Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

А. А. АТВИНОВСКИЙ, И. В. ПАРУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Практическое пособие
для студентов математического факультета

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2016

УДК 517.31(076)
ББК 22.161.12я73
А92

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук Л. Л. Великович,
доктор физико-математических наук В. М. Селькин

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Атвиновский, А. А.
А92 Математический анализ. Неопределённый интеграл : практическое пособие / А. А. Атвиновский, И. В. Парукевич ; М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2016. – 43 с.
ISBN 978-985-577-145-7

Предлагаемое практическое пособие предназначено для проведения лабораторных занятий по математическому анализу. Содержит справочный материал по теме, наборы заданий с примерами решения типовых задач по следующим темам: общие методы интегрирования, интегрирование рациональных, иррациональных, тригонометрических и трансцендентных функций.
Адресовано студентам математического факультета.

УДК 517.31(076)
ББК 22.161.12я73

ISBN 978-985-577-145-7

© Атвиновский А. А.,
Парукевич И. В., 2016
© Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», 2016

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Оглавление

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Предисловие

Практическое пособие «Неопределённый интеграл» по математическому анализу составлено в соответствии с действующей программой по данной дисциплине для математических специальностей университетов. Пособие содержит пять лабораторных работ по следующим темам: общие методы интегрирования, интегрирование рациональных, иррациональных, тригонометрических и трансцендентных функций, которые излагаются на первом году обучения.

В начале каждой лабораторной работы содержится справочный материал по теме, предлагаются алгоритмы и примеры решения основных видов задач. Во всех лабораторных работах задания разделены на десять вариантов. Все задачи в каждом варианте имеют похожие формулировки. Наличие заданий разного уровня сложности позволяет преподавателю варьировать объёмом каждой лабораторной работы. Нумерация заданий своя в каждой лабораторной работе. При составлении пособия авторы использовали литературу, список которой приводится в конце.

Практическое пособие по математическому анализу предназначено, с одной стороны, для организации учебного процесса дневного отделения математического факультета по специальностям 1-31 03 01 02 «Математика», 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)», 1-31 03 03-02 «Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность)», 1-31 03 06 01 «Экономическая кибернетика (математические методы в экономике)». С другой стороны, оно может быть использовано при проведении практических занятий и формирования индивидуальных заданий студентам разных форм обучения.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Лабораторная работа 1
Общие методы интегрирования

Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на промежутке X, если в каждой точке этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных этой функций, т. е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $\int dF(x) = F(x) + C$;

3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$;

4) $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Пример 1. Используя основные свойства неопределенного интеграла и таблицу (Приложение А), вычислить интегралы:

а) $\int 2^x \cdot 3^{2x}dx$;

б) $\int \mathrm{tg}^2(x)dx$;

в) $\int \left(\sin(0{,}5x) + \cos(0{,}5x)\right)^2 dx$;

г) $\int \frac{3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 7x + 8}{x^2}dx$.

Решение. а) $\int 2^x \cdot 3^{2x}dx = \int \left(2 \cdot 3^2\right)^x dx = \int 18^x dx = \frac{18^x}{\ln 18} + C$;

б) $\int \mathrm{tg}^2(x)dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2(x)} - \int dx = \mathrm{tg}x - x + C$;

в) $\int \left(\sin(0{,}5x) + \cos(0{,}5x)\right)^2 dx =$

$= \int \left(\sin^2(0{,}5x) + 2\sin(0{,}5x)\cos(0{,}5x) + \cos^2(0{,}5x)\right)dx =$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$= \int (1+\sin x)dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C;$$

г) $$\int \frac{3x^4+2x^3+5x^2-7x+8}{x^2}dx = \int \left(3x^2-2x+5-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}\right)dx =$$

$$= 3\int x^2dx - 2\int xdx + 5\int dx - 7\int \frac{dx}{x} + 8\int \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 3\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 5x - 7\cdot\ln x + 8\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = x^3 - x^2 + 5x - 7\ln x - \frac{8}{x} + C.$$

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановки $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены имеет вид:

$$\int f(x)dx = \int f\ [\varphi(t)]\cdot \varphi(t)dt.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$.

Решение. Произведем следующую подстановку: $t = \sqrt{2x-9}$.

Тогда

$$t^2 = 2x-9, 2x = t^2+9, x = \frac{t^2+9}{2}, dx = \frac{1}{2}\cdot 2tdt = tdt.$$

Теперь исходный интеграл примет вид:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \int \frac{tdt}{0,5(t^2+9)\cdot t} = \int \frac{2dt}{t^2+9} = 2\int \frac{dt}{t^2+(3)^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C.$$

Интегрирование по частям производится по следующей формуле:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

С помощью этой формулы нахождение исходного интеграла сводится к отысканию другого интеграла $\left(\int vdu\right)$, который проще исходного. При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Для интегралов вида $\int P(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\sin(ax)dx$, $\int P(x)\cos(ax)dx$, где $P(x)$ – многочлен, за u принимают $P(x)$, а за dv –

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

оставшееся выражение; для интегралов вида $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$ за u принимают соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а за dv –выражение $P(x)dx$.

Пример 3. Найти интеграл $\int x^2 e^x dx$.

Решение.

$$\int x^2 e^x dx = \left[\begin{matrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix}\right] = x^2 \cdot e^x - \int e^x 2xdx =$$

$$= \left[\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{matrix}\right] = x^2 \cdot e^x - 2\left(x \cdot e^x - \int e^x dx\right) = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C.$$

1 Используя основные правила интегрирования и таблицу интегралов, вычислить следующие неопределенные интегралы.

1.1 а) $\int \frac{3+\sqrt{x}-2x}{x^3}dx$, б) $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$;

1.2 а) $\int \frac{7\sqrt{x}-4x^3+x^5}{\sqrt[4]{x}}dx$, б) $\int \left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

1.3 а) $\int \frac{5-3\sqrt{x}-x^2}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{2-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$;

1.4 а) $\int \frac{11+3\sqrt{x}-x^4}{4\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{x^2-9}{x^2-1}dx$;

1.5 а) $\int \frac{5\sqrt{x}-3x+x^3}{\sqrt[4]{x}}dx$, б) $\int 2^x\left(1+\frac{2^{-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$;

1.6 а) $\int \frac{5\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+6x^2}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{9}{1+x^2}\right)dx$;

1.7 а) $\int \frac{4\sqrt[3]{x}+x^2\sqrt{x}-5}{\sqrt[4]{x}}dx$, б) $\int 5^x 7^{2x} 2^{4x} dx$;

1.8 а) $\int \frac{7\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}+x^2}{x^5}dx$, б) $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$;

1.9 а) $\int (x^4+1)^3 x^3 dx$, б) $\int \mathrm{th}^2 x dx$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

1.10 а) $\int (6x^3+12x)^2 x^3 dx$, б) $\int \sin(x+3)dx$.

2 Вычислить интегралы методом замены переменной.

2.1

а) $\int \sin\left(2x-3\right)dx$,

б) $\int \sqrt[3]{5x+4}dx$,

в) $\int \dfrac{dx}{(6-3x)^5}$,

г) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{15-x^2-4x}}$,

д) $\int \dfrac{dx}{\sin x}$.

