

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

М. С. БЕЛОКУРСКИЙ, А. В. ГЕРМАН

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**Приведение к каноническому виду и общее решение
уравнений с частными производными второго порядка**

Практическое пособие

для студентов математических специальностей

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2016

УДК 517. 958(076)
ББК 22.161.68я73
Б435

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук,
профессор В. И. Мироненко,
кандидат физико-математических наук С. П. Новиков

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»

Белокурский, М. С.

Б435 Уравнения математической физики. Приведение к каноническому виду и общее решение уравнений с частными производными второго порядка : практическое пособие / М. С. Белокурский, А. В. Герман ; М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2016. – 28 с.
ISBN 978-985-577-195-2

Практическое пособие разработано в соответствии с требованиями государственного стандарта подготовки специалистов специальностей «Математика», «Прикладная математика», «Экономическая кибернетика». В пособии содержится материал по темам «Приведение к каноническому виду уравнений с частными производными второго порядка», «Общее решение некоторых уравнений с частными производными второго порядка».

Адресовано студентам математического факультета.

УДК 517.958(076)
ББК 22.161.68я73

ISBN 978-985-577-195-2

© Белокурский М. С., Герман А. В., 2016
© Учреждение образования «Гомельский
государственный университет
имени Франциска Скорины», 2016

Оглавление

Предисловие	4
Тема 1. Приведение к каноническому виду уравнений с частными производными второго порядка.....	5
Тема 2. Общее решение некоторых уравнений с частными производными второго порядка.....	19
Литература	28

Предисловие

Практическое пособие «Приведение к каноническому виду и нахождение общего решения уравнений с частными производными второго порядка» по уравнениям математической физики составлено в соответствии с действующей программой по данной дисциплине для математических специальностей университетов. Пособие состоит из 2 разделов: приведение к каноническому виду уравнений с частными производными второго порядка; общее решение некоторых уравнений с частными производными второго порядка. Каждый раздел содержит варианты заданий с примерами решения типовых задач. Нумерация заданий – в пределах каждого раздела, нумерация формул – сквозная. При составлении практического пособия авторы использовали литературу, список которой приводится в конце издания. Материал пособия подготовили М. С. Белокурский, А. В. Герман.

Практическое пособие по уравнениям математической физики предназначено для организации учебного процесса дневного отделения математического факультета по специальностям 1-31 03 01 02 «Математика», 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)», 1-31 03 03-02 «Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность)», 1-31 03 06 01 «Экономическая кибернетика (математические методы в экономике)». Также издание может быть использовано при проведении практических занятий и формировании индивидуальных заданий студентам различных форм обучения.

Тема 1

Приведение к каноническому виду уравнений с частными производными второго порядка

Краткие теоретические сведения

Уравнением с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными x и y называется соотношение между неизвестной функцией $U(x, y)$ и ее частными производными до второго порядка включительно:

$$F(x, y, U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}) = 0,$$

где $U_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $U_y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $U_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$.

Аналогично записывается уравнение и для большего числа независимых переменных.

Уравнение называется *линейным относительно старших производных*, если оно имеет вид

$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xy} + a_{22}U_{yy} + F_1(x, y, U, U_x, U_y) = 0, \quad (1)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y .

Если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят не только от x и y , а являются, подобно F_1 , функциями x, y, U, U_x, U_y , то такое уравнение называется *квазилинейным*.

Уравнение называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных U_{xx}, U_{xy}, U_{yy} , так и относительно функции U и ее первых производных U_x, U_y :

$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xy} + a_{22}U_{yy} + b_1U_x + b_2U_y + b_3U + f(x, y) = 0, \quad (2)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, b_3$ — функции только от x и y .

Если коэффициенты уравнения (2) не зависят от x и y , то оно представляет собой линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Уравнение называется однородным, если $f(x, y) = 0$.

С помощью преобразования переменных $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, допускающего обратное преобразование, можно получить новое уравнение, эквивалентное исходному. Ниже приведен алгоритм, позволяющий относительно старших производных для линейного уравнения (1) выбрать ξ и η такими, чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее простую форму.

Уравнение

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \quad (3)$$

называется **характеристическим** для уравнения (1), а его интегралы – **характеристиками**. Уравнение (3) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (4)$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения (1). Это уравнение называется в точке $M(x, y)$ уравнением:

- а) **гиперболического** типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$;
- б) **параболического** типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$;
- в) **эллиптического** типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

Эта терминология заимствована из теории кривых второго порядка. В различных точках области определения уравнение (1) может принадлежать различным типам.

Будем рассматривать такую область G , во всех точках которой уравнение (1) имеет один и тот же тип. Через каждую точку области G проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнений эллиптического типа – комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают между собой.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

Для уравнений гиперболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ и правые части уравнений (4) действительны и различны. Их общие интегралы

$\varphi(x, y) = c_1$, $\psi(x, y) = c_2$ определяют действительные семейства характеристик. Полагая $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ и преобразуя производные к новым переменным по формулам:

$$\begin{aligned} U_{xx} &= U_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + U_{\eta\eta}\eta_x^2 + U_{\xi}\xi_{xx} + U_{\eta}\eta_{xx}, \\ U_{yy} &= U_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + U_{\eta\eta}\eta_y^2 + U_{\xi}\xi_{yy} + U_{\eta}\eta_{yy}, \\ U_{xy} &= U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + U_{\xi}\xi_{xy} + U_{\eta}\eta_{xy}, \\ U_x &= U_{\xi}\xi_x + U_{\eta}\eta_x, \quad U_y = U_{\xi}\xi_y + U_{\eta}\eta_y, \end{aligned} \quad (5)$$

приводим уравнение (1) после деления на коэффициент при $U_{\xi\eta}$ к виду

$$U_{\xi\eta} = \Phi(U_{\xi}, U_{\eta}, U, \xi, \eta). \quad (6)$$

Это так называемая каноническая форма уравнений гиперболического типа. Часто пользуются второй канонической формой

$$U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = \Phi_1(U_{\alpha}, U_{\beta}, U, \alpha, \beta).$$

Ее можно получить из (6), положив $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, т. е. $\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \frac{\xi - \eta}{2}$, где α и β – новые переменные.

Для уравнений параболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ уравнения (4) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (3) $\varphi(x, y) = c$. Положим в этом случае $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ – любая функция, независимая от $\varphi(x, y)$. Преобразуя производные в уравнении (1) к новым переменным по формулам (5), получаем после деления на коэффициент при $U_{\eta\eta}$ каноническую форму для уравнения параболического типа

$$U_{\eta\eta} = \Phi(U_{\xi}, U_{\eta}, U, \xi, \eta). \quad (7)$$

Если в правую часть не входит U_{ξ} , то уравнение (7) будет обыкновенным дифференциальным уравнением, зависящим от ξ как от параметра.

