Е.А. Дей

УО «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларсь

РАСЧЕТ СВОЙСТВ МЕЗОНОВ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОЛПИТЕРА

Введение

Теоретически и численно свойства мезонов как связанных состояний кварка и антикварка в настоящее время исследуются в рамках различных моделей [1–3]. Одним из наиболее эффективных является подход, основанный на применении уравнений Солпитера [3,4], получаемых выполнением операции мгновенного приближения в уравнении Бете-Солпитера. В этом случае оператор взаимодействия зависит только от трехмерных импульсов частиц $V \equiv V(\vec{p}-\vec{k})$.

В данной работе реализовано численное решение системы интегральных уравнений Солпитера для состояний кваркония с квантовыми числами 0^{-+}, 1^{+-} методом конечных элементов, причем интегралы от функций формы вычисляются аналитически.

1. Система интегральных уравнений Солпитера

Для описания кварк-антикваркового взаимодействия обычно используют суперпозицию потенциала одноглюонного обмена, запирающего потенциала, соответствующего линейному поведению в координатном представлении, и постоянной составляющей [4]

$$V(\vec{p}-\vec{k}) = \frac{4\pi\overline{\alpha}_s}{\left(\vec{p}-\vec{k}\right)^2}\gamma_\mu^{(1)}\gamma_{(2)}^{\mu} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\left(\frac{4\pi\lambda}{\left(\vec{p}-\vec{k}\right)^2+\varepsilon^2}\right) + U\,. \quad (1)$$

Здесь $\overline{\alpha}_s$ – константа одноглюонного обмена, λ – интенсивность запирающего взаимодействия, U – постоянная составляющая.

Учет квантовых чисел мезона выполняется разложением оператора взаимодействия по полной системе инвариантов алгебры Дирака и выделением в полной волновой функции скалярных амплитуд и множителей, определяющих ее трансформационные свойства. Для рассматриваемых состояний с квантовыми числами 0^{-+}, 1^{+-} соответственно в трехмерном импульсном пространстве вводятся по две скалярные функции [4]:

$$\psi(\vec{q}) = \psi_P(q)\gamma^5 + \psi_A(q)\left(\gamma^0\gamma^5 + \gamma^5\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{q}}{m}\right)Y_{00}(\vec{n}_q); \quad (2a)$$

$$\psi(\vec{q}) = \psi_P(q)\gamma^5 + \psi_A(q)\left(\gamma^0\gamma^5 + \gamma^5 \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{q}}{m}\right) Y_{1m}(\vec{n}_q). \tag{2b}$$

В каждом случае для скалярных функций в результате парциального разложения получается система интегральных уравнений с симметричными ядрами, которую можно записать в общем виде

$$\begin{cases} A_1(p)\psi_1(p) + \int\limits_0^\infty W_1(p,k)\psi_1(k)dk = M\psi_2(p); \\ A_2(p)\psi_2(p) + \int\limits_0^\infty W_2(p,k)\psi_2(k)dk = M\psi_1(p). \end{cases} \tag{3}$$

Функциональные коэффициенты системы (3) и условие нормировки волновых функций для состояния 0^{-+} имеют вид

$$A_1(p) = \frac{2\omega^2(p)}{m} + \frac{mU}{\omega(p)}\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right); \quad A_2(p) = m\left(2 + \frac{U}{\omega(p)}\right);$$

$$W_1(p,k) = \frac{mpk}{(2\pi)^3\omega(p)}\left[F_0^S(p,k) - \frac{pk}{m^2}F_1^s(p,k) + 2F_0^V(p,k)\right];$$

$$W_2(p,k) = \frac{mpk}{(2\pi)^3\omega(p)}\left[F_0^S(p,k) - 4F_0^V(p,k)\right];$$

$$\frac{8}{m}\int\limits_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} p^2\omega(p)\psi_1(p)\psi_2(p) = 2M\,. \tag{4a}$$

Коэффициенты уравнений системы (3) для состояния 1^{+-} заданы соотношениями

$$A_1(p) = \frac{2\omega^2(p)}{m} + \frac{mU}{\omega(p)}\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right); \quad A_2(p) = m\left(2 + \frac{U}{\omega(p)}\right);$$

$$W_1(p,k) = \frac{mk^2}{(2\pi)^3\omega(p)}\left[F_1^S(p,k) - \frac{pk}{3m^2}F_0^S(p,k) - \frac{2pk}{3m^2}F_2^S(p,k) + 2F_1^V(p,k)\right];$$

$$W_2(p,k) = \frac{mk^2}{(2\pi)^3\omega(p)}\left[F_1^S(p,k) - 4F_1^V(p,k)\right]; \ \frac{8}{m}\int\limits_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} p^2\omega(p)\psi_1(p)\psi_2(p) = 2M\,. \tag{4b}$$

Интегральные ядра приведенных систем уравнений содержат компоненты

$$F_L^S(p,k) = \frac{8\pi^2\lambda}{p^2k^2}Q_L'\left(\frac{p^2+k^2}{2pk}\right); \qquad F_L^V(p,k) = \frac{8\pi^2\overline{\alpha}_s}{pk}Q_L\left(\frac{p^2+k^2}{2pk}\right), \tag{5}$$

где $Q_L(z)$ − функции Лежандра второго рода, штрих означает производную по аргументу $z = (p^2+k^2)/(2pk)$.