2.2

а) $\int \cos\left(3x+5\right)dx$,

б) $\int \sqrt[7]{\left(x-4\right)^2}dx$,

в) $\int \dfrac{dx}{(3x+7)^3}$,

г) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-8x+15}}$,

д) $\int \dfrac{\text{arctg}x}{1+x^2}dx$.

2.3

а) $\int \sin\left(6x-7\right)dx$,

б) $\int \sqrt{2x-4}dx$,

в) $\int \dfrac{dx}{(3x+2)^3}$,

г) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$,

2.6

а) $\int \sin\left(5x+7\right)dx$,

б) $\int \sqrt[3]{4-x}dx$,

в) $\int \dfrac{dx}{(3x+7)^4}$,

г) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$,

д) $\int \dfrac{\ln^2 x}{x}dx$.

2.7

а) $\int \cos\left(5x+7\right)dx$,

б) $\int \sqrt[4]{x+7}dx$,

в) $\int \dfrac{dx}{(x+9)^4}$,

г) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$,

д) $\int x5^{-x^2} dx$.

2.8

а) $\int \sin\left(4-3x\right)dx$,

б) $\int \sqrt[4]{6x+5}dx$,

в) $\int \dfrac{dx}{(x+3)^5}$,

г) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-8x+17}}$,

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

д) $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx$.

д) $\int e^{\cos 2x} \sin 2x dx$.

2.4

а) $\int \cos(4x-3) dx$,

б) $\int \sqrt[5]{2x+3} dx$,

в) $\int \frac{dx}{(6-7x)^6}$,

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$,

д) $\int \mathrm{ctg} x dx$.

2.9

а) $\int \sin(x+13) dx$,

б) $\int \sqrt[6]{x-4} dx$,

в) $\int \frac{dx}{(x-2)^5}$,

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$,

д) $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx$.

2.5

а) $\int \cos(7-x) dx$,

б) $\int \sqrt[3]{5-x} dx$,

в) $\int \frac{dx}{(5x-2)^4}$,

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{63-x^2+8x}}$,

д) $\int x^2 e^{-x^3} dx$.

2.10

а) $\int \sin(3x-7) dx$,

б) $\int \sqrt[5]{2x+7} dx$,

в) $\int \frac{dx}{(5x+3)^3}$,

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$,

д) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

3 Вычислить интегралы методом интегрирования по частям.

3.1 а) $\int (2x-3) \sin 3x dx$, б) $\int \arccos(5x-2) dx$;

3.2 а) $\int (3x-4) \cos(2x-1) dx$, б) $\int \ln(x^2+4) dx$;

3.3 а) $\int (4x-3) e^{-5x} dx$, б) $\int \arcsin(8x-2) dx$;

3.4 а) $\int (2x-3) 3^x dx$, б) $\int \mathrm{arctg}(5x) dx$;

3.5 а) $\int x^2 \sin(5x+3) dx$, б) $\int x \cdot \mathrm{arcctg}(5x) dx$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3.6 а) $\int (3x-1)e^{-x}\,dx$, б) $\int x^2 \cdot \mathrm{arctg}\,x dx$;

3.7 а) $\int (4x+7)\ln 3x dx$, б) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$;

3.8 а) $\int (x+6)\cos(5x+3)\,dx$, б) $\int \ln^2 x dx$;

3.9 а) $\int (x+7)\sin(5x-1)\,dx$, б) $\int \arcsin^2 x dx$;

3.10 а) $\int x\sin^2 x dx$, б) $\int e^x \sin x dx$.

4 Вычислить интегралы.

4.1 $\int |x|dx$;

4.2 $\int (x+|x|)^2 dx$;

4.3 $\int (|1+x|-x)^2 dx$;

4.4 $\int (x+|x|)^3 dx$;

4.5 $\int e^{-2|x|}dx$;

4.6 $\int x|x|dx$;

4.7 $\int (x-|x|)^2 dx$;

4.8 $\int e^{-|x|}dx$;

4.9 $\int (x-|x|)^3 dx$;

4.10 $\int x^2 |x| dx$.

5 Вычислить интегралы.

5.1 $\int x \cdot f''(x^2)dx$;

5.2 $\int f'(7x)dx$;

5.3 $\int x^2 \cdot f'(x^3)dx$;

5.4 $\int x^3 \cdot f'(x^4)dx$;

5.5 $\int f'(7x+1)dx$;

5.6 $\int \cos x \cdot f'(\sin x)dx$;

5.7 $\int \sin x \cdot f'(\cos x)dx$;

5.8 $\int f'(2x)dx$;

5.9 $\int f'(1-x)dx$;

5.10 $\int f'(3x+7)dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Лабораторная работа 2
Интегрирование рациональных функций

Интегрирование рациональной дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

приводится к интегрированию простейших дробей вида:

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^n},\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q},\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\ (n \in \mathrm{N}).$$

Рассмотрим методы их вычисления.

1) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln\left|x-a\right| + C;$

2) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}dx = \frac{A}{-n+1}(x-a)^{-n+1} + C;$

3) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx.$

Для вычисления этого интеграла поступают так: в числителе дроби, стоящей под интегралом, записывается производная знаменателя, то есть $(2x+p)$. Тождественными преобразованиями из $(2x+p)$ получают заданный числитель $(Ax+B)$. Преобразованная дробь

$$\frac{Ax+B}{x^2+p+q}$$

имеет вид:

$$\frac{(2x+p)\dfrac{A}{2}+B-\dfrac{Ap}{2}}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\cdot\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{B-\dfrac{Ap}{2}}{x^2+px+q}.$$

Первая дробь интегрируется просто: в числителе находится производная знаменателя, интегрирование которой приводит к натуральному логарифму модуля знаменателя. Для интегрирования второй дроби в знаменателе выделяют полный квадрат:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Интеграл второй дроби приводится к табличному интегралу

$\displaystyle\int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{arctg}\,u + C$, если $4q - p^2 > 0$.

Если в знаменателе дроби вместо трёхчлена x^2+px+q окажется

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

трёхчлен $ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$, то коэффициент a следует вынести за скобку и тем самым свести этот случай к предыдущему.

4) Интеграл вида

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx,\ n\in\mathrm{N},$$

где корни знаменателя комплексные, сводятся к вычислению двух интегралов. Для этого в числителе записывается производная основания степени знаменателя, то есть $(x^2+px+q)'=2x+p$, и так же, как в предыдущем пункте, эта производная преобразовывается в выражение $Ax+B$, стоящее в числителе:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}=\frac{(2x+p)\dfrac{A}{2}+B-\dfrac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^n}=\frac{A}{2}\cdot\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}+\frac{\left(B-\dfrac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}.$$

Интегрирование первой дроби описано в предыдущем пункте. Рассмотрим вторую дробь

$$\frac{1}{(x^2+px+q)^n}=\frac{1}{\left[\left(x+p/2\right)^2+\left(q-p^2/4\right)\right]^n}.$$

Если обозначить $q-\dfrac{p^2}{4}=\beta^2,\ x+\dfrac{p}{2}=\beta\cdot z$, то

$$\frac{1}{(x^2+px+q)^n}=\frac{1}{(\beta^2z^2+\beta^2)^n}=\frac{1}{\beta^{2n}(1+z^2)^n},$$

и таким образом интегрирование второй дроби в правой части сводится к интегрированию дроби $\dfrac{1}{(1+z^2)^n}$.