Для уравнения эллиптического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ и правые части уравнений (4) комплексны. Пусть $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = c$ – комплексный

интеграл первого из уравнений (4). Тогда $\varphi(x, y) - i\psi(x, y) = c$ будет представлять собой общий интеграл второго уравнения (4). Полагая $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ и преобразуя производные к новым переменным по формулам (5), приводим уравнение (1) после деления на коэффициент при $U_{\xi\xi}$ к каноническому виду:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \Phi(U_{\xi}, U_{\eta}, U, \xi, \eta).$$

Таким образом, в зависимости от знака выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ имеют место следующие канонические формы уравнения (1):

- $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (гиперболический тип) – $U_{xy} = \Phi$ или $U_{xx} - U_{yy} = \Phi$;
- $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (эллиптический тип) – $U_{xx} + U_{yy} = \Phi$;
- $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ (параболический тип) – $U_{xx} = \Phi$.

О классификации уравнений второго порядка в случае, когда независимых переменных больше двух, и приведении их к каноническому виду можно узнать в [1, с. 22–26], [2, с. 100–106], [3, с. 13–17].

Задачи

1.1. Найти области гиперболичности, параболичности и эллиптичности уравнения. Сделать рисунок.

1. $yU_{xx} + 2\sqrt{x}U_{xy} + (y-3)U_{yy} + (x^2 + \cos y)U_y - 4xyU = 0$.
2. $(x-1)U_{xx} + 2\sqrt{y}U_{xy} + (x-4)U_{yy} + (x^2 + y)U_x - 4U_y + 25xy^5 = 0$.
3. $(\sin x + 1)U_{xx} + 2\sqrt{y}U_{xy} - U_{yy} + (x^2y^3 + y)U_x - 4xyU_y + 4x\cos y = 0$.
4. $\lg(x-3)U_{xx} + 2\sqrt{y}U_{xy} + U_{yy} + U_x - 4^{xy}U_y + 4x\cos(y-2x) = 0$.
5. $3\sin xU_{xx} + 2\sqrt{y}U_{xy} + U_{yy} - 4xy^2U = 0$.
6. $(x^2 - 2)U_{xx} + 2\sqrt{y}U_{xy} + U_{yy} + yU = 0$.
7. $\sqrt{y}U_{xx} - 2xU_{xy} - \sqrt{y}U_{yy} + (x^2 + \sin y)U_x - xU = 0$.
8. $\sqrt{y}U_{xx} + 2U_{xy} - \sqrt{y}U_{yy} + x^2U_x - xU_y = 0$.
9. $(6+y)U_{xx} - 2x\sqrt{x}U_{xy} - U_{yy} + (1+x^2-y)U_y - 9U = 0$.
10. $(1+x^2)U_{xx} + 2(1+y)U_{xy} + U_{yy} + x^2U_y - xU_x - \ln x = 0$.
11. $(2\cos x - y)U_{xx} - 2U_{xy} - U_{yy} + x^2U + \sin\sqrt{x} = 0$.
12. $(\sin x + y)U_{xx} - 2U_{xy} - U_{yy} + (1 + \cos x^2 - 2\lg y)U_x - (y-3)U_y = 0$.
13. $(4-y^2)U_{xx} - 2\sqrt{x}U_{xy} + U_{yy} + (x^2 - y^3)U_x - xyU_y = 0$.

14. $yU_{xx} - 2^{3-x}U_{xy} + U_{yy} + \frac{3}{\sqrt{y}}U_y - 9x^3U = 0.$
15. $(2\sin x + y)U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} + x^2U_y - 9U + \sqrt{x} = 0.$
16. $4U_{xx} - 2yU_{xy} - (x^2 - 4)U_{yy} + (x^2 - \cos y)U_y - \sqrt{x}U = 0.$
17. $U_{xx} - 2\sqrt{y}U_{xy} - (x^2 - 3x - 4)U_{yy} + \sin(1 + x^2 - y)U = 0.$
18. $(\log_2 x + y)U_{xx} - 2U_{xy} - U_{yy} + (x^2 - y)U_y = 0.$
19. $(x - 2)U_{xx} - 2\sqrt{y}U_{xy} + (x + 3)U_{yy} + yU_x + U = 0.$
20. $yU_{xx} - 2e^xU_{xy} + U_{yy} + (1 - \sqrt{y})U_x - yU_y = 0.$
21. $yU_{xx} - 4\sqrt{x}U_{xy} - U_{yy} - (x + x^4 + 4y^2)U_x - 9xU = 0.$
22. $(y + 3^{x-2})U_{xx} + 2U_{xy} - U_{yy} + (1 + x^2 - \sin \sqrt{y})U_x = 0.$
23. $(1 - 4x - x^2)U_{xx} - 2\sqrt{y}U_{xy} - U_{yy} + (1 + x^2)U_x - yU_y = 0.$
24. $\sqrt{4 - x^2}U_{xx} - 2\sqrt{y}U_{xy} - U_{yy} + (3 + \sin x^2 - y)U_x - 9U_y = 0.$
25. $U_{xx} + 2\sqrt{x}U_{xy} + |y - 3|U_{yy} + x^2U_y - U = 0.$
26. $\sqrt{x}U_{xx} + 2\sqrt{y}U_{xy} + U_{yy} + U_x - 4U_y = 0.$
27. $\frac{1}{x}U_{xx} + 2\sqrt{y}U_{xy} - U_{yy} + x^2y^3U_x - xU_y = 0.$
28. $\frac{1}{(x-3)^2}U_{xx} + 2\sqrt{y}U_{xy} + U_{yy} + U_x - 2^xU_y = 0.$
29. $\cos xU_{xx} + 2\sqrt{y}U_{xy} + U_{yy} + (x^2 + 3y^3)U_x = 0.$
30. $(x^2 - 4)U_{xx} + 2yU_{xy} + U_{yy} + \sqrt{y}U = 0$

1.2. Привести уравнение двух переменных к каноническому виду.

