

УДК 531.3; 796.01

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ БИОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А.Е. Покатилов

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев

MATHEMATICAL MODELLING OF LOCOMOTION OF BIOMECHANICAL SYSTEM

A.E. Pokatilov

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

В данной статье для целенаправленного движения биомеханической системы определяются и изучаются математические модели синтеза движения на кинематическом и динамическом уровнях. Модели разбиваются на две части: непосредственно управляемую мышечной системой и на часть, отражающую движение спортивного снаряда, выступающего в качестве упругой опоры. Показано взаимодействие этих частей и предложена методика расчета полных моделей в вычислительном эксперименте на ЭВМ.

Ключевые слова: синтез, управление, движение, математическая модель, кинематический уровень, биомеханическая система.

In the given paper the mathematical models of synthesis of locomotion at kinematic and dynamic levels are defined and investigated for the purposeful movement of biomechanical system. Models are divided into two parts: directly operated muscular system and a part reflecting locomotion of an apparatus, representing itself as an elastic support. Interaction of these parts is shown and the design of the procedure of full models in computing experiment on the COMPUTER is proposed.

Keywords: synthesis, control, locomotion, mathematical model, kinematic level, biomechanical system.

Введение

Наличие объективной информации о технике спортивных упражнений является одним из факторов, способствующим повышению эффективности учебно-тренировочного процесса. Особую значимость это положение приобретает в спортивной и художественной гимнастике, акробатике, прыжках на батуте и в воду и в ряде других видах спорта, в которых техническая подготовка доминирует над остальными сторонами спортивной подготовки [1], [2].

В настоящее время можно выделить два основных направления, по которым осуществляется исследование техники спортивных упражнений. К первому относится достаточно широко распространенный метод анализа кинематической и динамической структуры двигательных действий, ко второму – синтез движений человека в имитационном моделировании на ЭВМ [2].

Синтез целенаправленного движения позволяет программировать движение спортсмена, выстраивая все характеристики с учетом геометрии масс конкретного исполнителя и его тренированности. Другими словами, это направление позволяет создавать новые виды движений, т. е. спортивных упражнений, а также разрабатывать индивидуальную технику выполнения любых упражнений для конкретного спортсмена. Данное направление в области биомеханики имеет небольшую историю развития, пока рассматривает

лишь ограниченный круг задач и строит свои выводы на достаточно упрощенных схемах. Причинами являются как существенные трудности, связанные с использованием инструментальных методов исследования, так и с отсутствием математических моделей синтеза целенаправленного движения биомеханических систем, учитывающих ряд факторов, существенным образом оказывающих влияние на движение спортсмена в целом. Кроме того, необходима методика использования подобных расчетных моделей в вычислительном эксперименте на ЭВМ [3], [4].

Важнейшим из факторов, до недавнего времени не принимавшимся в расчет, является спортивный снаряд, выступающий в роли упругой опоры. Расчет по моделям анализа показывает существенное влияние снаряда на величину как кинематических, так и динамических характеристик целенаправленного движения, в отдельные фазы спортивного упражнения усиливая или ослабляя ту или иную характеристику в разы или даже на порядок [5].

1 Математическая модель движения биомеханической системы

Расчетная схема биомеханической системы для случая моделирования опоры двумя пружинами приведена на рисунке 1.1. К звеньям приложены следующие силовые факторы: силы тяжести звеньев \bar{G}_i ; силы инерции $\bar{\Phi}_i$, приведен-

ные к центрам масс C_i соответствующих звеньев; дополнительные моменты M_u (пары инерционных сил), а также моменты управляющих сил мышечной системы $M_{i,i-1}$. Последние действуют относительно всех шарниров, кроме первого, т.е. опорного шарнира. А им является шарнир, моделирующий контакт рук со спортивным снарядом. В этом контакте во время движения появляется трение скольжения. Сама кинематическая пара обозначена как O_{01} . Возникающий при этом момент трения $M_{mp_{10}}$ равен по величине сумме моментов всех силовых факторов, участвующих в кинестатическом анализе и записанных относительно опорного шарнира.

Предложенная схема по рисунку 1.1 моделирует упражнение в спортивной гимнастике, выполняемое на перекладине. Таким упражнением может быть большой оборот вперед или назад. Здесь принято следующее допущение: выполняемое движение является плоским, а сама биомеханическая система представлена в виде трехзвенной системы: звено 1 – руки; звено 2 – голова и туловище; звено 3 – ноги.