Интеграл $J_n=\displaystyle\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}$ вычисляется по формуле

$$J_n=\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{z}{(1+z^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1},\ \text{где}\ J_{n-1}=\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

Всякая рациональная функция $R(x)$ представима в виде суммы многочлена $T_k(x)$ (целой части) и правильной рациональной дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$:

$$R(x)=T_k(x)+\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},\ k,n,m\in\mathrm{N}.$$

Поэтому интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных рациональных дробей.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Пример 1. Найти интеграл от рациональной функции

$$\int \frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}dx.$$

Решение. Выделим из неправильной дроби целую часть, деля числитель на знаменатель:

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}.$$

Разложим полученную в результате дробь на элементарные слагаемые:

$$x^4+3x^2=x^2\left(x^2+3\right).$$

Тогда

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}.$$

Приведем к общему знаменателю в правой части

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}=\frac{Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+\left(Cx+D\right)x^2}{x^2\left(x^2+3\right)}.$$

Отсюда

$$1=Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+\left(Cx+D\right)x^2.$$

Раскроем скобки в правой части и сгруппируем:

$$1=x^3\left(A+C\right)+x^2\left(B+D\right)+x\cdot 3A+3B.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x^3:\quad 0=A+C,$$

$$x^2:\quad 0=B+D,$$

$$x^1:\quad 0=3A,$$

$$x^0:\quad 1=3B.$$

Отсюда $A=0$, $B=\frac{1}{3}$, $C=0$, $D=-\frac{1}{3}$.

Следовательно,

$$\frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3\left(x^2+3\right)}.$$

Тогда

$$\int \frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}dx=\int\left(2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3\left(x^2+3\right)}\right)dx=2\int xdx+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}=$$

$$=2\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C=x^2-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Если знаменатель правильной рациональной дроби имеет кратные корни (особенно комплексные), то интегрирование связано с громоздкими выкладками. В этом случае удобно пользоваться формулой Остроградского:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx,$$

где $Q_2(x)$ – многочлен, имеющий те же корни, что и $Q(x)$, но каждый корень – простой; $Q_1(x)$ – частное от деления $Q(x)$ на $Q_2(x)$; $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены, степени которых соответственно меньше степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Для отыскания многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ их записывают с неопределёнными коэффициентами, которые находятся после дифференцирования обеих частей формулы Остроградского.

Пример 2. Найдём методом Остроградского интеграл

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx.$$

Решение. В данном случае

$$Q(x) = (x-1)^2(x^2+1)^2,$$

поэтому

$$Q_2(x) = (x-1)(x^2+1), Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)} = (x-1)(x^2+1).$$

Следовательно, существуют многочлены

$$P_1(x) = Ax^2+Bx+C \text{ и } P_2(x) = ax^2+bx+c,$$

для которых верно:

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x^2+1)} + \int \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x^2+1)}dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x^2+1)} +$$

$$+\int\left(\frac{D}{x-1}+\frac{Ex+F}{x^2+1}\right)dx.$$

Дифференцируя обе части этого равенства получаем:

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)(x^2+1)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+C)(3x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} +$$

$$+\frac{D}{x-1}+\frac{Ex+F}{x^2+1}.$$

Откуда вытекает равенство многочленов

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$4x^2 - 8x = -4x^4 - 2Bx^3 + (A + B - 3C)x^2 + 2(C - A)x - B - C +$$
$$+D(x-1)(x^2+1)^2 + (Ex + F)(x-1)(x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$\begin{cases} D + E = 0, \\ -A - D + F - 2E = 0, \\ -2B + 2D + 2E - 2F = 0, \\ A + B - 3C - 2D - 2E + 2F = 4, \\ -2A + 2C + D + E - 2F = -8, \\ -B - C - D + F = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$A = 3, B = -1, C = 0, D = 2, E = -2, F = 1.$$

Итак,

$$\int \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{3x^2 - x}{(x-1)(x^2+1)} + 2\ln|x-1| - \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C.$$

Метод Остроградского является общим: с его помощью можно вычислить интеграл от любой рациональной дроби, при условии, что могут быть найдены все корни знаменателя. Следует иметь в виду, что другие приёмы во многих частных случаях быстрее ведут к цели.

Интегралы вида

$$\int \frac{x^{2m+1}}{(a+bx^2)^n}\,dx, m, n \in \mathrm{N}$$

легко вычисляется с помощью подстановки $a + bx^2 = t$.

1 Вычислить интегралы.

1.1 а) $\int \frac{dx}{x-3}$, б) $\int \frac{dx}{(2x-1)^4}$;

1.2 а) $\int \frac{dx}{5-x}$, б) $\int \frac{dx}{(4-3x)^3}$;

1.3 а) $\int \frac{dx}{2x-1}$, б) $\int \frac{dx}{(x+3)^5}$;

1.4 а) $\int \frac{dx}{15-3x}$, б) $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

1.5 а) $\int \frac{dx}{4-7x}$, б) $\int \frac{dx}{(3x+1)^3}$;

1.6 а) $\int \frac{dx}{3-8x}$, б) $\int \frac{dx}{(3x-2)^4}$;

1.7 а) $\int \frac{dx}{5+x}$, б) $\int \frac{dx}{(3x+5)^4}$;

1.8 а) $\int \frac{dx}{7x-1}$, б) $\int \frac{dx}{(4+3x)^7}$;

1.9 а) $\int \frac{dx}{5+8x}$, б) $\int \frac{dx}{(3x+2)^6}$;

1.10 а) $\int \frac{dx}{5-18x}$, б) $\int \frac{dx}{(5x+8)^{16}}$.

2 Вычислить интегралы.

2.1 а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+14}$, б) $\int \frac{2x+4}{x^2+6x+14}dx$;

2.2 а) $\int \frac{dx}{x^2+8x+15}$, б) $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+5}dx$;

2.3 а) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$, б) $\int \frac{6x-8}{x^2+4x+17}dx$;

2.4 а) $\int \frac{dx}{x^2+12x+6}$, б) $\int \frac{x-11}{x^2+8x+18}dx$;

2.5 а) $\int \frac{dx}{x^2-8x+14}$, б) $\int \frac{x+4}{x^2+8x+9}dx$;

2.6 а) $\int \frac{dx}{x^2-2x+14}$, б) $\int \frac{x+7}{x^2+14x+42}dx$;

2.7 а) $\int \frac{dx}{4x^2+8x+1}$, б) $\int \frac{xdx}{x^2+4x+5}$;

2.8 а) $\int \frac{dx}{9x^2+6x+5}$, б) $\int \frac{2xdx}{x^2+2x+6}$;

2.9 а) $\int \frac{dx}{4x^2-12x+17}$, б) $\int \frac{x-1}{x^2+6x+19}dx$;

2.10 а) $\int \frac{dx}{9x^2-12x+5}$, б) $\int \frac{4x-3}{x^2+6x+13}dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3 Вычислить интегралы.