1. $U_{xx} + 2U_{xy} + 5U_{yy} + 3xU = 0.$
2. $U_{xx} + U_{yy} - 2U_{xy} - 9U - x = 0.$
3. $5U_{xx} + 2U_{xy} + 2U_{yy} + yU_x = 0.$
4. $2U_{yy} + 4U_{xx} + 4U_{xy} + 3yU_y = 0.$
5. $6U_{xy} - U_{xx} - 5U_{yy} + 6yU = 0.$
6. $U - U_{xx} + 2U_{xy} - 5U_{yy} - 3y = 0.$
7. $xU_x - 5U_{xx} + 2U_{xy} - 10U_{yy} = 0.$
8. $U_{xx} + 2U_{xy} - 8U_{yy} + 5xU_y = 0.$
9. $U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} + 4y - 7 = 0.$
10. $U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} = 1 - 5x.$

11. $U_{xx} + 4U_{xy} + 6U_{yy} - xU_y = 0.$
12. $5U_{xx} - 6U_{xy} + 2U_{yy} - 2x = U_x.$
13. $U_{xx} + 4U_{xy} + 4U_{yy} + U_y - y = 0.$
14. $4y - 3U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} + U_x = 0.$
15. $U_{xx} + 2U_{xy} + 2U_{yy} - U_y - 6x = 0.$
16. $U_{xx} - 4U_{xy} + 5U_{yy} + 5x - 8y = 0.$
17. $U_{xx} + 9U_{yy} + U_y - 9U = 6U_{xy}.$
18. $5U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} - U_x + 2U = 0.$
19. $2U_{xx} - 6U_{xy} + 5U_{yy} + 3U_y = 9.$
20. $2U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} - U_x + 1 = 0.$
21. $6U_{xy} + 9U_{xx} + U_{yy} + x - 2y + U = 0.$
22. $6U_{xx} + 2U_{xy} - 4U_{yy} + 5x + y - 1 = 0.$
23. $U_{yy} + 5U_{xx} + 2U_{xy} + (x - 8)U_y = 0.$
24. $2U_{xx} + 2U_{xy} + 5U_{yy} + (7y + 1)U_y = 0.$
25. $4U_{xx} + U_{yy} + (5x - 8)U_x = 4U_{xy}.$
26. $5U_{xx} - 4U_{xy} - U_{yy} - (6 + 7y)U_x = 0.$
27. $5U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} + U = \sin^2 x.$
28. $4U_{xx} - 4U_{xy} + 5U_{yy} + U + (y - 7)^8 = 0.$
29. $4U_{xx} + 4U_{xy} + \cos(x - 6y + 2) = 3U_{yy}.$
30. $7U_{xx} - 4U_{xy} - 3U_{yy} - e^{8x-y} = 0.$

1.3. Привести уравнение к каноническому виду.

1. $25U_{xx} - 30U_{xy} + 9U_{yy} - U_{zz} - 3U_z = 0.$
2. $9U_{xx} + U_{yy} + 4U_{zz} + 6U_{xy} + 12U_{xz} + 4U_{yz} + xU_x = 0.$
3. $13U_{xx} + U_{yy} - U_{zz} + 6U_{xy} - yU_z = 0.$
4. $13U_{xx} + U_{yy} + 4U_{zz} + 6U_{xy} + 12U_{xz} + 4U_{yz} + xU_y = 0.$
5. $13U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} + 6U_{xy} - 4U_{xz} - U_x = 0.$
6. $5U_{xx} + 10U_{yy} + 4U_{zz} + 14U_{xy} + 4U_{xz} + 4U_{yz} + xU = 0.$
7. $8U_{xx} + 6U_{xy} + 12U_{xz} + U_{yy} + 3U_{zz} + 4U_{yz} + xU_y = 0.$
8. $13U_{xx} + U_{yy} + 25U_{zz} + 6U_{xy} - 7yU = 0.$
9. $13U_{xx} + 6U_{xy} - 4U_{xz} + U_{zz} + 4U_{yz} + 5U_z = 0.$
10. $U_{xx} + 10U_{yy} + 5U_{zz} + 2U_{xy} + 4U_{xz} + 4U_{yz} + 7yU_x = 0.$

11. $U_{xx} + 6U_{xy} + 9U_{yy} + U_{zz} + 7U_y = 0.$
12. $9U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} - 6U_{xy} + 6U_{xz} - 2U_{yz} + U_z = 0.$
13. $9U_{xx} + U_{yy} + 4U_{zz} + 6U_{xy} - 12U_{xz} - 4U_{yz} + U_y = 0.$
14. $U_{xx} - 2U_{xy} - 4U_{xz} + U_{yy} + 4U_{zz} + 4U_{yz} - zU_{zz} = 0.$
15. $-3U_{xx} + 2U_{xz} + U_{zz} + 7xU = 0.$
16. $U_{xx} - 3U_{yy} + 4U_{zz} + 2U_{xy} + 4U_{xz} + 4U_{yz} - yU = 0.$
17. $9U_{xx} - 8U_{yy} - 4U_{zz} - 6U_{xy} - 12U_{yz} + U_z = 0.$
18. $9U_{xx} + 12U_{xz} - 9U_{yy} - 6U_{yz} + 3U_{zz} + zU_x = 0.$
19. $8U_{xx} + 4U_{zz} + 6U_{xy} + 12U_{xz} + 4U_{yz} + 2xU = 0.$
20. $U_{xx} + 26U_{yy} - 4U_{zz} + 2U_{xy} + U_x = 0.$
21. $30U_{xx} + 6U_{xy} + U_{yy} - 4U_{xz} - U_{zz} - 3U_y = 0.$
22. $U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{xz} - 8U_{yy} + 4U_{yz} + 4U_{zz} + U_x = 0.$
23. $9U_{xx} + 9U_{yy} + 12U_{yz} - 3U_{zz} + 4U_y = 0.$
24. $5U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} - 16U_{zz} - 3U_z = 0.$
25. $-21U_{xx} + 10U_{yy} + 4U_{zz} + 12U_{xy} + 4U_{yz} + yU = 0.$
26. $U_{xx} - 9U_{zz} + 2U_{xy} - 7U_x = 0.$
27. $5U_{xx} - U_{zz} + 6U_{xy} - 4U_{xz} - 5U_z = 0.$
28. $-8U_{yy} + 4U_{zz} + 2U_{xy} + 4U_{xz} + 4U_{yz} + zU = 0.$
29. $U_{xx} + 8U_{yy} + U_{zz} + 4U_{xy} + 4U_{yz} + 3yU = 0.$
30. $U_{xx} - U_{zz} - 4U_{yz} - U_y = 0.$

Образцы решения типовых задач

Задача 1.1. Найти области гиперболичности, параболичности и эллиптичности уравнения

$$(|x| - 4)U_{xx} - 2\sqrt{y}U_{xy} - U_{yy} + (1 - \log_2(x + 3))U_x = 0. \quad (8)$$

Сделать рисунок.

