УДК 539.184.01

ЛИНЕЙНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ТРЕХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ПОЛЕ СИЛЬНОГО НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

П. В. Елютин

Исследована линейная восприимчивость трехуровневой системы в окрестности резонанса перехода *1—2* (*1* — основное состояние) в присутствии сильного немонохроматического поля, вызывающего переходы в смежном канале *2—3*. Немонохроматическое поле считается комплексным гауссовым шумом со средней частотой спектра, равной частоте перехода *2—3*. Для экспоненциально коррелированного шума полным суммированием ряда теории возмущений получено точное выражение для восприимчивости.

1. Цель этой работы — вычисление формы линии поглощения слабого сигнала в одном из каналов трехуровневой системы в присутствии сильного шумового излучения, действующего на смежный канал. Уровни нумеруются в порядке возрастания энергии. Немонохроматическое поле предполагается имеющим вид

$$V(t)=[E(t)\,e^{i\omega_{23}t}+E^*(t)\,e^{-i\omega_{23}t}]\,\frac{1}{2}, \tag{1}$$

где ω_{23} есть частота перехода *2—3*, а амплитуда $E(t)$ представляет собой стационарный гауссов процесс с экспоненциальной функцией корреляции

$$\left.\begin{aligned}\langle E(t)\,E(t')\rangle=\langle E(t)\rangle=0,\\ \langle E(t)\,E^*(t+\tau)\rangle\sim B_0e^{-\eta|\tau|}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Такой вид функции корреляции необходим для дальнейших рассуждений по формальным причинам. Слабый проверяющий сигнал E_1 с частотой $\omega_{21}+\omega$ действует в канале *1—2*. Изменением заселенности основного состояния и релаксацией возбужденных состояний пренебрегаем. Используется приближение вращающегося поля.

Такая задача рассматривалась в работе Пржибельского [1] без предположения о конкретной форме коррелятора. Были получены выражения для формы линии в предельных случаях. Ниже будет показано, что эти выражения являются точными в предельных точках и что в этих точках они не зависят от вида коррелятора. При промежуточных значениях параметров результаты работы [1] справедливы лишь качественно. Аналогичные задачи с иными предположениями относительно характера модулирующего шума $E(t)$ рассматривались в работах [2], где $E(t)$ считалось действительным гауссовым процессом, и [3], где $E(t)$ считалось разрывным марковским процессом.

Результат настоящей работы — точное выражение для спектра, определенное формулой (24), сходящееся без ограничений на параметры задачи и представляющее полностью просуммированный ряд теории возмущений.

2. Система динамических уравнений для элементов матрицы плотности трехуровневой системы может быть преобразована к интегральному уравнению, которое решается методом итераций. Полученное решение усредняется по распределению. Такой подход является стандартным и подробно описан в работе [1]. Мы придерживаемся близких обозначений. Восприимчивость $\chi(\omega)$ связана с фурье-образом функции $G(t)$

$$\chi(\omega)=i\int\limits_0^\infty dte^{-i\omega t}G(t). \tag{3}$$

Функция $G(t)$ выражается усредненным итерационным рядом

$$G(t)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\int\limits_0^t\ldots\int\limits_0^{t_{2n-1}}dt_1\ldots dt_{2n}\langle A_1A_2^*\ldots A_{2n-1}A_{2n}^*\rangle, \tag{4}$$

где

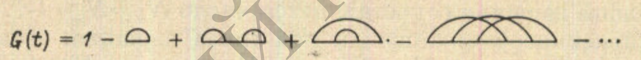
$$A_n=\mu_{32}\frac{E(t_n)}{2h},\quad \langle A_1A_2^*\rangle=B(t_1-t_2)=B_{12}, \tag{5}$$

а μ_{32} есть матричный элемент перехода. В силу предположения о гауссовом характере процесса

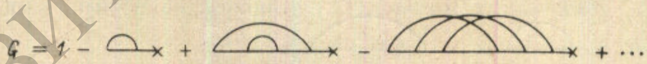
$$\langle A_1A_2^*\ldots A_{2n-1}A_{2n}^*\rangle=\sum B_{1i}B_{3j}\ldots B_{2n-1,l}, \tag{6}$$

где сумма берется по всем перестановкам четных чисел от 2 до $2n$.