3.1 а) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$, б) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+7)^2}$, в) $\int \frac{2x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx$;

3.2 а) $\int \frac{dx}{(4+x^2)^5}$, б) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+4)^3}$, в) $\int \frac{8x-1}{(4x^2+16x+5)^3}dx$;

3.3 а) $\int \frac{dx}{(9+x^2)^4}$, б) $\int \frac{dx}{(x^2+8x+18)^2}$, в) $\int \frac{2x-11}{(x^2+12x+42)^2}dx$;

3.4 а) $\int \frac{dx}{(16+x^2)^3}$, б) $\int \frac{dx}{(x^2+6x+14)^3}$, в) $\int \frac{2x-3}{(x^2-14x+23)^2}dx$;

3.5 а) $\int \frac{dx}{(x^2+25)^4}$, б) $\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$, в) $\int \frac{2x-7}{(x^2-6x+23)^2}dx$;

3.6 а) $\int \frac{dx}{(4+x^2)^4}$, б) $\int \frac{dx}{(9x^2+6x+15)^2}$, в) $\int \frac{x+7}{(x^2+8x+18)^3}dx$;

3.7 а) $\int \frac{dx}{(7+x^2)^4}$, б) $\int \frac{dx}{(4x^2+8x+7)^3}$, в) $\int \frac{2x-3}{(4x^2+12x+2)^3}dx$;

3.8 а) $\int \frac{dx}{(16+x^2)^4}$, б) $\int \frac{dx}{(x^2-8x+8)^2}$, в) $\int \frac{3x-1}{(x^2+2x+4)^2}dx$;

3.9 а) $\int \frac{dx}{(25+x^2)^3}$, б) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+4)^3}$, в) $\int \frac{x-3}{(x^2-10x+20)^2}dx$;

3.10 а) $\int \frac{dx}{(81+x^2)^4}$, б) $\int \frac{dx}{(4x^2+8x+15)^2}$, в) $\int \frac{x-7}{(x^2+2x+8)^3}dx$;

4 Вычислить интегралы (знаменатель имеет только действительные корни, среди которых нет равных).

4.1 а) $\int \frac{dx}{x(x+7)}$, б) $\int \frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}dx$;

4.2 а) $\int \frac{dx}{(8-x)(4+x)}$, б) $\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}dx$;

4.3 а) $\int \frac{dx}{x^2-81}$, б) $\int \frac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}dx$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

4.4 а) $\int \frac{xdx}{(x+7)(x-4)}$, б) $\int \frac{x^4-3x^3-11x^2+4x+15}{x^3-5x^2-x+5}dx$;

4.5 а) $\int \frac{xdx}{(2+5x)(3-7x)}$, б) $\int \frac{2x^2-7x+8}{x^4-10x^2+9}dx$;

4.6 а) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$, б) $\int \frac{x^4-3x^3-x^2+4x+5}{x^3-5x^2-x+5}dx$;

4.7 а) $\int \frac{dx}{(2+7x)(3+5x)}$, б) $\int \frac{x^3+2x+3}{x^3-9x^2-10x}dx$;

4.8 а) $\int \frac{xdx}{(x-4)(x+7)}$, б) $\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}dx$;

4.9 а) $\int \frac{xdx}{(2-7x)(3+4x)}$, б) $\int \frac{2x^4-7x+8}{x^4-10x^2+9}dx$;

4.10 а) $\int \frac{dx}{(x-7)(x-8)}$, б) $\int \frac{x^4+x+5}{x(x-3)(x-6)}dx$;

5 Вычислить интегралы (корни знаменателя – только действительные числа, но среди них есть кратные).

5.1 а) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x-3)^2}$, б) $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$;

5.2 а) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+2)(x-3)}$, б) $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx$;

5.3 а) $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)^2(x+3)}$, б) $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$;

5.4 а) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)^2}$, б) $\int \frac{x^5dx}{x^4-2x^3+2x-1}$;

5.5 а) $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)^2(x+3)}$, б) $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^5-4x^4+4x^3}dx$;

5.6 а) $\int \frac{dx}{(x-4)(x-2)^2(x+5)}$, б) $\int \frac{x^4+5x^3-10x^2-8x+5}{(x-2)^3(x+1)^2}dx$;

5.7 а) $\int \frac{dx}{(x+6)(x+2)(x+7)^2}$, б) $\int \frac{3x^2+1}{x^6-3x^4+3x^2-1}dx$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

5.8 а) $\int \frac{dx}{(x-6)(x-2)^3(x+4)}$, б) $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx$;

5.9 а) $\int \frac{dx}{(x+5)(x+7)(x-3)^4}$, б) $\int \frac{2x^2+5x-8}{(x-5)^3(x+2)^2}dx$;

5.10 а) $\int \frac{dx}{(x-7)(x-2)^3(x+5)}$, б) $\int \frac{x^5-x+1}{x^6-x^5}dx$.

6 Найти интегралы (знаменатель имеет комплексные корни).

6.1 а) $\int \frac{dx}{1+x^6}$, б) $\int \frac{x^3dx}{(x^2+x+2)(x^2-2x+3)}$;

6.2 а) $\int \frac{xdx}{1+x^3}$, б) $\int \frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}dx$;

6.3 а) $\int \frac{dx}{1-x^4}$, б) $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+2x^2}dx$;

6.4 а) $\int \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)}$, б) $\int \frac{3x^2+2x+10}{(x^3+x^2)(2x^2-4x+5)}dx$;

6.5 а) $\int \frac{dx}{x^4+4x^2-1}$, б) $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)(x^3-2x^2+x-2)}dx$;

6.6 а) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$, б) $\int \frac{x^7+2}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx$;

6.7 а) $\int \frac{xdx}{8+x^3}$, б) $\int \frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}dx$;

6.8 а) $\int \frac{dx}{16-x^4}$, б) $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+2x^2}dx$;

6.9 а) $\int \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)}$, б) $\int \frac{3x^2+2x+10}{(x^3+x\ )(2x^2-4x+5)}dx$;

6.10 а) $\int \frac{dx}{x^4+9x^2-1}$, б) $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x^2+4)(x^3-2x^2+x-2)}dx$.

7 Найти интегралы методом неопределённых коэффициентов и не прибегая к нему.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

7.1 $\int \frac{dx}{x^4-4}$;

7.2 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;

7.3 $\int \frac{x^5dx}{(1+9x^2)^2}$;

7.4 $\int \frac{x^4dx}{x^2-x+1}$;

7.5 $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^5}$;

7.6 $\int \frac{x^3dx}{(1+4x^2)^5}$;

7.7 $\int \frac{x^7dx}{(3+4x^2)^3}$;

7.8 $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$;

7.9 $\int \frac{dx}{x(x^6+64)^2}$;

7.10 $\int \frac{x^5dx}{(1+16x^2)^2}$.

8 Найти интегралы, применяя метод Остроградского.