Общий вид уравнения для момента управляющих мышечных сил относительно каждого шарнира $O_{i-1,i}$ N -звенной системы выглядит следующим образом [6]

$$M_{i,i-1} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0,r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j +$$

$$+ \ddot{L}_{0,b} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (1.1)$$

Здесь коэффициенты, учитывающие массу звеньев и их размеры, равны:

$$C_{ij} = \begin{cases} m_j S_j + L_j \sum_{s=j+1}^N m_s, & \text{если } i \leq j, \\ L_j \sum_{s=i}^N m_s, & \text{если } i > j. \end{cases}$$

$i=1, 2, \dots, N; j=0, 1, \dots, N; s \leq N$.

Аналитическое выражение коэффициентов для вычисления момента инерции массы N -звенной биомеханической системы в условиях упругой опоры построим, введя символ Кронекера. Последний равен

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Здесь j, k – буквенные индексы, соответствующие цифровым индексам коэффициентов A_{jk}

$$A_{jk} = \delta_{jk} (I_i + m_i S_i^2) + m_j L_j S_j (1 - \delta_{jk}) + \sum_{k=j+1}^N m_k L_i L_j,$$

где $j=1, 2, \dots, N; k=1, 2, \dots, N$.

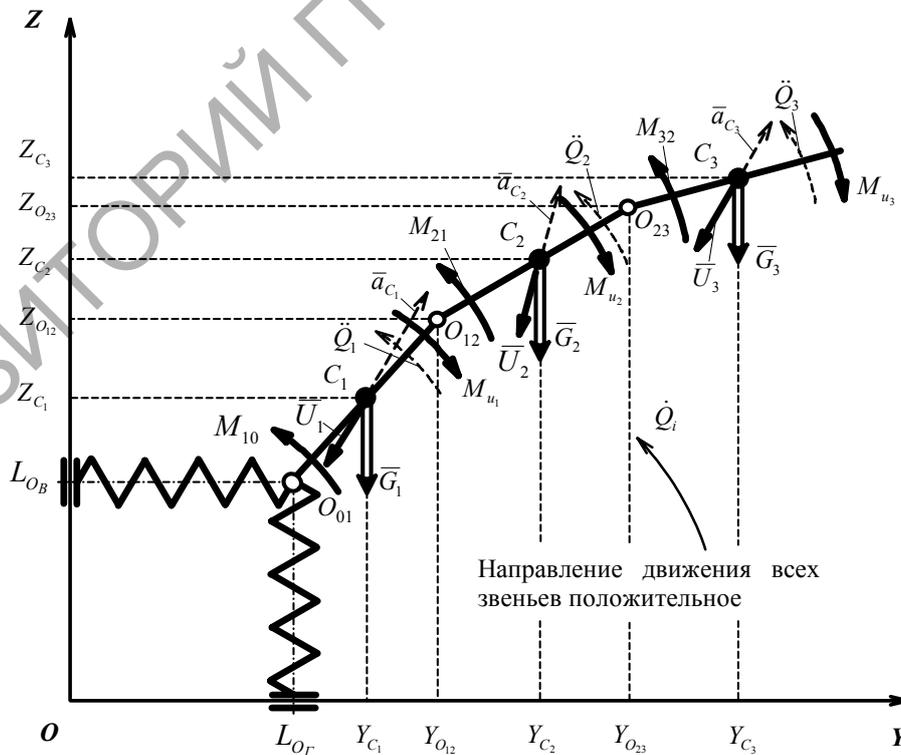


Рисунок 1.1 – Расчетная схема биомеханической системы

Коэффициенты, характеризующие опору, являются переменными $A_{0j} = var$, в отличие от коэффициентов для биосистемы $A_{jk} = const$, где $j > 0, k > 0$.