Анализ выражения (4) удобно вести в терминах диаграммной техники (см. [1]). Каждое слагаемое в правой части (6) представляется диаграммой — последовательностью $2n$ упорядоченных точек на временной оси, занумерованных от 1 до $2n$ слева направо. Точки далее называются вершинами. Корреляционной функции B_{ij} соответствует петля, соединяющая вершины i и j. Левую (более позднюю по времени) вершину петли будем называть начальной. По временной координате вершины t_n проводится интегрирование от 0 до t_{n-1}.


(7)

Неприводимой называется диаграмма, которая не содержит пары соседних точек t_i, t_{i+1}, не соединенных или не охваченных петлей. Совокупность неприводимых диаграмм в разложении (7) назовем первой неприводимой функцией Σ_1. Разложение (7) можно записать в виде уравнения Дайсона


(8)

Крестик за последней вершиной диаграммы в разложении (8) означает включение под интеграл по t_{2n} множителя $G(t_{2n})$.

3. При заданном виде корреляционной функции

$$B(\tau)=d^2f(\eta\tau), \tag{9}$$

где η^{-1} имеет смысл времени когерентности, задача характеризуется единственным безразмерным параметром $\varepsilon=d^2\eta^{-2}$. Случай $\varepsilon\ll 1$ (слабые флуктуации, широкие спектры шумового поля) хорошо изучен: при $\varepsilon\ll 1$ в первой неприводимой функции можно сохранить лишь первую диаграмму

$$G(t)=1-\int\limits_0^t dt_1\int\limits_0^{t_1}dt_2B(t_1-t_2)G(t_2). \tag{10}$$

При конечном времени когерентности из формулы (10) следует, что

$$G'(0) = -\int_0^t dt_2 B(t - t_2) G(t_2)\,|_{t=0} = 0. \tag{11}$$

Поэтому в силу общих теорем анализа крыло линии поглощения (асимптотика функции $\operatorname{Im}\chi(\omega)$ при $\omega \to \infty$) убывает не медленнее, чем ω^{-4}. Линия поглощения может иметь лоренцевскую форму, полученную в[1], только в предельном случае дельта-коррелированного процесса

$$d^2 = \infty, \quad \eta = \infty, \quad d^2\eta^{-1} = D, \quad \varepsilon = 0, \tag{12}$$

когда уравнение (10) становится точным.

4. В случае $\varepsilon \gg 1$ (сильные флуктуации, узкие спектры шумового поля) на основе анализа разложения (8) нельзя указать последовательность диаграмм, вносящих основной вклад.

Для упрощения записи в качестве единицы времени используем время когерентности η^{-1}. Выберем корреляционную функцию в виде

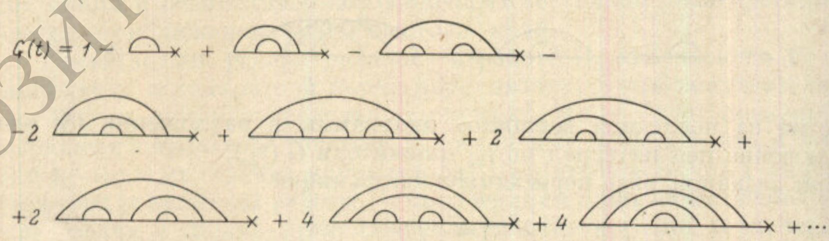
$$B(\tau) = \varepsilon e^{-|\tau|}. \tag{13}$$

Такой выбор существен для дальнейшего. Теперь значение каждой диаграммы в разложениях (7) и (8) определяется расстановкой начальных и конечных вершин среди $2n$ точек диаграммы и не зависит от вида петель. Поэтому каждую диаграмму можно однозначно представить диаграммой, не содержащей пересекающихся петель. Для этого надо первую, считая слева, конечную вершину соединить петлей с ближайшей к ней слева начальной вершиной и продолжить эту процедуру для остальных не связанных петлями вершин. Полученные таким образом диаграммы будут иметь вид вложенных петель.

Подсчет числа диаграмм, эквивалентных заданной диаграмме со вложенными петлями, можно провести, зафиксировав расстановку начальных вершин и учитывая, что конечные вершины могут выбираться лишь из точек противоположной четности [см. формулу (6)]. Правило подсчета таково: начальной вершине сопоставляется число $N_n = N_{n-1} + 1$, где N_{n-1} — число, сопоставленное ближайшей к ней слева вершине. Конечной вершине сопоставляется число $N_n = N_{n-1} - 1$. Полагается $N_0 = 0$. Число диаграмм равно произведению величин $v(N_n)$ для всех начальных вершин, где

$$v(k) = \frac{k+1}{2}\ (k = 2m+1), \quad v(k) = \frac{k}{2}\ (k = 2m). \tag{14}$$

Разложение (8) теперь может быть представлено в виде



(15)

Из правил подсчета следует, что добавление к диаграмме охватывающей ее петли увеличивает все числа N_n в охваченной части на единицу.