8.1 $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+4)^2}$;

8.2 $\int \frac{x^5}{(3+2x^2)^3}dx$;

8.3 $\int \frac{x^9dx}{(x^4-1)^2}$;

8.4 $\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+10)^2}dx$;

8.5 $\int \frac{x^7}{(4+25x^2)^4}dx$;

8.6 $\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}dx$;

8.7 $\int \frac{x^7}{(5+4x^2)^4}dx$;

8.8 $\int \frac{xdx}{(x^2+9)^3}$;

8.9 $\int \frac{x^5}{(9+4x^2)^3}dx$;

8.10 $\int \frac{x^9dx}{(x^4-16)^2}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Лабораторная работа 3
Интегрирование иррациональных функций

Некоторые часто встречающиеся интегралы от иррациональных функций можно вычислить методом рационализации подынтегральной функции. Этот метод заключается в отыскании такой подстановки, которая преобразует интеграл от функции рациональной. Для некоторых важнейших классов иррациональных функций существуют специальные подстановки, с помощью которых и удаётся осуществить метод рационализации.

Интеграл вида

$$\int R(x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\gamma})dx,$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in Q$ и $R(x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\gamma})$ – рациональная функция аргументов $x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\gamma}$ приводятся к интегралу от рациональной функции подстановкой $x = y^n$, где n – наименьшее кратное знаменателей дробей α, β, γ.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = \left[\begin{array}{l} x = t^4, \\ dx = 4t^3dt \end{array}\right] = \int \frac{1+t}{t^4+t^2}4t^3dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt =$$

$$= 4\int\left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt = 4\int\left(1+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right) = 4t + 2\ln\left(t^2+1\right) -$$

$$-4\mathrm{arctg}t + C = \left[t = \sqrt[4]{x}\right] = 4\sqrt[4]{x} + 2\ln\left(\sqrt[2]{x}+1\right) - 4\mathrm{arctg}\sqrt[4]{x} + C.$$

Интеграл вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\gamma}\right]dx, \text{ где } \alpha, \beta, \gamma \in Q$$

после введения замены переменной

$$\frac{ax+b}{cx+d} = y^n,$$

где n – наименьшее общее кратное знаменателей дробей α, β, γ, переходит в интеграл от рациональной функции.

Пример 2. Вычислить интеграл

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}.$$

Решение.

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1} = \left[t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, dx = \frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2} \right] =$$

$$= -3\int \frac{dt}{t^3-1} = -\frac{1}{2}\ln\frac{(1-t)^2}{1+t+t^2} + \sqrt{3}\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Интеграл от биноминального дифференциала

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \text{ где } m,n,p \in Q$$

только в трёх случаях может быть выражен в конечном виде через алгебраические, логарифмические и обратные круговые функции:

1) если p – целое число, тогда применяется подстановка $x = y^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n;

2) если $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число, то следует применить подстановку $a+bx^n = y^s$, где s – знаменатель дроби p;

3) если $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое число, то применяют подстановку $ax^{-n}+b = y^s$, где s – знаменатель дроби p.

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)^{1,5}}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{1,5}} = \left[\begin{array}{l} a=b=1; p=-\dfrac{3}{2}\notin Z; m=-2; n=2; \\ \dfrac{m+1}{n} = -\dfrac{1}{2}\notin Z; \dfrac{m+1}{n}+p=-2\in Z; \\ t^2 = x^{-2}+1; x=(t^2-1)^{\frac{1}{2}}; dx = -0,5(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}2tdt \end{array} \right] =$$

$$= -\int \left(t^2-1\right)\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^{-1,5}\left(t^2-1\right)^{-1,5}tdt = -\int \frac{t^2-1}{t^2}dt = -\int dt + \int\frac{dt}{t} =$$

$$= -t-\frac{1}{t}+c = \left[t = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right] = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + C.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Интегралы вида

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx, \quad a\neq 0, b^2-4ac\neq 0$$

сводятся к интегралам от рациональных функций подстановками Эйлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x\pm t$, если $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm xt\pm\sqrt{c}$, если $c>0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm(x-x_1)t$;

4) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm(x-x_2)t$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена.

Знаки в правых частях неравенств можно брать в любых комбинациях. А подстановки Эйлера приводят к довольно сложным интегралам от рациональных функций, поэтому в простых случаях рекомендуем пользоваться следующими приёмами:

1-й случай. Интегралы вида

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n вычислять с помощью метода неопределённых коэффициентов, пользуясь формулой

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+b+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $(n-1)$ с неопределёнными коэффициентами; а λ – число.

2-й случай. В интеграле

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+b+c}}, n\in\mathrm{N}$$

можно делать подстановку $x-\alpha=\dfrac{1}{z}$.

3-й случай. В интеграле

$$\int\frac{dx}{(x^2+b^2)^n\sqrt{ax^2+c}}, n\in\mathrm{N}$$

можно делать замену $\sqrt{a+\dfrac{c}{x^2}}=z$.

4-й случай. В интеграле

$$\int\frac{P(x)dx}{Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

где $Q(x)$ и $P(x)$ – многочлены, необходимо разложить дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на элементарные.

5-й случай. Для вычисления интегралов, не содержащих другой иррациональности, кроме квадратного корня из квадратного трехчлена, применяются тригонометрические замены. Для этого необходимо из квадратного трехчлена, находящегося под корнем, выделить полный квадрат, после чего получим следующие выражения:

1) при $a > 0$ получим сумму квадратов вида $k^2 + y^2$ или разность квадратов $y^2 - k^2$. Для уничтожения иррациональности применяем замену $y = k \cdot \mathrm{tg} t$;

2) при $a < 0$ получим разность квадратов $k^2 - y^2$ или $(-k^2 - y^2)$. В первом случае применяем замену $y = k \cdot \sin t$. Второй случай не представляет интереса, так как корень здесь не имеет вещественного значения.

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx = \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \\ x = \dfrac{2t-1}{1-t^2}, dx = 2\dfrac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{-2tdt}{1-t^2} = \ln\left|1-t^2\right| + C = \left[t = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \right] =$$

$$= \ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right| + C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Решение.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \left[\begin{array}{l} x = a\cos t; \\ dx = -a\sin tdt \end{array}\right] = \int \sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}(-a)\sin tdt =$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$=-a^2\int\sqrt{a-\cos^2 t}\sin t dt=-a^2\int\sin^2 t dt=-\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)dt=$$

$$=-\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\left[t=\arccos\frac{x}{a}\right]=$$

$$=-\frac{a^2}{2}\left(\arccos\frac{x}{a}-\frac{1}{4}\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\right)+C=$$

$$=-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+\frac{a^2x}{8a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C=-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+\frac{x}{8}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

1 Вычислить интегралы.