Решение. Сначала найдем область определения уравнения (8). Поскольку это уравнение содержит функции $\sqrt{y}$ и $\log_2(x + 3)$, то должны выполняться условия: $y \geq 0$, $x > -3$.

Введем обозначение $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \delta$. Для уравнения (8)

$$\delta = (\sqrt{y})^2 - (|x| - 4)(-1) = y + |x| - 4.$$

Пусть $\delta = 0$. Тогда $y + |x| - 4 = 0$ и, следовательно, $y = 4 - |x|$. Пусть теперь $\delta > 0$. Тогда $y > 4 - |x|$. И, наконец, если $\delta < 0$, то $y < 4 - |x|$. Таким образом, область параболичности имеет вид $\{(x, y) \mid y = 4 - |x|, y \geq 0, x > -3\}$, область гиперболичности – $\{(x, y) \mid y + |x| - 4 > 0, y \geq 0, x > -3\}$ и область эллиптичности – $\{(x, y) \mid y + |x| - 4 < 0, y \geq 0, x > -3\}$. Чтобы изобразить эти области на рисунке, нужно сперва построить график линии $\delta = 0$ с учетом области определения (в нашем случае это линия $y = 4 - |x|$). Затем различной штриховкой отметить области, в которых $\delta > 0$ и $\delta < 0$.

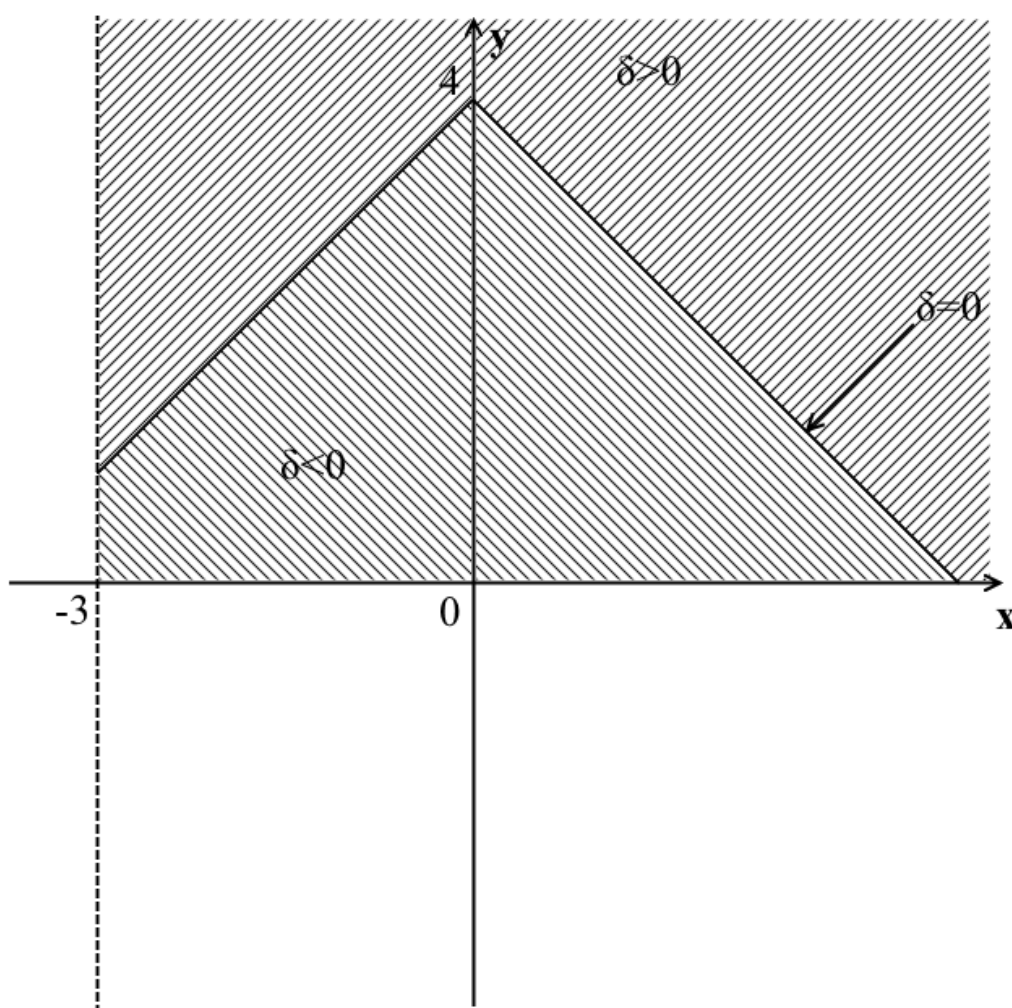


Рисунок 1 – Области гиперболичности, параболичности и эллиптичности уравнения

Задача 1.2. 1. Привести уравнение

$$U_{xx} - 20U_{xy} + 109U_{yy} + yU_x - U = 0 \quad (9)$$

двух переменных к каноническому виду.

Решение. Как и в предыдущей задаче вычисляем $\delta = 10^2 - 1 \cdot 109 = -9$. Далее необходимо составить характеристическое уравнение. Можно сразу же использовать уравнения (4), однако еще удобнее переписать их в виде

$$a_{11}dy = (a_{12} \pm \sqrt{\delta})dx.$$

Если $a_{11} \equiv 0$, то пользуются другой формулой

$$a_{22}dx = (a_{12} \pm \sqrt{\delta})dy.$$

Для уравнения (9) имеем

$$dy = (-10 \pm \sqrt{-9})dx.$$

Так как $\sqrt{-9} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = 3i$, то $dy = (-10 \pm 3i)dx$.

Полученные уравнения являются обыкновенными дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными. Интегрируя эти уравнения, находим их общие решения:

$$y = (-10 + 3i)x + c_1, \quad y = (-10 - 3i)x + c_2.$$

Возьмем одно из найденных общих решений, например второе, и перепишем следующим образом:

$$y + 10x + 3xi = c_2.$$

Действительную часть функции из левой части последнего равенства обозначим через ξ , а мнимую часть – через η :

$$\xi = y + 10x, \quad \eta = 3x. \quad (10)$$

Теперь в уравнении (9) можно ввести замену переменных (10) по формулам (5). Итак, используя эти формулы, заменяем:

$$\begin{aligned}U_{xx} &= 100U_{\xi\xi} + 60U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta}, & U_{yy} &= U_{\xi\xi}, \\U_{xy} &= 10U_{\xi\xi} + 3U_{\xi\eta}, & U_x &= 10U_{\xi} + 3U_{\eta}.\end{aligned}$$

Полученные выражения подставляем в уравнение (9):

$$100U_{\xi\xi} + 60U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta} - 20(10U_{\xi\xi} + 3U_{\xi\eta}) + 109U_{\xi\xi} + y(10U_{\xi} + 3U_{\eta}) - U = 0.$$

Раскрываем скобки и приводим подобные члены:

$$9U_{\xi\xi} + 9U_{\eta\eta} + 10yU_{\xi} + 3yU_{\eta} - U = 0.$$

Остается выразить y через ξ и η из соотношений (10) и подставить в последнее уравнение, а также разделить обе части получившегося уравнения на 9:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \frac{10}{9}\left(\xi - \frac{10}{3}\eta\right)U_{\xi} + \frac{1}{3}\left(\xi - \frac{10}{3}\eta\right)U_{\eta} - \frac{1}{9}U = 0.$$

Итак, уравнение (9) приведено к каноническому виду.