5. Нашей целью является отыскание фурье-образа функции $G(t)$. Перейдем к спектральному представлению в уравнении (15). Величина $S(\omega) = -i\chi(\omega)$ есть

$$S(\omega) = \lim_{\delta \to 0} \int_0^\infty e^{-pt} G(t)\,dt, \quad p = i\omega + \delta. \tag{16}$$

Подставляя в правую часть разложение (15) и интегрируя в члене n-го порядка $2n$ раз по частям, придем к выражению

$$S = \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon}{p\,(p+1)}\, S + \frac{\varepsilon^2}{p\,(p+1)^2\,(p+2)}\, S - \ldots \tag{17}$$

или

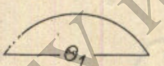
$$S = \frac{1}{p\,(1+\Sigma_1)}, \tag{18}$$

$$\Sigma_1 = \frac{\varepsilon}{p\,(p+1)} - \frac{\varepsilon^2}{p\,(p+1)^2\,(p+2)} + \frac{2\varepsilon^3}{p\,(p+1)^2\,(p+2)^2\,(p+3)} + \ldots . \tag{19}$$

Первая неприводимая функция в спектральном представлении вычисляется по следующим правилам: каждой вершине диаграммы ставится в соответствие множитель $(p+N_n)^{-1}$; диаграмма с $2n$ вершинами умножается на $-(-\varepsilon)^n$.

Формула (19) определяет разложение, которое сходится в круге $|\varepsilon| < |p+1|$. Условие сходимости позволяет исследовать всю форму линии при $|\varepsilon| < 1$: это — случай широких спектров, рассмотренный в п. 3. При $\varepsilon > 1$ формула (19) позволяет вычислить лишь форму крыла линии, которая и без того ясна: из разложения (15) видно, что при выбранном экспоненциальном корреляторе $G'''(0) \neq 0$ и $\operatorname{Im} \chi(\omega) \sim \omega^{-4}$ при достаточно больших ω и любом ε.

6. Все диаграммы разложения (15) преобразованы к диаграммам со вложенными петлями. По определению Σ_1, каждая входящая в ее состав диаграмма содержит охватывающую ее внешнюю петлю. Иначе говоря, каждый член ряда (19) содержит множитель $\varepsilon\,[p\,(p+1)]^{-1}$. Определим первую охваченную функцию Θ_1 уравнением

$$\Sigma_1 = \frac{\varepsilon}{p(p+1)}\, \Theta_1 =$$  . (20)

Диаграммное разложение для Θ_1 имеет вид

 (21)

и отличается от разложения (7) лишь правилом подсчета диаграмм и видом множителей для вершин. Поскольку (снятая) внешняя петля увеличивает все N_n на единицу, то вычисление разложения (21) проводится по правилам пп. 4 и 5 при $N_0 = 1$.

Определив вторую неприводимую функцию Σ_2 как совокупность неприводимых диаграмм в разложении (21), имеем уравнение

$$\Theta_1 = (1+\Sigma_2)^{-1}. \tag{22}$$

Для Σ_2 справедливы те же рассуждения, что и для Σ_1: каждая диаграмма содержит множитель $\varepsilon\,[(p+1)(p+2)]^{-1}$. Определяя аналогично предыдущему охваченные и неприводимые функции высших порядков, имеем рекуррентное соотношение

$$\Sigma_k = \frac{\varepsilon v(k)}{(p+2k-2)\,(p+2k-1)}\, \frac{1}{1+\Sigma_{k+1}}, \tag{23}$$

где числа $v(k)$ определены формулой (14). Формула (23) определяет разложение функции $S(p)$ в цепную дробь

$$S(p) = \left[0;\ \frac{1}{p},\ \frac{\varepsilon}{p+1},\ \frac{\varepsilon}{p+2},\ \frac{2\varepsilon}{p+3},\ \ldots\ \frac{\varepsilon v(k)}{p+k},\ \ldots\right]. \tag{24}$$

Разложение (24) описывает полностью просуммированный ряд теории возмущений.