1.1 а) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$, б) $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$, в) $\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}$;

1.2 а) $\int\frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$, б) $\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$, в) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$;

1.3 а) $\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{1-\sqrt[6]{x}}$, б) $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$, в) $\int\frac{(1-\sqrt[6]{x})^3dx}{1+\sqrt[3]{x}}$;

1.4 а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$, б) $\int\frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$, в) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^2}$;

1.5 а) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}+2\sqrt{x^3}}$, б) $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$, в) $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}}dx$;

1.6 а) $\int\frac{\sqrt[4]{x}dx}{2+\sqrt[4]{x}}$, б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, в) $\int\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$;

1.7 а) $\int\frac{1-3\sqrt{x}}{1+4\sqrt{x}}dx$, б) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+5}$, в) $\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{x(\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x})}$;

1.8 а) $\int\frac{\sqrt[5]{x}dx}{9-\sqrt[5]{x}}$, б) $\int\frac{5-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{4x}}dx$, в) $\int\frac{(7-\sqrt[6]{x})^3dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}$;

1.9 а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+4\sqrt{x^3}}$, б) $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{9x}}$, в) $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[6]{x^5}}dx$;

1.10 а) $\int\frac{x^{1/7}dx}{2+\sqrt[7]{x}}$, б) $\int\frac{dx}{\sqrt{16x}+\sqrt[5]{x}}$, в) $\int\frac{\sqrt[6]{x}+4}{\sqrt{4x}+\sqrt[3]{27x}}dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2 Вычислить интегралы.

2.1 а) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$, б) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$, в) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}$;

2.2 а) $\int x\sqrt[4]{x-2}dx$, б) $\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}dx$, в) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-3)^3(x+1)^5}}$;

2.3 а) $\int \frac{x^4}{\sqrt{x-1}}dx$, б) $\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{dx}{x^3}$, в) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^5(1+x)^3}}$;

2.4 а) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$, б) $\int \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{dx}{x^2}$, в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$;

2.5 а) $\int \frac{x^2dx}{(5x+2)\sqrt{5x+2}}$, б) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$, в) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3(x+1)}}$;

2.6 а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+3}}$, б) $\int \sqrt[3]{\frac{x+4}{x-1}}dx$, в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)^4}}$;

2.7 а) $\int x\sqrt[4]{x+3}dx$, б) $\int \sqrt[5]{\frac{x+5}{x+2}}\cdot\frac{dx}{x^3}$, в) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-3)^3(x+1)^5}}$;

2.8 а) $\int \frac{x^4}{\sqrt{x-2}}dx$, б) $\int x\sqrt{\frac{x+6}{x-9}}dx$, в) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(7-x)^2}}$;

2.9 а) $\int \frac{\sqrt{x-1}+3}{\sqrt{x-1}+1}dx$, б) $\int \sqrt[3]{\frac{x+4}{x+1}}dx$, в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4}}$;

2.10 а) $\int \frac{x^4dx}{(7x+2)\sqrt{7x+2}}$, б) $\int x\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}dx$, в) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-4)^3(x+8)}}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3 Вычислить интегралы.

3.1 $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

3.2 $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

3.3 $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$;

3.4 $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

3.5 $\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x+1}}$;

3.6 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$;

3.7 $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x^4})^4dx$;

3.8 $\int \sqrt{x(3+4x^3)}dx$;

3.9 $\int \frac{x^4dx}{(1-x^2)^{1,5}}$;

3.10 $\int x^3\sqrt[3]{5+x^2}dx$.

4 Вычислить интегралы.

4.1 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}}$, б) $\int \frac{15x-7}{\sqrt{x^2+8x+1}}dx$;

4.2 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-x^2}}$, б) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{7+8x-16x^2}}dx$;

4.3 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x+4}}$, б) $\int \frac{2-8x}{\sqrt{4x^2-16x-7}}dx$;

4.4 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{11+8x-4x^2}}$, б) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{1-10x-25x^2}}dx$;

4.5 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+9}}$, б) $\int \frac{x+8}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx$;

4.6 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$, б) $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$;

4.7 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+16x+8x^2}}$, б) $\int \frac{4-x}{\sqrt{11+12x+9x^2}}dx$;

4.8 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$, б) $\int \frac{x+1}{\sqrt{16-2x-x^2}}dx$;

4.9 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+1}}$, б) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{25x^2+10x+2}}dx$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

4.10 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+12x-9x^2}}$, б) $\int \frac{2+7x}{\sqrt{4x^2-8x-7}}dx$.

5 Вычислить интегралы.

5.1

а) $\int \sqrt{x^2+6x+4}dx$,

б) $\int \frac{2x^2-4x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$,

в) $\int \frac{dx}{(x-11)\sqrt{x^2+x+1}}$.

5.2

а) $\int \sqrt{5+4x+8x^2}dx$,

б) $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$,

в) $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$.

5.3

а) $\int \sqrt{9x^2+12x+7}dx$,

б) $\int \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-6x+3}}dx$,

в) $\int \frac{dx}{(x-2)^3\sqrt{3x^2-8x+5}}$.

5.4

а) $\int \sqrt{7+10x-25x^2}dx$,

б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-6x+3}}dx$,

в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-x^2}}$.

5.5

а) $\int \sqrt{5-2x-x^2}dx$,

б) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$,

в) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$.

5.6

а) $\int \sqrt{5+4x+x^2}dx$,

б) $\int \frac{x^6dx}{\sqrt{x^2+1}}$,

в) $\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}$.

5.7

а) $\int \sqrt{4-4x+x^2}dx$,

б) $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$,

в) $\int \frac{dx}{(x-2)^3\sqrt{x^2-3x-1}}$.

5.8

а) $\int \sqrt{x^2-10x+6}dx$,

б) $\int \frac{3x^2-18x}{\sqrt{x^2-6x+3}}dx$,

в) $\int \frac{dx}{(x+7)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

5.9

а) $\int \sqrt{6+8x-4x^2}\,dx$,

б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9x^2-6x+3}}\,dx$,

в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{15+3x^2}}$.

5.10

а) $\int \sqrt{5+6x+9x^2}\,dx$,

б) $\int \frac{(11x^2+66x)dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$,

в) $\int \frac{dx}{(3x+1)^2\sqrt{4x^2-4x+5}}$.

6 Вычислить интегралы, используя тригонометрические замены.

6.1 а) $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$, б) $\int \frac{xdx}{(x^2+x+4)\sqrt{4x^2+4x+5}}$;

6.2 а) $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+4)^7}}$;

6.3 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$, б) $\int \frac{(x+4)dx}{(x^2+2x+4)\sqrt{x^2+2x+5}}$;

6.4 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-16)^5}}$, б) $\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$;

6.5 а) $\int \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$, б) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$;

6.6 а) $\int \frac{dx}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$, б) $\int \frac{xdx}{(3x^2+2x+3)\sqrt{2x^2-x+2}}$;

6.7 а) $\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{x^2+16}}$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+3)^5}}$;

6.8 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{(25-x^2)^3}}$, б) $\int \frac{(x-8)dx}{(x^2+2x-4)\sqrt{x^2+2x-5}}$;

6.9 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{(81-x^2)^3}}$, б) $\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}}$;

6.10 а) $\int \frac{dx}{(x^2-25)\sqrt{x^2-25}}$, б) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2\sqrt{4x^2+2x+1}}$;

Лабораторная работа 4

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Интегрирование тригонометрических функций

Интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

где $R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция синуса и косинуса, сводится к интегралу от рациональной дроби с помощью универсальной подстановки

$t = \mathrm{tg}(0,5x), \quad x \in (-\pi;\pi)$.