2. Привести уравнение двух переменных к каноническому виду:

$$25U_{xx} + 40U_{xy} + 16U_{yy} - 7xU_y = 0 \quad (11)$$

Решение. Вычисляем $\delta = 20^2 - 25 \cdot 16 = 0$. Поскольку $\delta = 0$, то можно составить только одно характеристическое уравнение по формуле

$$a_{11}dy = a_{12}dx.$$

Для уравнения (11) имеем

$$25dy = 20dx.$$

Разделив на 5 обе части полученного уравнения и проинтегрировав его, находим общее решение $5y = 4x + c$.

Перепишем последнее равенство следующим образом:

$$5y - 4x = c.$$

Обозначим $5y - 4x$ через ξ , а в качестве η можно взять любую функцию, не зависящую от $5y - 4x$. Функции ξ и η будут независимыми, если выполнено условие:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

В нашем случае положим $\eta = x$. Проверим, будут ли независимыми функции ξ и η . Итак,

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot 0 - 1 \cdot 5 = -5 \neq 0.$$

Так как функции ξ и η являются независимыми, то в уравнении (11) вводим замену переменных:

$$\xi = 5y - 4x, \quad \eta = x. \quad (12)$$

Используя формулы, (5) заменяем:

$$\begin{aligned} U_{xx} &= 16U_{\xi\xi} - 8U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, & U_{yy} &= 25U_{\xi\xi}, \\ U_{xy} &= -20U_{\xi\xi} + 5U_{\xi\eta}, & U_y &= 5U_{\xi}. \end{aligned}$$

Полученные выражения подставляем в уравнение (11):

$$25(16U_{\xi\xi} - 8U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}) + 40(-20U_{\xi\xi} + 5U_{\xi\eta}) + 16 \cdot 25U_{\xi\xi} - 7x \cdot 5U_{\xi} = 0.$$

Раскрываем скобки и приводим подобные члены:

$$25U_{\eta\eta} - 35xU_{\xi} = 0.$$

Из соотношений (12) заменяем x на η и подставляем в последнее уравнение, а также делим обе части получившегося уравнения на 25:

$$U_{\eta\eta} - \frac{7}{5}\eta U_{\xi} = 0.$$

Таким образом, уравнение (11) приведено к каноническому виду.

Задача 1.3. Привести уравнение к каноническому виду.

$$U_{zz} - 2U_{xy} - 2U_{xz} + 2U_{yz} - zU_x + U_y = 0 \quad (13)$$

Решение. Составим соответствующую уравнению (13) характеристическую форму:

$$Q = z^2 - 2xy - 2xz + 2yz. \quad (14)$$

Отметим, что характеристическая форма (14) является квадратичной, поскольку уравнение (13) – это линейное уравнение с частными производными второго порядка.

Теперь квадратичную форму (14) необходимо привести к каноническому виду. Для этого в (14) нужно выделить один, два или три полных квадрата с коэффициентами один или минус один при каждом из них, причем после этого не должно остаться ни одного слагаемого, не входящего в полные квадраты. Итак,

$$\begin{aligned} Q &= z^2 - 2xy - 2xz + 2yz = (x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz) - x^2 - y^2 = \\ &= (x - y - z)^2 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

После того как квадратичная форма (14) приведена к каноническому виду, следует составить матрицу по коэффициентам при переменных в выделенных полных квадратах:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее нужно найти матрицу $A = (B^{-1})^T$. Сначала найдем матрицу B^{-1} с помощью элементарных преобразований строк:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Итак, матрица

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A = (B^{-1})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что найти матрицу A можно было и не выписывая непосредственно матрицу B , а именно используя полные квадраты канонического вида квадратичной формы (14), составляем систему:

$$x - y - z = a, \quad x = b, \quad y = c.$$

Разрешаем эту систему относительно переменных x, y, z :

$$x = b, \quad y = c, \quad z = b - c - a.$$

Теперь, чтобы найти матрицу A , необходимо выписать матрицу коэффициентов правой части последней системы и транспонировать ее:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, тем или иным способом матрица A найдена. Далее в уравнении (13) вводим замену переменных

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ x+z \\ y-z \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Для этого используем формулы:

$$\begin{aligned} U_{xx} &= U_{\xi\xi}\xi_x^2 + U_{\eta\eta}\eta_x^2 + U_{\theta\theta}\theta_x^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + 2U_{\xi\theta}\xi_x\theta_x + 2U_{\eta\theta}\eta_x\theta_x + U_{\xi\xi\xi} + \\ &+ U_{\eta\eta\eta} + U_{\theta\theta\theta}, \\ U_{yy} &= U_{\xi\xi}\xi_y^2 + U_{\eta\eta}\eta_y^2 + U_{\theta\theta}\theta_y^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + 2U_{\xi\theta}\xi_y\theta_y + 2U_{\eta\theta}\eta_y\theta_y + U_{\xi\xi\xi} + \\ &+ U_{\eta\eta\eta} + U_{\theta\theta\theta}, \\ U_{zz} &= U_{\xi\xi}\xi_z^2 + U_{\eta\eta}\eta_z^2 + U_{\theta\theta}\theta_z^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_z\eta_z + 2U_{\xi\theta}\xi_z\theta_z + 2U_{\eta\theta}\eta_z\theta_z + U_{\xi\xi\xi} + \\ &+ U_{\eta\eta\eta} + U_{\theta\theta\theta}, \\ U_{xy} &= U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + U_{\theta\theta}\theta_x\theta_y + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\xi\theta}(\xi_x\theta_y + \xi_y\theta_x) + \\ &+ U_{\eta\theta}(\eta_x\theta_y + \eta_y\theta_x) + U_{\xi\xi\xi} + U_{\eta\eta\eta} + U_{\theta\theta\theta}, \\ U_{xz} &= U_{\xi\xi}\xi_x\xi_z + U_{\eta\eta}\eta_x\eta_z + U_{\theta\theta}\theta_x\theta_z + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_z + \xi_z\eta_x) + U_{\xi\theta}(\xi_x\theta_z + \xi_z\theta_x) + \\ &+ U_{\eta\theta}(\eta_x\theta_z + \eta_z\theta_x) + U_{\xi\xi\xi} + U_{\eta\eta\eta} + U_{\theta\theta\theta}, \\ U_{yz} &= U_{\xi\xi}\xi_y\xi_z + U_{\eta\eta}\eta_y\eta_z + U_{\theta\theta}\theta_y\theta_z + U_{\xi\eta}(\xi_y\eta_z + \xi_z\eta_y) + U_{\xi\theta}(\xi_y\theta_z + \xi_z\theta_y) + \\ &+ U_{\eta\theta}(\eta_y\theta_z + \eta_z\theta_y) + U_{\xi\xi\xi} + U_{\eta\eta\eta} + U_{\theta\theta\theta}, \\ U_x &= U_{\xi\xi}\xi_x + U_{\eta\eta}\eta_x + U_{\theta\theta}\theta_x, \quad U_y = U_{\xi\xi}\xi_y + U_{\eta\eta}\eta_y + U_{\theta\theta}\theta_y, \\ U_z &= U_{\xi\xi}\xi_z + U_{\eta\eta}\eta_z + U_{\theta\theta}\theta_z. \end{aligned}$$

