ ]_{l,\,\mathbf{T}_k,\,k} >$ является l-арной группой. В частности, $< \mathbf{T}_k \times A^k, [\ ]_{3,\,\mathbf{T}_k,\,k} >$ – тернарная группа.*

В следующем предложении указывается явный вид косых элементов в l-арной группе $< T \times A^k, [\ ]_{l,\,T,\,k} >$.

***Предложение* 3.1.** *Пусть A – группа, $< T, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\ )_l >$. Тогда для любого элемента*

$$(\sigma, \mathbf{a}) = (\sigma, (a_1, \ldots, a_k)) \in T \times A^k$$

элемент

$$(\gamma, \mathbf{b}) = (\gamma, (b_1, \ldots, b_k)), \tag{3.7}$$

где

$$\gamma = \sigma^{2-l},\ b_j = a^{-1}_{\sigma^{-1}(j)}a^{-1}_{\sigma^{-2}(j)}\ldots a^{-1}_{\sigma^{-(l-2)}(j)} \tag{3.8}$$

для любого $j = 1, \ldots, k$, является косым элементом в l-арной группе $< T \times A^k, [\ ]_{l,\,T,\,k} >$.

Доказательство. Так как $\gamma = \sigma^{2-l}$, то

$$(\gamma\underbrace{\sigma\ldots\sigma}_{l-1})_l = \sigma^{2-l}\sigma^{l-1} = \sigma \in T,$$

то есть $(\gamma\underbrace{\sigma\ldots\sigma}_{l-1})_l = \sigma \in T$. А так как $< T, (\ )_l >$ – l-арная группа, то $\gamma = \overline{\sigma} \in T$. Ясно, что $(\gamma, \mathbf{b}) \in T \times A^k$.

Согласно теореме 3.1, $< T \times A^k, [\ ]_{l,\,T,\,k} >$ – l-арная группа. Применяя определение операции $[\ ]_{l,\,T_k,\,k}$, будет иметь

$$[\underbrace{(\sigma, \mathbf{a})\ldots(\sigma, \mathbf{a})}_{l-1}(\gamma, \mathbf{b})]_{l,\,T,\,k} = (\delta, (c_1, \ldots, c_k)), \tag{3.9}$$

где

$$\delta = \sigma^{l-1}\gamma = \sigma^{l-1}\sigma^{2-l} = \sigma,$$

$$c_j = a_ja_{\sigma(j)}\ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}b_{\sigma^{l-1}(j)} =$$

$$= a_ja_{\sigma(j)}\ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}a^{-1}_{\sigma^{-1}(\sigma^{l-1}(j))}$$

$$a^{-1}_{\sigma^{-2}(\sigma^{l-1}(j))}\ldots a^{-1}_{\sigma^{-l+2}(\sigma^{l-1}(j))} =$$

$$= a_ja_{\sigma(j)}\ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}a^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)}a^{-1}_{\sigma^{l-3}(j)}\ldots a^{-1}_{\sigma(j)} = a_j.$$

Таким образом, $\delta = \sigma$, $c_1 = a_1, \ldots, c_k = a_k$, а равенство (3.9) принимает вид

$$[\underbrace{(\sigma, \mathbf{a})\ldots(\sigma, \mathbf{a})}_{l-1}(\gamma, \mathbf{b})]_{l,\,T,\,k} = (\sigma, \mathbf{a}).$$

Следовательно, элемент (3.7) с компонентами (3.8) является косым элементом для элемента $(\sigma, \mathbf{a})$. Предложение доказано.

***Замечание* 3.2.** Косой элемент для элемента $(\sigma, \mathbf{a})$ из предложения 3.1 может быть записан в следующем виде

$$\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\overline{\sigma}, (b_1, \ldots, b_k)),$$

где $\overline{\sigma}$ – косой элемент для элемента σ в l-арной группе $< T, (\ )_l >$, а компоненты $b_1, \ldots, b_k$ определяются, как в (3.8).