Используя известные тригонометрические формулы, получим следующие выражения для подынтегральной функции:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Но универсальная подстановка часто приводит к громоздким вычислениям, поэтому использовать её следует только тогда, когда не видно других путей к вычислению интеграла. Укажем случаи, в которых легко можно не применять универсальную тригонометрическую подстановку.

1-й случай. Интегралы вида

$$\int \sin kx \sin lx dx, \int \sin kx \cos lx dx, \int \cos kx \cos lx dx, \text{ где } k, l \in \mathrm{R}.$$

Из тригонометрии известно, что произведения тригонометрических функций, находящихся под знаками этих интегралов, преобразуются в суммы по следующим формулам:

$$\sin kx \cos lx = 0,5[\sin(k-l)x + \sin(k+l)x];$$

$$\cos kx \cos lx = 0,5[\cos(k-l)x + \cos(k+l)x];$$

$$\sin kx \sin lx = 0,5[\cos(k-l)x - \cos(k+l)x].$$

Заменив в рассматриваемых интегралах подынтегральные функции по этим формулам, легко выполнить интегрирование.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int \sin 2x \cdot \cos 5x dx.$$

Решение.

$$\int \sin 2x \cdot \cos 5x dx = 0,5\int \left(\sin 7x + \sin\left(-3x\right)\right)dx =$$

$$= 0,5\int \sin 7x dx - 0,5\int \sin 3x dx = -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

2-й случай. Интегралы вида

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$$

вычисляются особенно просто в четырёх случаях.

1) Если m – нечётное положительное число, то есть $m = 2k+1, k \in \mathrm{N}$. В этом случае подынтегральное выражение преобразовываем так: из выражения $\sin^m x = \sin^{2k+1} x$ выделяем первую степень синуса и получаем:

$$\sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \sin x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1-\cos^2 x)^k \sin x,$$

а подынтегральное выражение

$$\sin^m x \cos^n x dx = -(1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x).$$

Теперь очевидна подстановка $\cos x = t$.

1) Если n– положительное нечётное число, то есть $n = 2k+1, k \in \mathrm{N}$.

Из выражения $\cos^n x = \cos^{2k+1} x$ выделим первую степень косинуса и получаем:

$$\cos^{2k+1} x = \cos^{2k} x \cos x = (1-\sin^2 x)^k \cos x.$$

Подынтегральное выражение запишется так:

$$\sin^m x \cos^n x dx = \sin^m x (1-\sin^2 x)^k d(\sin x).$$

Применим подстановку $\sin x = t$.

3) Если $(m+n)$ – чётное отрицательное число, то есть $m+n = -2k, k \in \mathrm{N}$.

В рассматриваемом случае любая из подстановок $\mathrm{tg} x = t$ или $\mathrm{ctg} x = t$ преобразует подынтегральную функцию в многочлен или в многочлен, сложенный с целыми отрицательными степенями новой переменной *t*.

4) Если сумма показателей степени синуса и косинуса равна нулю, то есть $m+n = 0, m, n \in \mathrm{Z}$. В этом случае интеграл приводится к интегралу вида $\int \mathrm{tg}^m x dx$, если $m > 0$ или к интегралу $\int \mathrm{ctg}^n x dx$, если $n > 0$. К ним применимы соответственно подстановки $\mathrm{tg} x = t$ или $\mathrm{ctg} x = t$.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int \cos^2 x \sin x dx.$$

Решение.

$$\int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d\left(\cos x\right) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

3-й случай. Интегрирование чётных степеней синуса и косинуса:

$$\int \sin^{2m} x dx, \int \cos^{2n} x dx, \int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx, \text{ где } m, n \in \mathrm{N}$$

вычисляются с применением формул

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$\sin^2 x = 0,5(1-\cos 2x)$ и $\cos^2 x = 0,5(1+\cos 2x)$.

Они позволяют снизить степень подынтегральной функции в этих интегралах.

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx.$$

Решение.

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx = 0,25\int \sin^2 2x dx = 0,125\int \left(1-\cos 4x\right) dx =$$

$$= 0,125\int dx + 0,125\int \cos 4x dx = 0,125x + 0,03125\sin 4x + C.$$

4-й случай. Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ обладает одним из свойств

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$,

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$,

то для вычисления интеграла удобнее использовать соответственно подстановки:

$t = \cos x$, $x \in \left(-0,5\pi; 0,5\pi\right)$, $t = \sin x$, $x \in (0;\pi)$, $t = \mathrm{tg} x$, $x \in \left(-0,5\pi; 0,5\pi\right)$.

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx.$$

Решение.

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg} x = t; \\ x = \mathrm{arctg} t; \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right] = \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt = \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= t + \mathrm{arctg} t + C = \left[t = \mathrm{tg} x\right] = \mathrm{tg} x + \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg} x\right) + C = \mathrm{tg} x + x + C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}.$$

Решение.

Применяя универсальную тригонометрическую подстановку, получим:

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = 2\int \frac{dt}{8t + 3(1-t^2) + 5(1+t^2)} =$$

$$= 2\int \frac{dx}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{d\left(t+2\right)}{\left(t+2\right)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = \left[\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t\right] = -\frac{1}{\mathrm{tg}(0,5x) + 2} + C.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

1 Вычислить интегралы.

1.1 а) $\int \sin 6x \cos 7x dx$, б) $\int \sin 2x \cos 5x \sin 9x dx$;

1.2 а) $\int \cos 3x \cos 9x dx$, б) $\int \sin x \cos 2x \cos 3x dx$;

1.3 а) $\int \sin 2x \sin 5x dx$, б) $\int \cos x \cos 2x \cos 5x dx$;

1.4 а) $\int \cos 3x \cos x dx$, б) $\int \sin x \cos 4x \sin 8x dx$;

1.5 а) $\int \sin 5x \sin(0,5x) dx$, б) $\int \sin 3x \cos x \cos 2x dx$;

1.6 а) $\int \sin 0,75x \cos 0,25x dx$, б) $\int \sin 3x \cos x \cos 2x dx$;

1.7 а) $\int \cos 2x \cos 8x dx$, б) $\int \sin 3x \cos x \cos 4x dx$;

1.8 а) $\int \sin 7x \sin 9x dx$, б) $\int \cos 4x \cos 7x \cos 5x dx$;

1.9 а) $\int \sin 3x \sin 0,25x dx$, б) $\int \sin 7x \cos x \cos 2x dx$;

1.10 а) $\int \sin 2x \cos 3x dx$, б) $\int \sin 3x \cos x \cos 12x dx$.

2 Вычислить интегралы.

2.1 а) $\int \sin^3 x dx$, б) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sin^6 2x} dx$;

2.2 а) $\int \cos^2 x \sin^5 x dx$, б) $\int \frac{\sin^3 3x}{\cos^4 3x} dx$;

2.3 а) $\int \cos^3 x dx$, б) $\int \frac{\sin^5 2x}{\cos^4 2x} dx$;

2.4 а) $\int \sin^7 x \cos^6 x dx$, б) $\int \frac{\sin^3 3x}{\cos 3x} dx$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2.5 а) $\int \sin^7 x dx$, б) $\int \frac{\sin 4x}{\cos^3 4x} dx$;

2.6 а) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$, б) $\int \frac{\cos^3 4x}{\sin 4x} dx$;

2.7 а) $\int \sin^5 x dx$, б) $\int \cos^5 3x \sin^2 3x dx$;

2.8 а) $\int \sin^4 x \cos^7 x dx$, б) $\int \frac{\sin^5 2x}{\cos^2 2x} dx$;

2.9 а) $\int \cos^5 x dx$, б) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sin 2x} dx$;

2.10 а) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$, б) $\int \frac{\cos^5 4x}{\sin^4 4x} dx$.

