Я.Н. Русановская[1], Г.Ю. Тюменков[1], Д.А. Штромберг[2]

[1]УО «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь
[2]ГУО «Гомельский городской лицей №1», Гомель, Беларусь

МОДЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ПЛАНЕТ ЗЕМНОЙ ГРУППЫ

Введение

До настоящего времени проблема внутреннего строения звезд и планет является достоверно нерешенной и, следовательно, крайне актуальной [1–3]. Существеннейшую роль в её решении играет функция плотности, которая для планет земной группы в хорошем приближении может считаться радиально-симметричной $\rho(r)$, потому что наибольшее полярное сжатие характерное для Марса составляет всего лишь 0,00589. Эта функция определяет массу планеты, в этом случае задаваемую интегралом:

$$M_R = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr, \tag{1}$$

так же, она фигурирует в уравнении равновесия:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G \rho(r)$$

и в ряде других важных уравнений теории внутреннего строения. Поэтому моделирование функции плотности $\rho(r)$ является важной задачей в рамках указанной проблематики.

Данная работа является прямым продолжением работы [4], в котором реализуется усовершенствование ранее предложенных модельных функций плотности в рамках частичного или полного удовлетворения условию выгнутости

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} < 0, \tag{2}$$

следующему из уравнения Адамса-Вильямсона [2, 3], и для чего предложено использовать простую параболическую добавку. Нормировки новых функций плотности остаются прежними и основываются на знании поверхностной плотности $\rho(R)$ и плотности в центре планеты ρ_0. Учет слоистой структуры имеет так же формируется с помощью θ-функции Хэвисайда. Коэффициенты сшивания полагаются единичными, чтобы не перенормировать функции плотности. Использование неединичных коэффициентов сшивания требует отдельного изучения, что предполагается сделать в дальнейшем.

1. Модельные функции плотности

I Приближение линейной функцией с параболической добавкой

К функции плотности с линейной радиальной зависимостью добавляем параболическую часть, также убывающую с ростом аргумента. В этом случае функция $\rho(r)$ задается выражением

$$\rho(r) = \frac{1}{2}\left\{\rho_0 - \frac{\rho_0 - \rho(R)}{2R}\cdot\left(r + \frac{r^2}{R}\right)\right\}. \tag{3}$$

На основе этого масса планеты (1) оказывается равной

$$M(R) = \pi R^3\left[\frac{13}{60}\rho_0 + \frac{9}{20}\rho(R)\right]. \tag{4}$$

II Приближение чистой параболической функцией

Интересно рассмотреть и функцию плотности параболического вида, так как она полностью удовлетворяет условию (2). В этом случае:

$$\rho(r) = \rho_0 - \frac{\rho_0 - \rho(R)}{R^2}\cdot r^2 \tag{5}$$

и соответствующая масса

$$M(R)=\frac{4\pi R^3}{5}\left[\frac{2}{3}\rho_0+\rho\left(R\right)\right]. \tag{6}$$

Таким образом, выражения для масс в двух первых приближениях имеют очень удобный полиномиальный вид (4), (6).

III Приближение степенной функцией с параболической добавкой

Данная модельная функция получается, если в ранее предложенной $\rho(r)$ с экспоненциальным поведением [4] учесть условие нормировки и сделать соответствующую добавку

$$\rho(r)=\frac{1}{2}\left\{\rho_0\left[1+\left(\frac{\rho_0}{\rho\left(R\right)}\right)^{-\frac{r}{R}}\right]-\frac{\rho_0-\rho\left(R\right)}{R^2}\cdot r^2\right\}, \tag{7}$$

при этом масса примет вид

$$M(R)=2\pi\left\{\frac{\rho_0}{\beta^3}\gamma\left(3;\beta R\right)+\frac{R^3}{5}\left[\frac{2}{3}\rho_0+\rho\left(R\right)\right]\right\}, \tag{8}$$

где введён параметр

$$\beta=\frac{1}{R}\ln\frac{\rho_0}{\rho(R)},$$

а $\gamma(3;\beta R)$ – нижняя неполная гамма–функция [5].

IV Приближение обратной функцией с параболической добавкой

И, наконец, последняя модификация $\rho(r)$ вида

$$\rho(r)=\frac{1}{2}\left\{\rho_0-\frac{\rho_0-\rho\left(R\right)}{R^2}\cdot r^2+\frac{R\rho_0\rho\left(R\right)}{R\rho\left(R\right)+\left[\rho_0-\rho\left(R\right)\right]r}\right\}, \tag{9}$$

приводящая к массе планеты равной

$$M(R)=2\pi R^3\left\{\frac{\rho_0}{3}F(1;3;4;-\gamma R)+\frac{1}{5}\left[\frac{2}{3}\rho_0+\rho\left(R\right)\right]\right\}. \tag{10}$$

Здесь $F(1;3;4;-\gamma R)$ – гипергеометрическая функция [5], радиально-зависимая с параметром

$$\gamma=\frac{\rho_0-\rho(R)}{R\rho(R)}.$$

В последних двух случаях выражения для масс (8), (10) содержат специальные функции, однако, это не затрудняет расчета масс, если использовать для этого возможности аналитического или численного интегрирования с помощью программных пакетов, например, ***WolframMathematica***.

