УДК 535.13.01

МАКСИМАЛЬНАЯ ЭНТРОПИЯ ПОЛЕЙ С ЗАДАННЫМИ СТЕПЕНЯМИ КОГЕРЕНТНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В. Я. Анисимов и Б. А. Сотский

Найдено выражение для максимальной энтропии классических электромагнитных одномодовых полей с заданными моментами высшего порядка. Максимальная энтропия у того поля меньше, у которого задан момент более высокого порядка (при одинаковой интенсивности сравниваемых полей). Доказано, что при задании только одной степени когерентности высшего порядка конечной максимальной энтропии как в классическом, так и в квантовом случае (при степени когерентности, большей единицы) не существует. Этот же результат справедлив при задании произвольного числа степеней когерентности высших порядков, если их совокупность может быть описана положительной P-функцией. Если заданная степень когерентности меньше единицы, что возможно лишь в квантовом случае, то может существовать конечная максимальная энтропия.

В предыдущих работах авторов [1, 2] выяснено, как ведет себя максимальная энтропия когерентных в первом порядке полей, у которых фиксировано среднее число фотонов и степень когерентности второго порядка. Теперь предположим, что задан только один момент произвольного порядка N, т. е.

$$\int \rho(x)\,dx = 1, \quad \int x^N \rho(x)\,dx = \langle x^N \rangle, \tag{1}$$

где $\rho(x)$ — плотность функции распределения, x — отношение энергии поля к $\hbar\omega$. Варьируя энтропию поля $-\int \rho(x) \ln \rho(x)\,dx$ при условиях (1), находим плотность функции распределения, обеспечивающую максимум энтропии

$$\rho_{\max}^{(x)} = \exp\{\lambda_0 - 1 + \lambda x^N\}. \tag{2}$$

Подставляя $\rho_{\max}(x)$ в (1), определяем множители Лагранжа λ_0 и λ,

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= 1 + \ln \frac{N^{1-\frac{1}{N}}}{\Gamma(1/N)\,\{\langle x^N \rangle\}^{1/N}}, \\ \lambda_1 &= -\frac{1}{N\langle x \rangle^N}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Выражение для максимальной энтропии имеет вид

$$S_{\max} = \left(\frac{1}{N} - 1\right) \ln N + \frac{1}{N} \ln \langle x^N \rangle + \frac{1}{N} + \ln \Gamma(1/N). \tag{4}$$

Здесь $\Gamma(1/N)$ — гамма-функция.

Сравним теперь максимальные энтропии полей с заданными моментами различных порядков N и M, причем положим для определенности $N > M$. Предположим далее, что сравниваемые поля имеют одинаковую интенсивность. Тогда

$$S_{\max}^{(N)} - S_{\max}^{(M)} = \ln \frac{M}{N} + \frac{1}{N} - \frac{1}{M} + \ln \frac{\Gamma^2(1/N)\,\Gamma(2/M)}{\Gamma^2(1/M)\,\Gamma(2/N)}. \tag{5}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Из (5) видно, что разность максимальных энтропий не зависит ни от величины интенсивностей сравниваемых полей, ни от значений самих высших моментов, а является только функцией их порядков. Исследование разности (5) показывает, что всегда максимальная энтропия у тех полей меньше, у которых задан момент более высокого порядка (при одинаковых средних энергиях).

Пусть теперь задан не момент высшего порядка, а степень когерентности g_N, т. е.

$$\int \rho(x)\, dx = 1, \quad \frac{\int x^N \rho(x)\, dx}{\langle x \rangle^N} = g_N. \tag{6}$$

Варьирование энтропии при этих условиях приводит к следующему выражению для функции $\rho_{\max}(x)$

$$\rho_{\max} = \exp\left[\lambda_0 - 1 - N\lambda g_N \langle x \rangle^{N-x} + \lambda x^N\right]. \tag{7}$$