Наличие сингулярных функций (5) в интегральных уравнениях представляет собой проблему для применения метода квадратур. В ряде работ развита технология устранения особенностей с помощью различных вычитательных процедур [5, 6], однако точность результатов при этом не может быть существенно повышена. Отметим, что более точные результаты при решении интегральных уравнений в импульсном представлении дает предложенный в работе [7] спектральный метод, использующий свойства полиномов Чебышева. Вычислительная процедура метода была существенно усовершенствована в работе [8].

2. Описание численного метода решения уравнений

В методе конечных элементов искомые функции $\psi_1(k)$, $\psi_2(k)$ выражаются через функции формы $N_i(p)$, представляющие собой полиномы выбранного порядка, для которых и реализуется интегрирование в (3):

$$\psi_1(p)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i N_i(p); \qquad \psi_2(p)=\sum_{i=1}^{n}\psi_{N+i} N_i(p), \tag{6}$$

Учтем, что в (5) функции $F_L^V(p,k)$ выражаются через функции Лежандра второго рода $Q_0(p,k)=\ln\big((p+k)/(p-k)\big)$ и имеют интегрируемую логарифмическую особенность, а функции $F_L^S(p,k)$ выражаются через первую производную функции Лежандра второго рода $Q_0'(p,k)=1/(p-k)^2$. Интегралы, содержащие такое ядро, относятся к классу гиперсингулярных и вычисляются в смысле конечной части (finite-part) по Адамару [9]

$$(H)\int_a^b \frac{F(x)}{(x-s)^2}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_a^{s-\varepsilon}\frac{F(x)}{(x-s)^2}dx+\int_{s+\varepsilon}^{b}\frac{F(x)}{(x-s)^2}dx-\frac{2F(s)}{\varepsilon}\right\}, \tag{7}$$

например:

$$\int_{k_{j-1}}^{k_j} k^2F_1^S(p_i,k)dk=\frac{8\pi^2\lambda}{p_i^2}\left\{p_i^2\left(\frac{1}{k-p_i}-\frac{1}{k+p_i}\right)+k\ln\left|\frac{k+p_i}{k-p_i}\right|\right\}\Bigg|_{k_{j-1}}^{k_j};$$

$$\int_{k_{j-1}}^{k_j} pkF_0^V(p_i,k)dk=8\pi^2\overline{\alpha}_s\left\{k\ln\left|\frac{k+p_i}{k-p_i}\right|+p_i\ln\left(k^2-p_i^2\right)\right\}\Bigg|_{k_{j-1}}^{k_j}. \tag{8}$$

Формулы (7), (8) и аналогичные им использовались в ходе численного решения уравнений (3). При этом область изменения аргументов ограничивалась достаточно большим значением $0\le p\le pmax$ и разбивалась на n равных конечных элементов. В соответствии с методом коллокаций, в каждом узле невязка точного и численного решения системы уравнений (3) должна обращаться в ноль. При использовании кусочно-постоянных конечных элементов в качестве узлов коллокации использовались центральные точки. С учетом выражений (6) при этом получаем стандартную задачу на собственные значения M квадратной симметричной матрицы, действующей на объединенный вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2) = (\psi_{1,1}, ..., \psi_{1,N}, \psi_{2,1}, ..., \psi_{2,N})$. Для расчета элементов матрицы использовались программные блоки, составленные в системе Mathcad. Собственные значения и собственные векторы вычислялись с помощью встроенных функций.