Итак, заменяем:

$$\begin{aligned} U_{zz} &= U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_{\theta\theta} - 2U_{\xi\eta} + 2U_{\xi\theta} - 2U_{\eta\theta}, \quad U_{xy} = U_{\eta\theta}, \quad U_{xz} = U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta} - U_{\eta\theta}, \\ U_{yz} &= -U_{\theta\theta} - U_{\xi\theta} + U_{\eta\theta}, \quad U_x = U_{\eta}, \quad U_y = U_{\theta}, \quad U_z = -U_{\xi} + U_{\eta} - U_{\theta}. \end{aligned}$$

Полученные выражения подставляем в уравнение (13):

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_{\theta\theta} - 2U_{\xi\eta} + 2U_{\xi\theta} - 2U_{\eta\theta} - 2(U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta} - U_{\eta\theta}) + 2(-U_{\theta\theta} - U_{\xi\theta} + U_{\eta\theta}) - zU_{\eta} + U_{\theta} = 0.$$

Раскрываем скобки и приводим подобные члены:

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} - U_{\theta\theta} - zU_{\eta} + U_{\theta} = 0.$$

Из соотношений (15) заменяем z на $-\xi$ и подставляем в последнее уравнение:

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} - U_{\theta\theta} + \xi U_{\eta} + U_{\theta} = 0.$$

Таким образом, уравнение (13) приведено к каноническому виду.

Тема 2

Общее решение некоторых уравнений с частными производными второго порядка

Краткие теоретические сведения

Уравнение в частных производных может иметь бесчисленное множество решений. Чтобы уравнение имело одно решение (или в некоторых более сложных случаях несколько вполне определенных решений), то есть чтобы задача была детерминированной, необходимо на искомое решение дифференциального уравнения наложить дополнительные условия (их называют краевыми), которые, как правило, вытекают из физической или иной постановки задачи.

Пусть уравнение в частных производных имеет порядок m . Функция, заданная в некоторой области D изменения независимых переменных, называется **решением** или **интегралом** данного уравнения в области D , если в этой области функция имеет непрерывные частные производные до порядка m включительно и при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Требование существования частных производных порядка m часто бывает неоправданным с физической, а иногда и с математической

точки зрения, поэтому наряду с данным только что понятием «классического» решения, вводят еще понятие **обобщенного решения** уравнения в частных производных.

Дадим здесь простейшее определение.

Если существует последовательность классических в D решений данного дифференциального уравнения, которая в любой внутренней подобласти данной области D равномерно сходится к некоторой функции, то эта функция называется **обобщенным решением** данного дифференциального уравнения в области D .

Понятие обобщенного решения было введено С. Л. Соболевым. При изучении обобщенных решений дифференциальных уравнений используются функциональные пространства, введенные С. Л. Соболевым и поэтому носящие его имя.

Приведенные ниже задания содержат простейшие уравнения в частных производных второго порядка. Для решения одних достаточно сделать подстановку, которая сведет их к уравнениям в частных производных первого порядка; чтобы решить другие, необходимо предварительно привести их к каноническому виду.

Задачи

2.1. Найти общее решение уравнения.

1. $U_{xy} + \cos(3y + 1)U_x = 0$.

2. $\sin(3y - 2)U_x + U_{xy} = 0$.

3. $U_{xy} + (2x + 3)U_y = 0$.

4. $U_{xy} = yU_x$.

5. $U_{xy} + (x - 4)^5 U_y = 0$.

6. $\frac{1}{\cos(y + 5)} U_{xy} + 3U_x = 0$.

7. $U_y - \frac{1}{\sin(1 - 3x)} U_{xy} = 0$.

8. $5yU_{xy} = U_x$.

9. $\frac{1}{x^2} U_{xy} - 3U_y = 0$.

10. $\frac{1}{y^7} U_{xy} = U_x$.

11. $\cos(4x + 3)U_y = U_{xy}$.

$$12. \sin(y-5)U_x - U_{xy} = 0.$$

$$13. (2x-5)U_y + 3U_{xy} = 0.$$

$$14. U_{xy} + xU_y = 0.$$

$$15. U_{xy} + (4y-5)^6 U_x = 0.$$

$$16. \frac{1}{x} U_{xy} - U_y = 0.$$

$$17. \frac{1}{\sin(3-2y)} U_{xy} = 4U_x.$$

$$18. (1-4x)U_{xy} - 3U_y = 0.$$

$$19. \frac{1}{y^3} U_{xy} + U_x = 0.$$

$$20. 6xU_y - U_{xy} = 0.$$

$$21. U_{xy} = \cos(y+1)U_x.$$

$$22. U_{xy} + \operatorname{tg}(4x+5)U_y = 0.$$

$$23. U_{xy} + \operatorname{ctgx}U_y = 0.$$

$$24. 4xU_y + U_{xy} = 0.$$

$$25. U_{xy} = y^5 U_x.$$

$$26. U_{xy} + \frac{1}{3x+2} U_y = 0.$$

$$27. U_{xy} + \cos 4y U_x = 0.$$

$$28. U_{xy} + (3-x^5)U_y.$$

$$29. U_{xy} + (y+y^3)U_x = 0.$$

$$30. \frac{1}{(x-4)^2} U_{xy} - U_y = 0.$$

2.2. Решить уравнение.

