$$\begin{cases} \mathbf{A}\left(\dfrac{-b}{2a}\right)+\mathbf{B}\left(a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2+b\dfrac{-b}{2a}+c_1\right)+\mathbf{S}=0; \\ \mathbf{A}\left(\dfrac{-b}{2a}\right)+\mathbf{B}\left(a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2+b\dfrac{-b}{2a}+c_2\right)+\mathbf{S}=0. \end{cases}$$

Из системы следует, $\mathbf{B} = 0$, так как при вычитании уравнений системы имеем:

$$\mathbf{B}(b^2/4a-b^2/2a+c_1-b^2/4a+b^2/2a-c_2)=0;$$

Выразим **A** из системы уравнений. $\mathbf{A}=\dfrac{S2a}{b}$. Подставляя коэффициенты **A** и **B** в уравнение прямой $\mathbf{A}x + \mathbf{B}y + \mathbf{S} = 0$, имеем:

$$\frac{S2a}{b}x+S=0 \qquad S\neq 0$$

$$\frac{2\mathrm{a}}{b}x+1=0; \qquad x=-1\frac{b}{2a};$$

$x=-\dfrac{b}{2a}$ уравнение прямой, на которой лежат все вершины парабол $y=ax^2+bx+c_1$, где c — параметр.

Не менее интересен и второй случай. Если a — параметр, c и b — константы, то все вершины семейства парабол будут расположены на прямой $y=\dfrac{bx}{2}+c$.

В третьем случае, если b — параметр, a и c — константы, то все семейство парабол имеет «параболу вершин» $y=-ax^2+c$.

Заключение. Мы выяснили, как влияют коэффициенты квадратичной функции на свойства функции и ее графика. Проанализированные примеры позволяют доказать гипотезу о закономерности между расположениями вершин квадратичной функции и ее коэффициентами; а также можно немедленно найти ошибки при построении графиков квадратичной функции.

УДК 539

С. А. Лукашевич, В. А. Дубовская

Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины», Гомель, Республика Беларусь

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ КУЛОНОВСКОЙ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ЭЛЕКТРОН В АТОМЕ ВОДОРОДА

Введение. При изучении основ квантовой механики показано, что с движением частицы, обладающей определенной энергией и импульсом связывается плоская волна де Бройля. В более общем случае состояние частицы в квантовой механике задается более сложной, вообще говоря, комплексной, функцией $\Psi(r,\ t)$, зависящий от координат и времени.

Рассмотрим волновую функцию вида $\Psi(r) = A\,e^{-\frac{r}{a}}$, которая описывает состояние электрона в атоме водорода, где A — нормированный коэффициент, r — расстояние электрона от ядра, $a=\mathrm{const}$ — первый боровский радиус.

Наша задача состоит в том, чтобы определить среднее значение модуля кулоновской силы, действующей на электрон.

Основная часть. Применяя закон Кулона о взаимодействии зарядов, находим, что сила, действующая на электрон в атоме водорода, имеет вид: $F=\dfrac{e^2}{4\pi E_0 r^2}$.

Тогда среднее значение силы:

$$<F>=\frac{e^2}{4\pi E_0}\frac{1}{<r^2>}. \qquad (1)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению среднего значения обратной величины расстояния $<\frac{1}{r^2}>$ электрона от ядра в основном состоянии.

Согласно определения модуля вероятности волновой функции получим, что среднее значение

$$<\frac{1}{r^2}>=\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\Psi*\Psi dV=\int_0^\infty \frac{1}{r^2}|\Psi|^2\,dV. \qquad (2)$$

Для нахождения выражения (2) определим сначала нормировочный коэффициент A заданной волновой функции, для чего используем условие нормировки:

$$\int_0^\infty |\Psi|^2 dV=1. \qquad (3)$$

В силу сферической симметрии функции $\Psi(r)$ элементарным объемом dV, все точки которого удалены на расстояние r от ядра, будет шаровой слой радиуса r и толщиной dr, т. е.

$$dV=4\pi r^2 dr. \qquad (4)$$

Тогда согласно условию нормировки (3) с учетом (4),

$$1=\int_0^\infty |\Psi|^2 dV=\int_0^\infty A^2 e^{-\frac{2r}{a}}4\pi r^2 dr \qquad \text{или} \qquad 1=4\pi A^2\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2r}{a}}dr.$$

Учитывая, что $\int_0^\infty x^n e^{-ax}=\frac{n!}{a^{a+1}}$, получаем $1=4\pi A^2\frac{2!}{(2/a)^3}=\pi A^2 a^3$, откуда нормировочный коэффициент $A=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}$, а нормированная волновая функция, описывающая состояние электрона в атоме водорода имеет вид:

$$\Psi(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-\frac{r}{a}}. \qquad (5)$$

С учетом формул (5) и (4), согласно (2), получим, что

$$<\frac{1}{r^2}>=\int_0^\infty \frac{1}{r^2}|\Psi|^2\,dV=\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\frac{1}{\pi a^3}e^{-\frac{2r}{a}}4\pi r^2 dr=\frac{4}{a^3}\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a}}dr=\frac{4}{a^3}\left(-\frac{a}{2}\right)e^{-\frac{2r}{a}}\Big|_0^\infty=\frac{2}{a^2}.$$

Подставим полученное выражение в формулу (1), найдем искомое среднее значение модуля кулоновской силы: $<F>=\frac{e^2}{4\pi E_0}<\frac{1}{r^2}>=\frac{e^2}{4\pi E_0}\frac{2}{a^2}=\frac{e^2}{2\pi E_0 a^2}$.

В данном выражении кулоновской силы a — первый боровский радиус.

Учитывая основное состояние электрона в атоме водорода, найдем вероятность того, что электрон находится в элементе объема dV:

$$dW=|\Psi(r)|^2\,dV=|\Psi|^2\,4\pi r^2 dr. \qquad (6)$$

Подставим сюда волновую функцию (5), найдем $dW=\frac{1}{\pi a^3}e^{-\frac{2r}{a}}4\pi r^2 dr$.

Чтобы найти расстояние от ядра, на котором электрон может быть обнаружен с наибольшей вероятностью, необходимо исследовать выражение $\frac{d\omega}{dr}$ на максимум.

Т. е. плотность вероятности $\omega(r)=\frac{dw}{dr}$.

Заключение. В результате исследования мы получаем, что $r_{max}=a$, т. е. наиболее вероятное расстояние электрона от ядра соответствует боровскому радиусу.

Таким образом, мы отмечаем, что в основном состоянии атома водорода наиболее вероятным расстоянием электрона до ядра является расстояние, равное боровскому радиусу. То есть в этом заключается квантово-механический смысл боровского радиуса.