4 Перестановочность элементов в $< \mathbf{S}_k \times A^k, [\ ]_{l,\,\mathbf{S}_k,\,k} >$

***Теорема* 4.1.** *Пусть l-арная подгруппа $< T, (\ )_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\ )_l >$ содержит нетождественную подстановку σ, полугруппа A содержит единицу 1 и элемент a, отличный от 1. Тогда l-арная полугруппа $< T \times A^k, [\ ]_{l,\,T,\,k} >$ не является абелевой.*

Доказательство. Так как σ не является тождественной подстановкой, то существует $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ с условием $\sigma(j) \neq j$. Положим

$$(\sigma, \mathbf{a}) = (\sigma, (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j})) =$$

$$= (\sigma, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_k)),$$

$$(\sigma, \mathbf{e}) = (\sigma, (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k})),$$

$$[(\sigma, \mathbf{a})\underbrace{(\sigma, \mathbf{e}), \ldots, (\sigma, \mathbf{e})}_{l-1}]_{l,\,T,\,k} = (\sigma^l, (y_1, \ldots, y_k)),$$

$$[(\sigma, \mathbf{e})(\sigma, \mathbf{a})\underbrace{(\sigma, \mathbf{e}), \ldots, (\sigma, \mathbf{e})}_{l-2}]_{l,\,T,\,k} =$$

$$= (\sigma^l, (z_1, \ldots, z_k)).$$

Тогда, согласно определению операции $[\ ]_{l,\,T,\,k}$,

$$y_j = a_j\underbrace{1\ldots1}_{l-1} = a_j = a,$$

то есть $y_j = a$. Согласно тому же определению,

$$z_j = 1a_{\sigma(j)}\underbrace{1\ldots1}_{l-2} = a_{\sigma(j)},$$

откуда, ввиду $\sigma(j) \neq j$, следует $z_j = 1 \neq a_j = a$. А так как $y_j = a$, $z_j = 1$, a $\neq 1$, то $y_j \neq z_j$, откуда

$$[(\sigma, \mathbf{a})\underbrace{(\sigma, \mathbf{e}), \ldots, (\sigma, \mathbf{e})}_{l-1}]_{l,\,T,\,k} \neq$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\neq [(\sigma, \mathbf{e})(\sigma, \mathbf{a})\underbrace{(\sigma, \mathbf{e}), \ldots, (\sigma, \mathbf{e})}_{l-2}]_{l,\,T,\,k}.$$

Следовательно, l-арная полугруппа $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$ неабелева. Теорема доказана.

***Замечание* 4.1.** Если $T = \{\sigma\}$, где σ – тождественная подстановка, то l-арная полугруппа $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$ может быть абелевой. Для этого достаточно абелевости полугруппы A.

Так как при $k \geq 2$ группа $\mathbf{S}_k$ содержит нетождественную подстановку, то из теоремы 4.1 вытекает

***Следствие* 4.1.** *Если полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то для любого $k \geq 2$ l-арная полугруппа $< \mathbf{S}_k \times A^k, [\ ]_{l, \mathbf{S}_k, k} >$ не является абелевой.*

Так как при $k \geq 3$ группа $\mathbf{A}_k$ содержит нетождественную подстановку, то из теоремы 4.1 вытекает

***Следствие* 4.2.** *Если полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то для любого $k \geq 3$ l-арная полугруппа $< \mathbf{A}_k \times A^k, [\,]_{l, \mathbf{A}_k, k} >$ не является абелевой.*

***Следствие* 4.3.** *Если полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то для любых $k \geq 2$ и нечетного $l \geq 3$ l-арная полугруппа $< \mathbf{T}_k \times A^k, [\,]_{l, \mathbf{T}_k, k} >$ не является абелевой. В частности, тернарная полугруппа $< \mathbf{T}_k \times A^k, [\,]_{3, \mathbf{T}_k, k} >$ не является абелевой.*

Из теоремы 4.1 извлекается

***Теорема* 4.2.** *Пусть l-арная подгруппа $< T, (\ )_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\ )_l >$ содержит нетождественную подстановку, группа A содержит более одного элемента. Тогда l-арная группа $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$ не является абелевой.*

***Следствие* 4.4.** *Если группа A содержит более одного элемента, то для любого $k \geq 2$ l-арная группа $< \mathbf{S}_k \times A^k, [\,]_{l, \mathbf{S}_k, k} >$ не является абелевой.*

***Следствие* 4.5.** *Если группа A содержит более одного элемента, то для любого $k \geq 3$ l-арная группа $< \mathbf{A}_k \times A^k, [\,]_{l, \mathbf{A}_k, k} >$ не является абелевой.*