$$1. x^2 U_{xx} + 2xy U_{xy} + y^2 U_{yy} = 0 \quad (xy \neq 0).$$

$$2. 4x^2 U_{yy} + 2(1-x^2) U_{xy} - U_{xx} - \frac{2x}{1+x^2} (2U_y - U_x) = 0.$$

$$3. -U_{yy} + e^y U_{xy} + U_y = 0.$$

$$4. 2U_{xy} + e^y U_{yy} + U_y = 0.$$

$$5. \cos^2 y U_{xx} + 2 \sin y U_{xy} - U_{yy} - U_y - (1 - \sin y - \cos y) U_x = 0.$$

$$6. \sin^2 y U_{xx} + 2 \sin y U_{xy} + U_{yy} + \operatorname{ctgy} U_y = 0.$$

7. $e^x U_{yy} - 2U_{xy} + U_x - \frac{1}{2}e^x U_y = 0.$
8. $U_{xx} + 2\sin x U_{xy} - \cos^2 x U_{yy} + U_x + (1 + \sin x + \cos x)U_y = 0.$
9. $yU_{xx} + x(2y-1)U_{xy} - 2x^2U_{yy} + \left(\frac{2x}{1+2y} - \frac{y}{x}\right)U_x + \frac{4x^2}{1+2y}U_y = 0.$
10. $yU_{xx} - (x+y)U_{xy} + xU_{yy} + \frac{xy-x-y}{x-y}U_x - \frac{x^2-x-y}{x-y}U_y = 0.$
11. $x^2U_{xx} - 2xyU_{xy} - 3y^2U_{yy} = 0 \quad (xy \neq 0).$
12. $x^2U_{xx} - y^2U_{yy} - 2yU_y = 0 \quad (xy \neq 0).$
13. $U_{xx} + 2(1+2x)U_{xy} + 4x(1+x)U_{yy} + 2U_y = 0.$
14. $xU_{xx} + (x+y)U_{xy} + yU_{yy} + \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{2y}{x(x-y)}\right)(U_x + U_y) = 0.$
15. $xU_{xx} - U_{yy} + \frac{1}{2}U_x = 0 \quad (x > 0).$
16. $2U_{xy} + xU_{yy} + U_y = 0.$
17. $xU_{xx} - 2U_{xy} + \left(\frac{2}{y} - 1\right)U_x = 0, \quad (x \neq 0).$
18. $U_{xx} - 2\cos x U_{xy} - (3 + \sin^2 x)U_{yy} + U_x + (-2 + \sin x - \cos x)U_y = 0.$
19. $U_{xx} + 2\cos x U_{xy} - \sin^2 x U_{yy} - \sin x U_y = 0.$
20. $e^{2x}U_{xx} + 2e^x U_{xy} + U_{yy} - e^x U_y = 0.$
21. $e^x U_{xx} - 2U_{xy} + e^x U_x = 0.$
22. $U_{xx} - 2\sin x U_{xy} - (3 + \cos^2 x)U_{yy} - \cos x U_y = 0.$
23. $U_{xx} + 2\cos x U_{xy} + \cos^2 x U_{yy} - \sin x U_y = 0.$
24. $(1+x^2)^2 U_{xx} - U_{yy} + \frac{2x}{1+x^2}U_x = 0.$
25. $y^2U_{xx} + 2xyU_{xy} + x^2U_{yy} + \left(y - \frac{x^2}{y}\right)U_y = 0.$
26. $U_{xx} - (1+y^2)^2 U_{yy} - 2y(1+y^2)U_y = 0.$
27. $e^{2x}U_{xx} + 2e^{x+y}U_{xy} + e^{2y}U_{yy} + (e^{2y} - e^{x+y})U_y = 0.$
28. $U_{xx} - 2xU_{xy} - \frac{1}{x}U_x = 0.$
29. $xU_{xx} + 2xU_{xy} + (x-1)U_{yy} + \frac{1}{2}(U_x + U_y) = 0 \quad (x > 0).$
30. $yU_{xx} + U_{yy} - \frac{1}{2y}U_y = 0 \quad (y < 0).$

Образцы решения типовых задач

Задача 2.1. Найти общее решение уравнения

$$U_{xy} + ch(2 - 9y)U_x = 0. \quad (16)$$

Решение. С помощью подстановки

$$U_x = V \quad (17)$$

уравнение (16) сводится к уравнению

$$V_y + ch(2 - 9y)V = 0. \quad (18)$$

Таким образом, уравнение с частными производными второго порядка удалось свести к уравнению с частными производными первого порядка. Уравнение (18) можно решить двумя способами.

1-й способ. От уравнения (18) переходим к системе в симметрической форме:

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{1} = \frac{dV}{-ch(2 - 9y)V}. \quad (19)$$

Теперь записываем уравнение

$$\frac{dy}{1} = \frac{dV}{-ch(2 - 9y)V}. \quad (20)$$

Последнее уравнение – это уравнение с разделяющимися переменными. Для его решения сначала разделяем переменные:

$$-ch(2 - 9y)dy = \frac{dV}{V}.$$

Затем интегрируем обе части последнего равенства и находим таким образом общее решение уравнения (20):

$$\frac{1}{9}sh(2 - 9y) + c_1 = \ln V.$$

Выражаем константу c_1 :

$$c_1 = \ln V - \frac{1}{9} sh(2 - 9y).$$

Последнее равенство задает первый интеграл системы (19). Еще один первый интеграл системы (19) имеет вид $x = c_2$. Тогда можем записать общее решение уравнения (18):

$$\Phi\left(\ln V - \frac{1}{9} sh(2 - 9y), x\right) = 0. \quad (21)$$

Отсюда необходимо выбрать те решения, которые можно записать в явном виде. Поэтому из (21) имеем:

$$\ln V - \frac{1}{9} sh(2 - 9y) = f_0(x),$$

или

$$V = e^{\frac{1}{9} sh(2-9y) + f_0(x)} = e^{f_0(x)} e^{\frac{1}{9} sh(2-9y)} = f(x) e^{\frac{1}{9} sh(2-9y)}. \quad (22)$$

2-й способ. В уравнении (18) функцию V можно рассматривать как функцию одной переменной y (по которой берется частная производная), а переменную x будем считать параметром. Тогда уравнение (18) запишем в следующем виде:

$$\frac{dV}{dy} + ch(2 - 9y)V = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Его общее решение:

$$\ln V = \frac{1}{9} sh(2 - 9y) + f_0(x).$$

Выражая отсюда V , получаем решение (22).