В уравнении (1.1) выделенная биомеханическая система, непосредственно отражающая движение спортсмена, имеет вид

$$M_{i,i-1}^{BMC} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (1.2)$$

Другая часть выражения показывает в явном виде связь движения опоры с моментами управляющих сил:

$$M_{i,i-1}^{OP} = \ddot{L}_{0b} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j. \quad (1.3)$$

Перепишем управляющий момент мышечных сил относительно шарнира $O_{i-1,i}$ через сумму моментов выделенных опоры и биомеханической системы:

$$M_{i,i-1} = M_{i,i-1}^{OP} + M_{i,i-1}^{BMC}. \quad (1.4)$$

В задачах синтеза движения с учетом взаимодействия спортсмена с опорой необходимо представить модель (1.1) не только через спортивный снаряд и биомеханическую систему (1.3) и (1.2), но и через пассивную и активную части с точки зрения управления мышечной системой. Перепишем выражение (1.4) в общем виде как

$$M_{i,i-1} = M_{i,i-1}^{ПАС} + M_{i,i-1}^{АКТ} = M_{i,i-1}^{ОП_ПАС} + M_{i,i-1}^{ПАС_БМС} + M_{i,i-1}^{АКТ_БМС}.$$

К пассивной части относится часть, отражающая движение опоры и действие силы тяжести. Подробно, исходя из выражения (1.1), ее можно записать в виде

$$M_{i,i-1}^{ПАС} = \ddot{L}_{0b} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j.$$

Активная часть – это управление на уровне моментов, задаваемое мышечной системой человека. Она принимает вид

$$M_{i,i-1}^{АКТ} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j).$$

Таким образом, пассивные части находятся в выделенной опоре и выделенной биомеханической системе.

2 Моделирование на кинематическом уровне

Определим построенную в форме системы дифференциальных уравнений (1.1) математическую модель движений человека в качестве базовой математической модели движения биомеханической системы. Анализ структуры уравнений базовой математической модели показывает, что разрешить исходную систему уравнений можно относительно как ее левой, так и правой частей. Это позволяет ставить и решать два класса задач биомеханики движений спортсмена: задачу анализа и задачу синтеза движений биомеханических систем.

Отметим, что спортивный снаряд, с точки зрения управления движением спортсмена, является системой пассивной, так как управление осуществляется за счет мышечной системы, а опора уже корректирует предложенную программу движения. Поэтому рассмотрим, в первую очередь, выделенную биомеханическую систему по выражению (1.2).

Так как программное управление задано в форме изменения суставных углов по времени, то его можно представить в виде функциональной зависимости от разности обобщенных координат по времени. Так как в уравнениях (1.1) и (1.2) программное управление задано в форме изменения суставных углов по времени, то его можно представить в виде функциональной зависимости от разности обобщенных координат Q_j по времени. Формализуя программное управление для непрерывной модели, запишем общую структуру управляющих воздействий в виде [2]

$$u_z = Q_{z+1} - Q_z, \quad z = 1, 2, \dots, N-1.$$

Данная запись означает изменение разности обобщенных координат $Q_{z+1} - Q_z$ по времени. Первая и вторая производные от управляющих воздействий по времени имеют вид:

$$\dot{u}_z = \dot{Q}_{z+1} - \dot{Q}_z,$$

$$\ddot{u}_z = \ddot{Q}_{z+1} - \ddot{Q}_z, \quad z = 1, 2, \dots, N-1.$$

Кинематическую связь, наложенную на обобщенные координаты биомеханической системы, через программное управление запишем как:

$$Q_{z+1} = Q_z + u_z, \quad z = 1, 2, \dots, N-1.$$

Кинематическую связь в общем виде представим в форме

$$Q_p = Q_i + \sum_{z=1}^{p-1} u_z,$$

$$\dot{Q}_p = \dot{Q}_i + \sum_{z=1}^{p-1} \dot{u}_z,$$

$$\ddot{Q}_p = \ddot{Q}_i + \sum_{z=1}^{p-1} \ddot{u}_z, \quad p = 2, 3, \dots, N.$$

Тогда уравнение (1.1) запишем через управляющие функции как

$$M_{i,i-1} = \left[\ddot{L}_{0_b} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0_r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j \right] + \left[g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j \right] + \left[\sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} (\ddot{Q}_1 + \sum_{s=1}^{k-1} \ddot{u}_s) \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} (\dot{Q}_1 + \sum_{s=1}^{k-1} \dot{u}_s)^2 \sin(Q_k - Q_j) \right]. \quad (2.1)$$