***Следствие* 4.6.** *Если группа A содержит более одного элемента, то для любых $k \geq 2$ и нечетного $l \geq 3$ l-арная группа $< \mathbf{T}_k \times A^k, [\,]_{l, \mathbf{T}_k, k} >$ не является абелевой.*

5 Идемпотенты в $< \mathbf{S}_k \times A^k, [\ ]_{l, S_k, k} >$

***Лемма* 5.1.** *Пусть $< T, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\ )_l >$, A – полугруппа. Если $(\varepsilon, \mathbf{e})$ – единица l-арной полугруппы $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$,* то *$\varepsilon$ – единица в $< T, (\ )_l >$.*

Доказательство. Так как $(\varepsilon, \mathbf{e})$ – *единица в* $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$, то

$$[\underbrace{(\varepsilon, \mathbf{e}), \ldots, (\varepsilon, \mathbf{e})}_{i-1}(\sigma, \mathbf{a})\underbrace{(\varepsilon, \mathbf{e}), \ldots, (\varepsilon, \mathbf{e})}_{l-i}]_{l,\,T,\,k} = (\sigma, \mathbf{a})$$

для любого $(\sigma, \mathbf{a}) \in T \times A^k$ и любого $i = 1, \ldots, l$, откуда, ввиду определения операции $[\ ]_{l, T, k}$, следует

$$(\underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{i-1}\sigma\underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{l-i})_l = \sigma$$

для любого $\sigma \in T$. Следовательно, ε – *единица в* $< T, (\ )_l >$. Лемма доказана.

***Следствие* 5.1.** *Если в l-арной подгруппе $< T, (\ )_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\ )_l >$ нет единиц, то в l-арной полугруппе $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$ также нет единиц.*

***Лемма* 5.2.** *Пусть $< T, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\ )_l >$, полугруппа (группа) A содержит более одного элемента. Тогда для любой нетождественной подстановки $\sigma \in T$ и любого $\mathbf{a} \in A^k$ элемент $(\sigma, \mathbf{a}) \in T \times A^k$ не является единицей в l-арной полугруппе (l-арной группе) $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$.*

Доказательство. По условию $\sigma(j) \neq j$ для некоторого индекса $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Предположим, что $(\sigma, \mathbf{a} = (e_1, \ldots, e_k))$ – единица в $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$, и пусть a – произвольный элемент из A. Тогда

$$[(\sigma, (e_1, \ldots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \ldots, e_k))\underbrace{(\sigma, \mathbf{a})\ldots(\sigma, \mathbf{a})}_{l-1}]_{l,\,T,\,k} =$$

$$= (\sigma, (e_1, \ldots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \ldots, e_k)). \quad (5.1)$$

Обозначив левую часть в (5.1) через $(\rho, (u_1, \ldots, u_k))$ и используя определение l-арной операции $[\ ]_{l, T, k}$, а также лемму 5.1, получим

$$\rho = \sigma^l = \sigma,\ u_j = ae_{\sigma(j)}e_{\sigma^2(j)} \ldots e_{\sigma^{l-1}(j)}.$$

А так как, ввиду (5.1), $u_j = a$, то

$$a = ae_{\sigma(j)}e_{\sigma^2(j)} \ldots e_{\sigma^{l-1}(j)}.$$

В частности, если $a = e_j$, то

$$e_j = e_j e_{\sigma(j)}e_{\sigma^2(j)} \ldots e_{\sigma^{l-1}(j)}. \quad (5.2)$$

Так как по предположению $(\sigma, \mathbf{a} = (e_1, \ldots, e_k))$ – единица в $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$, то

$$[(\sigma, \mathbf{a})(\sigma, (e_1, \ldots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \ldots, e_k))\underbrace{(\sigma, \mathbf{a})\ldots(\sigma, \mathbf{a})}_{l-2}]_{l,\,T,\,k} =$$

$$= (\sigma, (e_1, \ldots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \ldots, e_k)). \quad (5.3)$$

Положив

$$(e_1, \ldots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \ldots, e_k) = (b_1, \ldots, b_k),$$