Фактически (7) представляет еще собой трансцендентое уравнение, так как в показатель экспоненты входит $\langle x \rangle$, которое, в свою очередь, определяется $\rho_{\max}(x)$. Если плотность функции распределения имеет вид

$$\rho(x) = \exp\{A + Bx + Cx^N\}, \tag{8}$$

где A, B и C — некоторые постоянные, то интегрируя по частям условие нормировки в (6), можно получить следующие соотношения между коэффициентами A, B и C и моментами различных порядков

$$\left.\begin{aligned} &\exp\{A\} + NC\langle x^N \rangle = -B, \\ &\langle x^{N+M} \rangle = -\frac{M+1}{NC}\langle x^M \rangle - \frac{B}{NC}\langle x^{M+1} \rangle. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Отсюда, в частности, полагая $M = 0$, находим

$$1 = -B\langle x \rangle - NC\langle x^N \rangle. \tag{10}$$

Из сравнения функций (7) и (8) имеем

$$A \equiv \lambda_0 - 1, \quad B \equiv -N\lambda g_N \langle x \rangle^{N-1}, \quad C \equiv \lambda. \tag{11}$$

Если подставить (11) в уравнение (10), то можно убедиться, что оно не выполняется ни при каких конечных λ. Таким образом, в классическом случае, а именно такой случай до сих пор рассматривался, энтропия при заданной только одной степени когерентности высшего порядка не имеет экстремума. Такой же результат получается при задании любого числа степеней когерентности произвольных порядков. Что в этом случае нет максимальной энтропии, можно убедиться и другим способом. Предположим обратное: пусть существует конечная максимальная энтропия при заданном наборе степеней когерентности g_2, g_3, . . . g_N, . . . Но для любого классического поля [3] можно построить совокупность полей, имеющих те же степени когерентности и отличающихся только средним числом фотонов, по правилу

$$\rho_c(x) = \frac{1}{c}\rho\left(\frac{x}{c}\right), \quad c > 0. \tag{12}$$

Энтропия любого из этой совокупности поля S_c связана следующим образом с энтропией исходного поля:

$$S_c = S + \ln c \tag{13}$$

и неограниченно возрастает с увеличением c. Таким образом, максимальная энтропия может равняться только бесконечности.

Обратимся теперь к квантовому случаю. Здесь вместо (6) должны будут выполняться соотношения

$$\sum_k \rho_k = 1, \quad \sum k(k-1)\cdots(k-N+1)\rho_k = g_N \langle n \rangle^N. \tag{14}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

Варьируя энтропию при этих условиях, получим систему уравнений для определения вероятностей ρ_k, обеспечивающих максимум энтропии

$$\left.\begin{array}{c} \ln \rho_k + 1 - \lambda A_k^N + N\lambda g_N \langle n\rangle^{N-1} k = 0, \\ k = 0,\ 1,\ \ldots \end{array}\right\} \tag{15}$$

Здесь A_k^N — число размещений из k по N, $\langle n\rangle$ — среднее число фотонов, рассчитываемое по формуле $\langle n\rangle = \sum\limits_k k\rho_k$. Все ρ_k для $k \geqslant 2$ можно выразить через ρ_0 и ρ_1

$$\rho_k = \rho_1^k \exp\left[(k-1)(1-\lambda_0) + \lambda A_k^N\right], \tag{16}$$

где, как обычно, $A_k^N = 0$ при $N > k$, и $N \geqslant 2$. При подстановке (14) в (15) получаем связь между ρ_0, ρ_1 и параметрами λ_0, λ_1 и g_N

$$\rho_0 = \exp\{\lambda_0 - 1\},\ \rho_1 = \exp\left\{\lambda_0 - 1 - N\lambda g_N \langle n\rangle^{N-1}\right\}. \tag{17}$$

Из (14), (16) и (17) точно так же, как это делалось в [1], можно написать

$$S_{\max} = 1 - \lambda_0 + \lambda(N-1) g_N \langle n\rangle^N, \tag{18}$$

$$\frac{dS_{\max}}{dg_N} = -\lambda \langle n\rangle^N. \tag{19}$$

Поскольку $\lambda < 0$ (для бесконечного набора ρ_k), то максимальная энтропия, если она существует, является монотонной функцией степени когерентности порядка g_N. При конечном числе возбуждаемых фотонов знак у множителя λ может быть как отрицательным, так и положительным, причем знак будет определяться при заданном числе возбуждаемых фотонов величиной g_N. Например, при $N = 2$, $g_2 = 1/2$ и $k = 0, 1, 2$ решением систем (13) и (14) будет $\rho_0 = \rho_2 = 1/4$, $\rho_1 = 1/2$, $\lambda = -\ln 2$, $S_{\max} = (3/2)\ln 2$. При конечном числе ρ_k всегда существует максимальная энтропия при заданном g_N, не превышающая значение энтропии для равномерного распределения.