После того как решение (22) уравнения (18) найдено, подставляем его в уравнение (17):

$$U_x = f(x)e^{\frac{1}{9}sh(2-9y)}. \quad (23)$$

Уравнение (23) как и уравнение (18) можно решить любым из изложенных выше способов. Решим уравнение (23) вторым способом, считая переменную y параметром. Имеем:

$$\frac{dU}{dx} = f(x)e^{\frac{1}{9}sh(2-9y)}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем последнее уравнение. Имеем:

$$\int dU = \int f(x)e^{\frac{1}{9}sh(2-9y)} dx.$$

Поскольку функция $e^{\frac{1}{9}sh(2-9y)}$ не зависит от переменной x , по которой идет интегрирование, то эту функцию можно вынести за знак интеграла:

$$\int dU = e^{\frac{1}{9}sh(2-9y)} \int f(x) dx.$$

Так как $f(x)$ – функция произвольная, то интеграл от этой функции тоже является произвольной функцией и, следовательно, общим решением уравнения (23) будет:

$$U = e^{\frac{1}{9}sh(2-9y)} \varphi(x) + \psi(y). \quad (24)$$

Найденная функция двух переменных (24) и будет общим решением исходного уравнения (16). Отметим, что решение уравнения (16) зависит от двух произвольных функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$.

Задача 2.2. Решить уравнение

$$(y^2 - 1)U_{xx} + 2xU_{xy} - x^2U_{yy} + \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{x} - \frac{x}{y}\right)U_x + \frac{x^2}{y}U_y = 0 \quad (x \neq 0, y \neq 0). \quad (25)$$

Решение. Для того чтобы решить это уравнение, необходимо привести его к каноническому виду. Сначала вычисляем $\delta = x^2 - (y^2 - 1)(-x^2) = x^2 - x^2 y^2 - x^2 = x^2 y^2$. Так как по условию $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то $\delta > 0$.

Теперь составляем характеристические уравнения

$$(y^2 - 1)dy = (x \pm xy)dx.$$

Полученные уравнения являются уравнениями с разделяющимися переменными, поскольку их можно записать в следующем виде:

$$\frac{y^2 - 1}{1 \pm y} dy = x dx.$$

Интегрируя оба уравнения, находим их общие решения:

$$\frac{y^2}{2} - y = \frac{x^2}{2} + c_1, \quad -\frac{y^2}{2} - y = \frac{x^2}{2} + c_2.$$

Выразим в последних равенствах произвольные постоянные:

$$\frac{y^2}{2} - y - \frac{x^2}{2} = c_1, \quad \frac{y^2}{2} + y + \frac{x^2}{2} = -c_2.$$

Далее в уравнении (25) вводим замену переменных:

$$\xi = \frac{y^2}{2} - y - \frac{x^2}{2}, \quad \eta = \frac{y^2}{2} + y + \frac{x^2}{2}.$$

Имеем:

$$U_{xx} = U_{\xi\xi} x^2 - 2U_{\xi\eta} x^2 + U_{\eta\eta} x^2 - U_{\xi} + U_{\eta},$$

$$U_{yy} = U_{\xi\xi} (y-1)^2 + 2U_{\xi\eta} ((y+1)(-x) + x(y-1)) + U_{\eta\eta} (y+1)^2 + U_{\xi} + U_{\eta},$$

$$U_{xy} = U_{\xi\xi} (-x(y-1)) + U_{\xi\eta} (-x(y+1) + x(y-1)) + U_{\eta\eta} x(y+1),$$

$$U_x = U_{\xi}(-x) + U_{\eta}x, \quad U_y = U_{\xi}(y-1) + U_{\eta}(y+1).$$

Полученные выражения подставляем в уравнение (25):

$$\begin{aligned}
& (y^2 - 1)(U_{\xi\xi}x^2 - 2U_{\xi\eta}x^2 + U_{\eta\eta}x^2 - U_\xi + U_\eta) + 2x(U_{\xi\xi}(-x(y-1)) + \\
& + U_{\xi\eta}(-x(y+1) + x(y-1)) + U_{\eta\eta}x(y+1)) - x^2(U_{\xi\xi}(y-1)^2 + \\
& + 2U_{\xi\eta}(y+1)(y-1) + U_{\eta\eta}(y+1)^2 + U_\xi + U_\eta) + \\
& + \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{x} - \frac{x}{y}\right)(U_\xi(-x) + U_\eta x) + \frac{x^2}{y}(U_\xi(y-1) + U_\eta(y+1)) = 0.
\end{aligned}$$

Раскрываем скобки и приводим подобные члены:

$$\begin{aligned}
& ((y^2 - 1)x^2 + 2x(-x(y-1)) - x^2(y-1)^2)U_{\xi\xi} + ((y^2 - 1)(-2x^2) + \\
& + 2x(-x(y+1) + x(y-1)) - 2x^2(y+1)(y-1))U_{\xi\eta} + ((y^2 - 1)x^2 + 2xx(y+1) - \\
& - x^2(y+1)^2)U_{\eta\eta} + ((y^2 - 1)(-1) - x^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{x} - \frac{x}{y}\right)(-x) + \frac{x^2}{y}(y-1))U_\xi + \\
& + ((y^2 - 1) - x^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{x} - \frac{x}{y}\right)x + \frac{x^2}{y}(y+1))U_\eta = 0.
\end{aligned}$$

После упрощения получаем уравнение

$$-4x^2y^2U_{\xi\eta} = 0.$$

Так как $x^2y^2 \neq 0$, то $U_{\xi\eta} = 0$. Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$U(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

где $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ – произвольные функции.

Возвращаясь к исходным переменным, получаем общее решение уравнения (25):

$$U(x, y) = \varphi\left(\frac{y^2}{2} - y - \frac{x^2}{2}\right) + \psi\left(\frac{y^2}{2} + y + \frac{x^2}{2}\right).$$

Литература

1. Тихонов, А. М. Уравнения математической физики / А. М. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.
2. Масленникова, В. Н. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. Н. Масленникова. – М. : Изд-во РУДН, 1997. – 447 с.
3. Бицадзе, А. В. Уравнения математической физики / А. В. Бицадзе. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 336 с.
4. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1967. – 564 с.

Производственно-практическое издание

**Белокурский Максим Сергеевич,
Герман Анастасия Владимировна**

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**Приведение к каноническому виду и общее решение
уравнений с частными производными второго порядка**

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 13.09.2016. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,9.

Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 25 экз. Заказ 532.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования

«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.

Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.

Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.