обозначим левую часть в (5.3) через $(\delta, (v_1, \ldots, v_k))$ и, используя определение l-арной операции $[\ ]_{l, T, k}$, а также лемму 5.1, получим

$$\delta = \sigma^l = \sigma,\ v_j = e_j b_{\sigma(j)}e_{\sigma^2(j)} \ldots e_{\sigma^{l-1}(j)}.$$

А так как, ввиду (5.3), $v_j = a$, то

$$a = e_j b_{\sigma(j)}e_{\sigma^2(j)} \ldots e_{\sigma^{l-1}(j)}.$$

Так как при $t \neq j$ верно $b_t = e_t$, то для $\sigma(j) \neq j$ имеем $b_{\sigma(j)} = e_{\sigma(j)}$. Поэтому

$$a = e_j e_{\sigma(j)}e_{\sigma^2(j)} \ldots e_{\sigma^{l-1}(j)}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Из последнего равенства и из (5.2) следует $a = e_j$ для любого a из A, что невозможно, так как в A имеются элементы, отличные от e_j. Лемма доказана.

Непосредственным следствием леммы 5.2 является следующая

***Теорема* 5.1**. *Пусть l-арная подгруппа $< T, (\ )_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\ )_l >$ не содержит тождественную подстановку, полугруппа (группа) A содержит более одного элемента. Тогда в l-арной полугруппе (l-арной группе) $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$ нет единиц.*

***Следствие* 5.2**. *Если полугруппа (группа) A содержит более одного элемента, то для любых $k \geq 2$ и нечетного $l \geq 3$ в l-арной полугруппе (l-арной группе) $< \mathbf{T}_k \times A^k, [\ ]_{l, \mathbf{T}_k, k} >$ нет единиц. В частности, в тернарной полугруппе (тернарной группе) $< \mathbf{T}_k \times A^k, [\ ]_{3, \mathbf{T}_k, k} >$ нет единиц.*

Из леммы 5.2 вытекает

***Следствие* 5.3**. *Пусть $< T, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\ )_l >$, полугруппа A содержит более одного элемента. Если $(\sigma, \mathbf{a})$ – единица в l-арной полугруппе $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$, то σ – тождественная подстановка.*

Возникает естественный вопрос: *существуют ли l-арные полугруппы вида $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$, обладающие единицами*?

Если существует положительный ответ на этот вопрос, то ввиду теоремы 5.1, множество T должно содержать тождественную подстановку.

***Предложение* 5.1**. *Пусть l-арная подгруппа $< T, (\ )_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\ )_l >$ содержит тождественную подстановку ε, полугруппа A содержит единицу 1. Тогда элемент*

$$(\varepsilon, \mathbf{1}) = (\varepsilon, (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}))$$

является единицей в l-арной полугруппе $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$.

Доказательство. Для любого

$$(\sigma, \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)) \in T \times A^k$$

и любого $i = 1, \ldots, l$ имеем

$$[\underbrace{(\varepsilon, \mathbf{1}), \ldots, (\varepsilon, \mathbf{1})}_{i-1}(\sigma, (a_1, \ldots, a_k))$$

$$\underbrace{(\varepsilon, \mathbf{1}), \ldots, (\varepsilon, \mathbf{1})}_{l-i}]_{l, T, k} =$$

$$= (\varepsilon^{i-1}\sigma\varepsilon^{l-i}, (\underbrace{1 \ldots 1}_{i-1}\, a_{\varepsilon^{i-1}(1)}\, \underbrace{1 \ldots 1}_{l-i}, \ldots$$

$$\ldots, \underbrace{1 \ldots 1}_{i-1}\, a_{\varepsilon^{i-1}(k)}\, \underbrace{1 \ldots 1}_{l-i})) =$$

$$= (\sigma, (a_1, \ldots, a_k)) = (\sigma, \mathbf{a}),$$

то есть

$$[\underbrace{(\varepsilon, \mathbf{1}), \ldots, (\varepsilon, \mathbf{1})}_{i-1}(\sigma, \mathbf{a})\underbrace{(\varepsilon, \mathbf{1}), \ldots, (\varepsilon, \mathbf{1})}_{l-i}]_{l, T, k} = (\sigma, \mathbf{a}).$$

Следовательно, $(\varepsilon, \mathbf{1})$ – единица в $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$. Предложение доказано.