Отметим, что управление осуществляется за счет управления движением биомеханической системы, т. е. звеньев с 1 по N . Спортивный снаряд при этом оказывается пассивным элементом. Выделенная из выражения (2.1) биомеханическая система имеет вид

$$M_{i,i-1}^{BMC} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} (\ddot{Q}_1 + \sum_{s=1}^{k-1} \ddot{u}_s) \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} (\dot{Q}_1 + \sum_{s=1}^{k-1} \dot{u}_s)^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (2.2)$$

Система уравнений (2.2) разрешима относительно \ddot{Q}_1 любым из способов, известных в теории матричных операций и линейных уравнений. Остальные обобщенные координаты, обобщенные скорости и обобщенные ускорения определяются через управляющие функции на каждом шаге интегрирования математической модели синтеза движений человека.

Сведем все возможные способы построения программного управления на кинематическом уровне в таблицу 2.1.

В таблице 2.1 отражены функциональные связи, накладываемые на определенные группы кинематических характеристик и определяющие характер задания программы движения в целом и программного управления в частности. По формам задания функциональных связей в программном управлении можно выделить 3 главные группы связей, существующих между звеньями биомеханической системы:

- по обобщенным координатам;
- по обобщенным скоростям;
- по обобщенным ускорениям.

Четвертая группа включает всевозможные сочетания из элементов трех главных групп: одновременно часть программных управлений представлена первой формой функциональной связи, часть – второй, оставшиеся – третьей, а также возможны их комбинации.

3 Управление на динамическом уровне

Задачу синтеза движений человека с программным управлением на динамическом уровне можно сформулировать следующим образом: для биомеханической системы определить траекторию на интервале $t \in [t_0, t_L]$, если для любого момента времени $t \in [t_0, t_L]$ известно программное управление, заданное в форме закона изменения управляющих моментов мышечных сил в суставах спортсмена по времени [2].

Так как управление происходит за счет мышечной системы, то используем выражение (1.2), относящееся непосредственно к спортсмену. Введем обозначение для управляющих функций в виде $u_{i,i-1}^{BMC} = M_{i,i-1}^{BMC}$. Уравнение (1.2) примет вид

$$u_{i,i-1}^{BMC} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j), \quad (3.1)$$

где $i=1, 2, \dots, N$.

После преобразований имеем

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) + u_{i,i-1}^{BMC} - g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j.$$

Таблица 2.1 – Управление на кинематическом уровне

Кинематический уровень задания управляющих функций $u(i)$			
Форма $u(i)$	Типы решаемых задач		
	1	2	3
1	По разнице обобщенных координат $u_i = f(Q_{i+1} - Q_i)$	По обобщенным координатам $u_i = f(Q_i)$	По обобщенным координатам и их разнице в сочетании $u_i = f(Q_i, Q_{i+1} - Q_i)$
2	По разнице обобщенных скоростей $\dot{u}_i = f(\dot{Q}_{i+1} - \dot{Q}_i)$	По обобщенным скоростям $\dot{u}_i = f(\dot{Q}_i)$	По обобщенным скоростям и их разнице в сочетании $\dot{u}_i = f(\dot{Q}_i, \dot{Q}_{i+1} - \dot{Q}_i)$
3	По разнице обобщенных ускорений $\ddot{u}_i = f(\ddot{Q}_{i+1} - \ddot{Q}_i)$	По обобщенным ускорениям $\ddot{u}_i = f(\ddot{Q}_i)$	По обобщенным ускорениям и их разнице в сочетании $\ddot{u}_i = f(\ddot{Q}_i, \ddot{Q}_{i+1} - \ddot{Q}_i)$
4	Сочетания из форм 1, 2, 3	Сочетания из форм 1, 2, 3	Сочетания из форм 1, 2, 3

Данную систему уравнений необходимо решать относительно обобщенных ускорений \ddot{Q}_k , определяющих эволюцию биомеханической системы во времени.

Это управление без учета опоры. Выполнив силовой расчет, рассчитывают деформацию опоры на всей траектории. Для модели (1.1) это означает определение обобщенных координат и обобщенных ускорений L_{0_b} , L_{0_r} , \ddot{L}_{0_r} , \ddot{L}_{0_b} с целью дальнейшего расчета полного момента мышечных сил $M_{i,i-1}$ с учетом взаимодействия человека со спортивным снарядом.