Рассмотрим теперь подробнее случай с бесконечным числом возбуждаемых фотонов. Пусть $g_N > 1$; предположим, что бесконечная система (16), (17) имеет решение.

Поскольку класс варьируемых полей, среди которых ищется поле с максимальной энтропией, содержит и поля с положительной весовой функцией $P(\alpha)$ в представлении когерентных состояний, то найденная максимальная энтропия безусловно не должна быть меньше энтропии этих полей. Но, с другой стороны, известно [3], что для любого поля с $P(\alpha) \geqslant 0$ можно всегда построить совокупность полей, имеющих те же самые степени когерентности, отличающихся только средним числом фотонов, согласно соотношению, аналогичному (12),

$$P_c(\alpha) = \frac{1}{|c|^2} P\left(\frac{\alpha}{c}\right). \tag{20}$$

Тогда для энтропии любого поля из этой совокупности можно записать неравенство [4]

$$S_c \equiv -\sum \rho_k^{(c)} \ln \rho_k^{(c)} \geq -\int P(\alpha) \ln \pi P(\alpha)\, d^2\alpha + \ln |c|^2. \tag{21}$$

Поскольку для $P(\alpha) > 0$ можно сделать каким угодно большим $|c|^2$ [3], то энтропия из этой совокупности полей может быть сделана всегда больше той максимальной энтропии, которая была бы найдена из решения системы (16) и (17). Получается противоречие, следовательно, указанная система не должна иметь решения при $g_N > 1$. Так же как и в классическом случае, этот же результат справедлив при любом количестве заданных степеней когерентности, если только их совокупность может быть описана положительной P-функцией. Таким образом, и в класси-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

ческом, и в квантовом подходе ($g_N > 1$, $N = 2, 3, \ldots$) задание степеней когерентности ничем не ограничивает максимальную энтропию, она остается бесконечной, как и в случае задания только нормировочного условия.

По-иному дело обстоит в случае $g_N < 1$ ($N = 2, 3, \ldots$). Это существенно квантовая область полей, где проявляются антикорреляционные свойства [5, 6]. Пусть $N = 2$ и $g_2 < 1$, для таких полей среднее число фотонов $\langle n \rangle$ должно удовлетворять неравенству [7]

$$0 \leqslant \langle n \rangle \leqslant 1/(1 - g_2). \tag{22}$$

Поэтому при фиксированных $g_2 < 1$, $\langle n \rangle$ не может быть произвольно большим, а неравенство (21) теряет силу и смысл [$P(\alpha)$ или вообще отсутствует, или не является положительной функций].

Поэтому можно ожидать, что система уравнений (16), (17) в этом случае имеет решение. В этом можно убедиться, не решая системы. Известно, что энтропия поля на концах интервала (22) обращается в нуль, поскольку они соответствуют чистым состояниям [при $1/(1 - g_2)$ равным целому числу]. При изменении $\langle n \rangle$ внутри интервала (22) энтропия по крайней мере один раз должна пройти через максимум.

Литература

[1] В. Я. Анисимов, Б. А. Сотский. ТМФ, *14*, 282, 1973.
[2] В. Я. Анисимов, Б. А. Сотский. ДАН БССР, *18*, 210, 1974.
[3] В. Я. Анисимов, Б. А. Сотский. Опт. и спектр., *39*, 781, 1975.
[4] В. Я. Анисимов, Б. А. Сотский. ТМФ, *29*, 126, 1976.
[5] В. Я. Анисимов, Б. А. Сотский. Опт. и спектр., *42*, 563, 1977.
[6] M. M. Miller, E. A. Mishkin. Phys. Lett., *24A*, 188, 1967.
[7] P. Chand. Let. Nuov. Cim., *4*, 1068, 1970.

Поступило в Редакцию 3 июня 1976 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