Следующий вопрос: *существуют ли в $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$ единицы, отличные от* $(\varepsilon, \mathbf{1})$?

***Предложение* 5.2**. *Пусть l-арная подгруппа $< T, (\ )_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\ )_l >$ содержит тождественную подстановку ε, в центре группы A имеется элемент u, порядок которого делит $l - 1$. Тогда элемент*

$$(\varepsilon, \mathbf{u}) = (\varepsilon, (\underbrace{u, \ldots, u}_{k}))$$

является единицей в l-арной группе $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$.

Доказательство. Для любого

$$(\sigma, \mathbf{a}) = (\sigma, (a_1, \ldots, a_k)) \in T \times A^k$$

и любого $i = 1, \ldots, l$ имеем

$$[\underbrace{(\varepsilon, \mathbf{u}), \ldots, (\varepsilon, \mathbf{u})}_{i-1}(\sigma, (a_1, \ldots, a_k))$$

$$\underbrace{(\varepsilon, \mathbf{u}), \ldots, (\varepsilon, \mathbf{u})}_{l-i}]_{l, T, k} =$$

$$= (\varepsilon^{i-1}\sigma\varepsilon^{l-i}, (u^{i-1} a_{\varepsilon^{i-1}(1)} u^{l-i}, \ldots, u^{i-1} a_{\varepsilon^{i-1}(k)} u^{l-i})) =$$

$$= (\sigma, (a_1u^{l-1}, \ldots, a_ku^{l-1})) =$$

$$= (\sigma, (a_1, \ldots, a_k)) = (\sigma, \mathbf{a}),$$

то есть

$$[\underbrace{(\varepsilon, \mathbf{u}), \ldots, (\varepsilon, \mathbf{u})}_{i-1}(\sigma, \mathbf{a})\underbrace{(\varepsilon, \mathbf{u}), \ldots, (\varepsilon, \mathbf{u})}_{l-i}]_{l, T, k} = (\sigma, \mathbf{a}).$$

Следовательно, $(\varepsilon, \mathbf{u})$ – единица в $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$. Предложение доказано.

***Следствие* 5.4**. *Пусть l-арная подгруппа $< T, (\ )_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\ )_l >$ содержит тождественную подстановку ε, период абелевой группы A делит $l - 1$. Тогда для любого $u \in A$ элемент $(\varepsilon, \mathbf{u}) = (\varepsilon, (\underbrace{u, \ldots, u}_{k}))$ является единицей в l-арной группе $< T \times A^k, [\ ]_{l, T, k} >$.*

6 Операция $[\ ]_{l, \{\sigma\}, k}$

Если для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ выполняется условие $\sigma^l = \sigma$, то $< \{\sigma\}, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\ )_l >$. Поэтому, полагая в теореме 2.1 $T = \{\sigma\}$, получим следующий результат.

***Теорема* 6.1.** *Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< \{\sigma\} \times A^k, [\ ]_{l, \{\sigma\}, k} >$ – l-арная полугруппа.*

***Следствие* 6.1.** *Если σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, то $< \{\sigma\} \times A^k, [\ ]_{k+1, \{\sigma\}, k} >$ – $(k + 1)$-арная полугруппа.*

Полагая в следствии 6.1 $\sigma = (12 \ldots k)$, получим

***Следствие* 6.2.** *Универсальная алгебра* $< \{(12 \ldots k)\} \times A^k, [\ ]_{k+1, \{(12 \ldots k)\}, k} >$ является *$(k + 1)$-арной полугруппой.*

Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\gamma = \sigma^{2-l} = \sigma$. Поэтому, полагая в теореме 3.1 и предложении 3.1 A – группа, $T = \{\sigma\}$, где $\sigma^l = \sigma \in \mathbf{S}_k$, получим следующий результат

***Теорема* 6.2** . *Если A – группа, $\sigma^l = \sigma \in \mathbf{S}_k$, то $< \{\sigma\} \times A^k, [\ ]_{l, \{\sigma\}, k} >$ l-арная группа. Для любого*

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$(\sigma, \mathbf{a}) = (\sigma, (a_1, \ldots, a_k)) \in \{\sigma\} \times A^k$$

элемент

$$\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma, (b_1, \ldots, b_k)),$$

где

$$b_j = a^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a^{-1}_{\sigma(j)}, \ j = 1, \ldots, k,$$

является косым элементом в $< \{\sigma\} \times A^k, [\ ]_{l, \{\sigma\}, k} >$.