7. Сходимость разложения (24) не накладывает ограничений на величину ε. Пользуясь формулой превращения цепной дроби в эквивалентный ряд [4]

$$\left[0;\ \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n},\ \ldots\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{Q_{2n-2}Q_{2n}} \prod_{i=1}^{2n-1} a_i, \tag{25}$$

где $Q_0 = 1$, $Q_1 = b_1$,

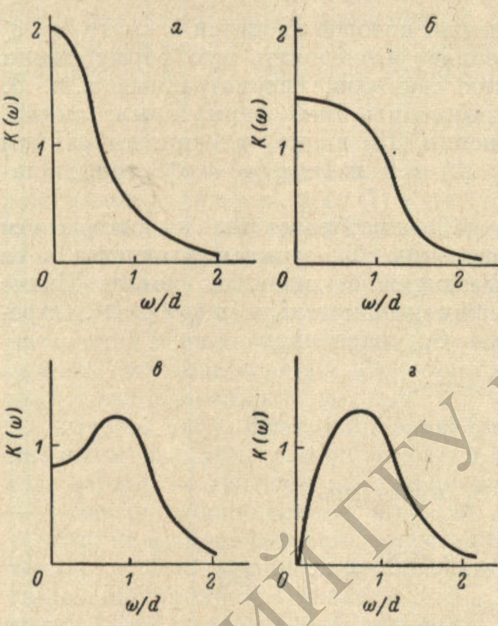
$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \tag{26}$$

получаем разложение для $S(p)$, удобное для вычислений. На рисунке показано поведение функций $K(\omega) = \operatorname{Im}\chi(\omega)$ при различных значениях ε.

Разложение (24) очень быстро сходится. Для вычисления $K(\omega)$ с относительной ошибкой порядка нескольких процентов при $\varepsilon = 1$ достаточно взять три члена в правой части (25). Первый член разложения, имеющий в размерных переменных вид

$$K_1(\omega) = \frac{\eta d^2}{(d^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2}, \tag{27}$$

удовлетворительно описывает форму линии при $\varepsilon \leqslant 1$. Заметим, что именно к выражению (27) приводит вычисление формы линии поглощения трехуровневой системы с константой релаксации η в канале *1—3*. Таким образом, в области $\varepsilon \leqslant 1$ применимо описание индуцированной релаксации с помощью добавления ширины спектра шума η к константе поперечной релаксации и замены шума когерентным полем амплитуды d [5].



Форма линии поглощения в канале *1—2*.
а — ε=0.25, *б* — ε=1, *в* — ε=16, *г* — ε=∞.

8. Форма линии поглощения при $\varepsilon \gg 1$ подтверждает вывод работы [1] о возможности существования штарковского расщепления в резонансном поле, модулированном комплексным гауссовым шумом. Для действительного гауссова шума такое расщепление отсутствует [2]. Наши результаты переносятся на случай действительного гауссова процесса, если вместо (14) положить $v(k) = k$. Разложения (24) и (25) в этом случае сходятся медленнее, и высшие члены затягивают провал в центре линии, имеющийся в формуле (27).

Причины такого различия становятся очевидны при переходе к пределу $d^2 = \text{const}$, $\eta \to 0$, $\varepsilon \to \infty$. Такой предельный переход соответствует переходу к рассмотрению восприимчивости системы без релаксации в когерентном поле

$$\lim_{\eta \to 0} K_1(\omega) = \frac{\pi}{2}\delta(\omega - d) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega + d), \tag{28}$$

усредненной по распределению амплитуды поля. Для комплексного гауссова процесса такое распределение является релеевским, и предельная форма линии описывается выражением

$$K_\infty(\omega) = \frac{\pi}{d^2}|\omega| \exp -\frac{\omega^2}{d^2}. \tag{29}$$

Форма линии при $\varepsilon = \infty$ показана на рисунке, *г*. Для действительного гауссовского процесса предельная форма линии является гауссовской

$$K^r_\infty(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{d}\exp - \frac{\omega^2}{d^2}. \tag{30}$$

Выражение (29) было получено в работе [1] заменой всех корреляционных функций $B(\tau)$ в усредненном разложении на значение $B(0)$.

Автор благодарит Л. В. Келдыша и Д. Н. Клышко за полезные замечания.

Литература

[1] С. Г. Пржибельский. Опт. и спектр., *35*, 715, 1973.
[2] С. Г. Пржибельский, В. А. Ходовой. Опт. и спектр., *32*, 237, 1972.
[3] Л. Д. Зусман, А. И. Бурштейн. ЖЭТФ, *61*, 976, 1971.
[4] А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. ГИТТЛ, М., 1956.
[5] П. В. Елютин. Вестн. МГУ, сер. физ., *17*, 496, 1976.

Поступило в Редакцию 24 сентября 1976 г.