2. Функция плотности для шара со слоистой структурой

Метод использования введенных функций плотности в случае учета слоистой структуры планеты заключается в их суммировании по слоям с использованием обрезающей на границе слоя функции Хэвисайда. При этом обобщенная функция плотности приобретает вид:

$$\rho(r)=\sum_{k=1}^{n}\Theta(r-r_k)\cdot\rho_{(j)k}(r)\cdot\Theta(r_{k+1}-r)\cdot A_{(j)k+1}, \tag{11}$$

где $\rho_{(j)k}(r)$ – функция плотности, присутствие у которой индекса j говорит о привязке к j-му приближению, в то время как индекс k номерует слой; также полагаем $r_1=0$; $\Theta(r)$ – функция Хэвисайда.

Следует заметить, что прямое интегрирование функции плотности (11) необязательно, так как его результат может быть представлен в виде суммы масс шаровых слоев, получаемых при использовании формул (4), (6), (8) и (10). Поэтому, массу планеты, состоящей из n слоев, записываем в виде

$$M=\sum_{k=1}^{n}\mu_k, \tag{12}$$

где μ_k – масса k–го шарового слоя, которая выражается как разность масс шаров различных радиусов.

$$\mu_k=M(r_{k+1})-M(r_k). \tag{13}$$

3 . Модельный расчет масс планет земной группы

Используем наши модифицированные модельные функции плотности для расчета масс планет земной группы на основе их известных характеристик [6, 7]. Полученный результат сравним с действительными массами.

Также как ценный источник достоверных астрофизических данных следует отметить Internet-ресурс [8].

Будем учитывать признанную внутреннюю структуру рассматриваемых планет [7, 8], состоящую из пяти компонентов у Земли (кора, верхняя мантия, мантия, внешнее ядро, внутреннее ядро) и трех компонентов у Меркурия, Венеры и Марса (кора, мантия, ядро).

Расчеты производим, варьируя комбинации функций плотности для указанных чисел слоев, что дает около 150 комбинаций.

В таблице 1 приведены три лучших результата расчета масс в рамках указанного подхода.

Теперь лучшие результаты более точны и отклоняются от действительных масс следующим образом:

– на 0,060% выше у Меркурия (I-II-III);

– на 0,185% ниже у Венеры (II-I-IV);
– на 0,033% ниже у Земли (II-II-I-I-III);
– на 0,187% выше у Марса (I-II-III).

Таблица 1 – Расчетная масса с учетом слоистой структуры

Планета	Масса (кг)	Расчетная масса (кг)		
		I-II-III	II-I-IV	I-III-II
Меркурий	$3{,}330 \cdot 10^{23}$	$\boldsymbol{3{,}332 \cdot 10^{23}}$	$3{,}339 \cdot 10^{23}$	$3{,}253 \cdot 10^{23}$
Венера	$4{,}869 \cdot 10^{24}$	$4{,}955 \cdot 10^{24}$	$\boldsymbol{4{,}860 \cdot 10^{24}}$	$4{,}766 \cdot 10^{24}$
Марс	$6{,}419 \cdot 10^{23}$	$\boldsymbol{6{,}431 \cdot 10^{23}}$	$6{,}620 \cdot 10^{23}$	$6{,}277 \cdot 10^{23}$
		II-III-II-IV-I	I-III-I-IV-III	II-II-I-I-III
Земля	$5{,}973 \cdot 10^{24}$	$6{,}041 \cdot 10^{24}$	$5{,}985 \cdot 10^{24}$	$\boldsymbol{5{,}971 \cdot 10^{24}}$

Данные результаты можно рассматривать как вполне удовлетворительные, а соответствующие модельные функции плотности как достаточно близкие к реальным распределениям масс, допускающие использование при решении соответствующих задач. Отклонение в сторону уменьшения масс планет Земля и Венера, говорит нам о необходимости учета распределения массы в их атмосферах.

Заключение

Таким образом, в работе проведено видоизменение модельных функций плотности для планет земной группы путем параболической добавки. Расчеты показали, что новое модельное поведение функций плотности можно считать достаточно достоверным. Оно может быть использовано при решении уравнений динамического равновесия и прочих задач теории внутреннего строения планет. Также несомненно, что к улучшению результатов может привести учет распределения массы в атмосферах, а также деформаций, связанных с центробежным эффектом.

Литература

1. Carroll, B.W. An Introduction to Modern Astrophysics / B.W. Carroll, D.A. Ostlie. – Pearson International Edition, 2007. – 1309 p.

2. Магницкий, В.А. Внутреннее строение и физика Земли / В.А. Магницкий. – Москва : Наука, 2006. – 390 с.

3. Уильям, Б. Внутреннее строение планет / Б. Уильям. – Москва : Мир, 1987. – 328 с.

4. Тюменков, Г.Ю. Моделирование радиальной функции плотности гравитирующего шара / Г.Ю. Тюменков, Е.П. Ельников, Е.В. Фирагина // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4(21). – С. 36–39.

5. Кузнецов, Д.С. Специальные функции / Д.С. Кузнецов. – Москва : Высшая школа, 1962. – 249 с.

6. Anderson, D.L. Theory of the Earth / E.C. Robertson. – Boston: Blackwell Publications, 1989. – 366 p.

7. Jordan, T.H. Structural Geology of the Earth's Interior / T.H. Jordan // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America – Boston: High Wire Press, 2014. – Vol. 76. – № 8. – P. 4192–4200.

8. California Institute of Technology (USA) [Electronic resource] / NASA'S Jet Propulsion Laboratory. – Pasadena, CA, 2004. – Mode of access: www.jpl.nasa.gov/solar-system/. – Data of access: 10.06.2016.