Следствие **6.3.** *Если A – группа, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, то $< \{\sigma\} \times A^k, [\ ]_{k+1, \{\sigma\}, k} >$ – $(k + 1)$-арная группа. Для любого*

$$(\sigma, \mathbf{a}) = (\sigma, (a_1, \ldots, a_k)) \in \{\sigma\} \times A^k$$

элемент

$$\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma, (b_1, \ldots, b_k)),$$

где

$$b_j = a^{-1}_{\sigma^{k-1}(j)} \ldots a^{-1}_{\sigma(j)}, \ j = 1, \ldots, k,$$

является косым элементом в $< \{\sigma\} \times A^k, [\ ]_{k+1, \{\sigma\}, k} >$.

Следствие **6.4.** *Если A – группа, то универсальная алгебра*

$$< \{(12 \ldots k)\} \times A^k, [\ ]_{k+1, \{(12 \ldots k)\}, k} >$$

является $(k + 1)$-*арной группой. Для любого элемента*

$$((12 \ldots k), \mathbf{a}) = ((12 \ldots k), (a_1, \ldots, a_k))$$

из $\{(12 \ldots k)\} \times A^k$ *элемент*

$$\overline{((12 \ldots k), \mathbf{a})} = ((12 \ldots k), (b_1, \ldots, b_k)),$$

где

$$b_j = a^{-1}_{j-1} \ldots a^{-1}_1 a^{-1}_k \ldots a^{-1}_{j+1}$$

для любого $j = 1, \ldots, k$, является косым элементом в $< \{(12 \ldots k)\} \times A^k, [\ ]_{k+1, \{(12 \ldots k)\}, k} >$.

Полагая в теореме 4.1 $T = \{\sigma\}$, где $\sigma^l = \sigma$, получим следующий результат.

Теорема **6.3**. *Если нетождественная подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то l-арная полугруппа $< \{\sigma\} \times A^k, [\ ]_{l, \{\sigma\}, k} >$ не является абелевой.*

Следствие **6.5.** *Если σ – цикл длины $k \geq 2$ из $\mathbf{S}_k$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то l-арная полугруппа $< \{\sigma\} \times A^k, [\ ]_{k+1, \{\sigma\}, k} >$ не является абелевой.*

Следствие **6.6.** *Если полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то l-арная полугруппа*

$$< \{(12 \ldots k)\} \times A^k, [\ ]_{k+1, \{(12 \ldots k)\}, k} >$$

не является абелевой.

Полагая в теореме 4.2 $T = \{\sigma\}$, где $\sigma^l = \sigma$, получим следующий результат.

Теорема **6.4**. *Если нетождественная подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, группа A содержит более одного элемента, то l-арная группа $< \{\sigma\} \times A^k, [\ ]_{l, \{\sigma\}, k} >$ не является абелевой.*

Следствие **6.7.** *Если σ – цикл длины $k \geq 2$ из $\mathbf{S}_k$, группа A содержит более одного элемента, то l-арная группа $< \{\sigma\} \times A^k, [\ ]_{k+1, \{\sigma\}, k} >$ не является абелевой.*

Следствие **6.8.** *Если группа A содержит более одного элемента, то l-арная группа $< \{(12 \ldots k)\} \times A^k, [\ ]_{k+1, \{(12 \ldots k)\}, k} >$ не является абелевой.*

Полагая в теореме 5.1 $T = \{\sigma\}$, где $\sigma^l = \sigma$, получим следующий результат.

Теорема **6.5**. *Если нетождественная подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, полугруппа (группа) A содержит более одного элемента, то в l-арной полугруппе (l-арной группе) $< \{\sigma\} \times A^k, [\ ]_{l, \{\sigma\}, k} >$ нет единиц.*

Следствие **6.9.** *Если σ – цикл длины $k \geq 2$ из $\mathbf{S}_k$, полугруппа (группа) A содержит более одного элемента, то в l-арной полугруппе (l-арной группе) $< \{\sigma\} \times A^k, [\ ]_{k+1, \{\sigma\}, k} >$ нет единиц.*

Следствие **6.10.** *Если полугруппа (группа) A содержит более одного элемента, то в l-арной полугруппе (l-арной группе)*

$$< \{(12 \ldots k)\} \times A^k, [\ ]_{k+1, \{(12 \ldots k)\}, k} >$$

нет единиц.