4 Моделирование движения упругой опоры

После расчета по моделям (2.2) на кинематическом уровне или моделям (3.1) на уровне динамическом необходимо выполнить силовой расчет в несколько этапов. На первом этапе определяют проекции реакций, возникающих при действии биомеханической системы на опору, по моделям

$$R_{(i,i-1)_y}^{BMC} = -\sum_{j=1}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=1}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \cos Q_j,$$

$$R_{(i,i-1)_z}^{BMC} = \sum_{j=1}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \cos Q_j - \sum_{j=1}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \sin Q_j + \sum_{p=i}^N G_p.$$

Здесь $i=1$. Данные силы вызывают деформацию спортивного снаряда. Последнюю можно определить любым методом, разработанным в сопротивлении материалов для расчета упругих деформаций при изгибе балок. В результате получим группу параметров \ddot{L}_{0_r} , \ddot{L}_{0_b} , характеризующих движение спортивного снаряда в моделях (1.1) и пригодных для синтеза на кинематическом и динамическом уровнях.

После этого рассчитывается дополнительная реакция, возникающая из-за действия биомеханической системы на упругую опору

$$R_{(i,i-1)_y}^{OP} = m_{i,N} \ddot{L}_{0_r}, \quad R_{(i,i-1)_z}^{OP} = m_{i,N} \ddot{L}_{0_b}.$$

Здесь $m_{i,N}$ – массовые коэффициенты. Данное выражение необходимо решать при $i=1$, используя существующие методы вычисления подобных задач [7]. Таким образом, на спортивный снаряд действует полная реакция, определяемая через ее проекции на координатные оси, как

$$R_{(i,i-1)_y} = R_{(i,i-1)_y}^{OP} + R_{(i,i-1)_y}^{BMC},$$

$$R_{(i,i-1)_z} = R_{(i,i-1)_z}^{OP} + R_{(i,i-1)_z}^{BMC}.$$

Силовой расчет в таком виде дает возможность решить систему уравнений (1.1), определяя ее на кинематическом или динамическом уровне, в зависимости от поставленной задачи.

Заключение

Решая задачи синтеза целенаправленного движения биомеханической системы, можно спроектировать спортивное упражнение для конкретного исполнителя. Задача имеет несколько уровней: кинематический и динамический, которые задаются исследователем. При этом представленные модели хорошо структурированы и разбиваются на часть, относящуюся к спортивному снаряду, и часть, отражающую непосредственное движение человека.

Показано, что непосредственное управление в виде заданных управляющих функций направлено на биомеханическую систему, т.е. опорно-двигательный аппарат человека. Вторая часть, относящаяся к движению спортивного снаряда, с точки зрения управления является частью пассивной и лишь корректирует значения конечных функций на кинематическом и динамическом уровнях. Для ее определения необходимо выполнить силовой расчет по предлагаемым моделям, используя стандартные методики из соответствующих разделов сопротивления материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Загrevский, В.И. Расчетные модели кинематики и динамики биомеханических систем / В.И. Загrevский. – Томск – Могилев, 1999. – 156 с.
2. Загrevский, В.И. Построение оптимальной техники спортивных упражнений в вычислительном эксперименте на ПЭВМ / В.И. Загrevский, Д.А. Лавшук, О.И. Загrevский. – Могилев–Томск, 2000. – 190 с.
3. Васильков, Ю.В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании / Ю.В. Васильков, Н.Н. Василькова. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 256 с.
4. Крутов, В.И. Основы научных исследований: учебник для техн. вузов / В.И. Крутов, И.М. Грушко, В.В. Попов; под ред. В.И. Крутова, В.В. Попова. – М.: Высшая школа, 1989. – 400 с.
5. Покатилов, А.Е. Биомеханика взаимодействия спортсмена с упругой опорой / А.Е. Покатилов; под ред. В.И. Загrevского. – Минск: Изд. центр БГУ, 2006. – 351 с.
6. Покатилов, А.Е. Биодинамические исследования спортивных упражнений в условиях упругой опоры / А.Е. Покатилов, В.И. Загrevский, Д.А. Лавшук. – Минск: Изд. центр БГУ, 2008. – 279 с.
7. Шуп, Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. – М.: Мир, 1982. – 238 с.

Поступила в редакцию 10.07.13.