3. Результаты вычислений

Таблица 1 – Спектр масс состояний кваркония

$J^{PC}\left({}^{2S+1}L_J\right)$	Параметры расчета	Полученные результаты	Результаты [3]	Эксперимент
$c\bar{c}$ $0^{-+}\left({}^1S_0\right)$ 1	m_c =1,616 $\bar{\alpha}_s$=0,3 λ=0,2 U=-0,534	2 980,8	2 980,3	2 983,6
$c\bar{c}$ $0^{-+}\left({}^1S_0\right)$ 2		3 582,4	3 576,4	3 639,4
$c\bar{c}$ $0^{-+}\left({}^1S_0\right)$ 3		3 976,2	3 948,8	
$c\bar{c}$ $0^{-+}\left({}^1S_0\right)$ 4		4 284,8		
$c\bar{c}$ $1^{+-}\left({}^1P_1\right)$ 1	m_c =1,616 $\bar{\alpha}_s$=0,3 λ=0,2 U=0,2	3 525,2	3 526,0	3 525,38
$c\bar{c}$ $1^{+-}\left({}^1P_1\right)$ 2		3 938,1	3 943,0	
$c\bar{c}$ $1^{+-}\left({}^1P_1\right)$ 3		4 265,0	4 242,4	
$c\bar{c}$ $1^{+-}\left({}^1P_1\right)$ 4		4 538,8		
$b\bar{b}$ $0^{-+}\left({}^1S_0\right)$ 1	m_b =4,96 $\bar{\alpha}_s$=0,23 λ=0,28 U=-0,794	9 390,2	9 390,2	9 388,9
$b\bar{b}$ $0^{-+}\left({}^1S_0\right)$ 2		9 940,1	9 950,0	
$b\bar{b}$ $0^{-+}\left({}^1S_0\right)$ 3		10 325,7	10 311,4	
$b\bar{b}$ $0^{-+}\left({}^1S_0\right)$ 4		10 645,1		
$b\bar{b}$ $1^{+-}\left({}^1P_1\right)$ 1	m_b=4,96 $\bar{\alpha}_s$=0,23 λ=0,28 U=-0,576	9 900,0	9 900,2	
$b\bar{b}$ $1^{+-}\left({}^1P_1\right)$ 2		10 233,7	10 280,4	
$b\bar{b}$ $1^{+-}\left({}^1P_1\right)$ 3		10 509,7	10 562,0	
$b\bar{b}$ $1^{+-}\left({}^1P_1\right)$ 4		10 751,4		

В настоящее время известно одно состояние системы $c\bar{c}$ с квантовым числами 1^{+-} − мезон h_c. Параметры расчета подбирались по экспериментальной массе состояния 1S M_{h_c} = 3525,38 МэВ [10]. Вычисленные значения массы последующих состояний $c\bar{c}$ и результаты расчетов массы $b\bar{b}$-системы при *pmax* = 8, *n* = 200 приведены в таблице 1. Для сравнения в таблице приведены и результаты вычислений из работы [3], в которой использована иная параметризация взаимодействия. В целом можно отметить хорошее согласие полученных результатов с имеющимися данными.

Заключение

Таким образом, метод коллокации по системе конечных элементов с аналитическим вычислением интегралов от функций формы является удобным инструментом для численного решения системы интегральных уравнений Солпитера.

Дальнейшее повышение точности численных результатов может быть достигнуто как использованием конечных элементов высших порядков, так и применением эрмитовых конечных элементов, обеспечивающих непрерывность не только волновой функции, но и ее первых производных.

Литература

1. Yang, J.H. Analysis of X Particle Spectra in Quarkonium Model / J.H. Yang, S.K. Lee, E.-J. Kim, J.B Choi // arXiv:1506.04481v1 [hep-ph] 15 Jun 2015.

2. Ebert, D. Spectroscopy and Regge trajectories of heavy quarkonia and B_c mesons / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // Eur. Phys. J. C. – 2011. – Vol. 71. – P. 1825.

3. Chang, C.-H. Spectrum for Heavy Quankonia and Mixture of the Relevant Wave Functions within the Framework of Bethe-Salpeter Equation / C.-H. Chang, G.-L. Wang // Science China. Physics, Mechanics, Astronomy. – 2010. – Vol. 53. – № 11. – P. 2005–2018.

4. Linde, J. Charmonium in the instantaneous approximation / J. Linde, H. Snellman // Nuclear Physics. – 1977. – Vol. A 619. – P. 346.

5. Tang, A. Nystrom plus Correction Method for Solving Bound State Equations in Momentum Space / A. Tang, J.W. Norbury // Pys. Rev. E. − 2001. − Vol. 63. − P. 066703.

6. Chen, J.-K. Extended Simpson’s rule for the screened Cornell potential in momentum space / J.-K. Chen // Pys. Rev. D. – 2012. – Vol. 86. – P. 036013.

7. Deloff, A. Quarkonium bound-state problem in momentum space revisited / A. Deloff // Annals of Physics. – 2007. – Vol. 322. – P. 2315–2326.

8. Андреев, В.В. Квантовые и релятивистские эффекты для двухчастичных систем с корнельским потенциалом / В.В. Андреев, К.С. Бабич // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. − № 3(8). − С. 7–14.

9. Wu, J. The superconvergence of the composite midpoint rule for the finite-part integral / J. Wu, Z. Dai, X. Zhang // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2010. – Vol. 233. – P. 1954–1968.

10. Particle Data Group / K.A. Olive [et al.] // Chinese Phys. C. – 2014. – Vol. 38. – 090001.