7 *Операция* $[\ ]_{l, \sigma, k}$

В [1], [2] для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и полугруппы A на декартовой степени A^k была определена l-арная операция $[\ ]_{l, \sigma, k}$ по правилу

$$[a_1 \ldots a_l]_{l, \sigma, k} =$$
$$= [(a_{11}, \ldots, a_{1k}) \ldots (a_{l1}, \ldots, a_{lk})]_{l, \sigma, k} = (b_1 \ldots b_k),$$

где

$$b_j = a_{1j} a_{2\sigma(j)} \ldots a_{l\sigma^{l-1}(j)}, \ j = 1, \ldots, k.$$

Ясно, что отображение

$$\varphi : (\sigma, (a_1, \ldots, a_k)) \to (a_1, \ldots, a_k)$$

является биекцией $\{\sigma\} \times A^k$ на A^k.

Лемма **7.1.** *Если $\sigma^l = \sigma \in \mathbf{S}_k$, то φ – изоморфизм l-арной полугруппы $< \{\sigma\} \times A^k, [\ ]_{l,\{\sigma\},k} >$ на l-арный группоид $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$.*

Доказательство. Так как

$$\varphi([(\sigma, (a_{11}, \ldots, a_{1k})) \ldots (\sigma, (a_{l1}, \ldots, a_{lk})]_{l, \{\sigma\}, k}) =$$
$$= \varphi((\sigma^l, (a_{11} a_{2\sigma(1)} \ldots$$
$$a_{l\sigma^{l-1}(1)}, \ldots, a_{1k} a_{2\sigma(k)} \ldots a_{l\sigma^{l-1}(k)})) =$$
$$= (a_{11} a_{2\sigma(1)} \ldots a_{l\sigma^{l-1}(1)}, \ldots, a_{1k} a_{2\sigma(k)} \ldots a_{l\sigma^{l-1}(k)}) =$$
$$= [(a_{11}, \ldots, a_{1k}) \ldots (a_{l1}, \ldots, a_{lk})]_{l, \sigma, k} =$$
$$= [\varphi((\sigma, (a_{11}, \ldots a_{1k}))) \ldots \varphi((\sigma, (a_{l1}, \ldots, a_{lk})))]_{l, \sigma, k},$$

то φ – искомый изоморфизм. Лемма доказана.

Лемма 7.1 позволяет использовать результаты об операции $[\ ]_{l, \sigma, k}$ из книги [2] для изучения операции $[\ ]_{l, \{\sigma\}, k}$, и наоборот, некоторые результаты из [2] могут быть получены как следствия результатов данной работы.

Теорема 3.1 и лемма 7.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема **7.2** [1], [2]. *Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ – l-арная полугруппа.*

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Теорема 4.2 и лемма 7.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

***Теорема* 7.3** [1], [2]. *Если A – группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – *l-арная группа*.

Теорема 6.3 и лемма 7.1 позволяют сформулировать

***Следствие* 7.1**. *Если нетождественная подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *полугруппа A содержит единицу и элемент*, *отличный от единицы, то l-арная полугруппа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *не является абелевой*.

***Замечание* 7.1**. Если в следствии 7.1 убрать условие $\sigma^l = \sigma$, то l-арный группоид $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ останется неабелевым [2].

Теорема 6.4 и лемма 7.1 позволяют сформулировать

***Следствие* 7.2**. *Если нетождественная подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *группа A содержит более одного элемента, то l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *не является абелевой*.

Теорема 6.5 и лемма 7.1 позволяют сформулировать

***Следствие* 7.3**. *Если нетождественная подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *полугруппа* (*группа*) *A содержит более одного элемента, то в l-арной полугруппе* (*l-арной группе*) $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *нет единиц*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак, А.М.* Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весцi НАН Беларусi. – 2008. – №3. – С. 28 – 34.
2. *Гальмак, А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. *Post, E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P. 208 – 350.
4. *Русаков, С.А.* Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

Поступила в редакцию 05.07.12.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