3 Найти интегралы.

3.1 а) $\int \cos^4 5x dx$, б) $\int \frac{\sin^4 3x}{\cos^8 3x} dx$, в) $\int \sqrt{\frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}} dx$;

3.2 а) $\int \sin^4 (0,5x) dx$, б) $\int \frac{dx}{\sin^4 5x}$, в) $\int \sqrt[3]{\frac{\cos^2 3x}{\sin^8 3x}} dx$;

3.3 а) $\int \cos^6 2x dx$, б) $\int \frac{\cos^4 2x}{\sin^6 2x} dx$, в) $\int \sqrt{\frac{\sin 2x}{\cos^5 2x}} dx$;

3.4 а) $\int \sin^6 (0,25x) dx$, б) $\int \frac{dx}{\sin^6 4x \cos^6 4x}$, в) $\int \sqrt[3]{\frac{\sin 3x}{\cos^7 3x}} dx$;

3.5 а) $\int \cos^6 (0,25x) dx$, б) $\int \frac{dx}{\cos^4 3x}$, в) $\int \sqrt{\frac{\sin 4x}{\cos^3 4x}} dx$;

3.6 а) $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$, б) $\int \frac{dx}{\cos^6 2x}$, в) $\int \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}} dx$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3.7 а) $\int \sin^2 2x \cos^4 2x dx$, б) $\int \frac{dx}{\sin^6 5x}$, в) $\int \sqrt{\frac{\sin 5x}{\cos^5 5x}} dx$;

3.8 а) $\int \sin^4 2x \cos^2 2x dx$, б) $\int \frac{\cos^4 3x}{\sin^8 3x} dx$, в) $\int \sqrt[3]{\frac{\sin 6x}{\cos^7 6x}} dx$;

3.9 а) $\int \cos^4 (0{,}5x) dx$, б) $\int \frac{dx}{\cos^6 3x \sin^2 3x}$, в) $\int \sqrt[4]{\frac{\cos^2 3x}{\sin^8 3x}} dx$;

3.10 а) $\int \sin^4 (0{,}75x) dx$, б) $\int \frac{dx}{\sin^2 4x \cos^6 4x}$, в) $\int \sqrt[5]{\frac{\sin 3x}{\cos^7 3x}} dx$;

4 Вычислить интегралы.

4.1 $\int \mathrm{tg}^4 2x dx$;

4.2 $\int \mathrm{ctg}^5 6x dx$;

4.3 $\int \mathrm{ctg}^6 4x dx$;

4.4 $\int \mathrm{tg}^8 3x dx$;

4.5 $\int \mathrm{tg}^5 2x dx$;

4.6 $\int \mathrm{ctg}^2 5x dx$;

4.7 $\int \mathrm{tg}^3 6x dx$;

4.8 $\int \mathrm{tg}^2 4x dx$;

4.9 $\int \mathrm{ctg}^4 3x dx$;

4.10 $\int \mathrm{ctg}^7 2x dx$.

5 Вычислить интегралы.

5.1 $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 9\sin^2 x}$;

5.2 $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$;

5.3 $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}$;

5.4 $\int \frac{dx}{\cos^2 2x + 9\sin^2 2x}$;

5.6 $\int \frac{\cos^5 3x}{\sin^4 3x} dx$;

5.7 $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$;

5.8 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x}$;

5.9 $\int \frac{dx}{\sin^4 2x \cos^3 2x}$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

5.5 $\int \frac{\sin^4 2x \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x} dx$;

5.10 $\int \frac{\cos^7 3x}{\sin^4 3x} dx$.

6 Применив универсальную тригонометрическую подстановку, найти интегралы.

6.1 $\int \frac{5 + 6\sin x}{\sin x(4 + 3\cos x)} dx$;

6.2 $\int \frac{dx}{\cos x(1 - \sin x)}$;

6.3 $\int \frac{5 + 9\cos x}{\sin x(2 + 3\cos x)} dx$;

6.4 $\int \frac{dx}{\cos^2 x(1 + \cos x)}$;

6.5 $\int \frac{4 + 5\sin x}{\sin x(7 + 3\sin x)} dx$;

6.6 $\int \frac{dx}{\cos x(4 - \sin x)}$;

6.7 $\int \frac{1 - 9\cos x}{\sin x(2 + 3\cos x)} dx$;

6.8 $\int \frac{dx}{\cos^2 x(9 - \cos x)}$;

6.9 $\int \frac{4 + \sin x}{\sin x(6 + \sin x)} dx$;

6.10 $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Лабораторная работа 5
Интегрирование трансцендентных функций

Интегралы вида $\int R(e^x)dx$ сводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой $t = e^x$. При этом

$$x = \ln t, dx = \frac{dt}{t}.$$

Интегралы $\int R(\text{sh}x, \text{ch}x)dx$ всегда можно свести к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $t = \text{th}(0{,}5x)$. В этом случае

$$\text{sh}x = \frac{2t}{1-t^2}, \text{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

Интегралы вида

$$\int \text{ch}^n x \cdot \text{sh}^m x dx, \ (m \geq 0, n \geq 0, m, n \in \text{Z})$$

в случае, если хотя бы одно из чисел m или n – *нечетное*, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через кофункцию, приходим к табличному интегралу. Если же m и n – *четные* числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью формул:

$$\text{ch}^2 x = \frac{1+\text{ch}2x}{2}, \text{sh}^2 x = \frac{\text{ch}2x - 1}{2}, \text{sh}x \cdot \text{ch}x = \frac{1}{2}\text{sh}2x.$$

Если $m, n \in Q$, то подстановками $t = \text{sh}x$ или $t = \text{ch}x$ интеграл $\int \text{ch}^n x \cdot \text{sh}^m x dx$ сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x}+1}.$$

Решение.

$$\int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x}+1} = \begin{bmatrix} t = e^x, \\ x = \ln t, dx = \dfrac{dt}{t} \end{bmatrix} = \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = t - \text{arctg}t + C = \left[t = e^x\right] = e^x - \text{arctg}\left(e^x\right) + C.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int \mathrm{ch}^2 x \cdot \mathrm{sh}^3 x dx.$$

Решение.

$$\int \mathrm{ch}^2 x \cdot \mathrm{sh}^3 x dx = \int \mathrm{ch}^2 x \cdot \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{sh} x dx = \int \mathrm{ch}^2 x \left(\mathrm{ch}^2 x - 1\right) d\left(\mathrm{ch} x\right) =$$

$$= \int \mathrm{ch}^4 x d\left(\mathrm{ch} x\right) - \int \mathrm{ch}^2 x d\left(\mathrm{ch} x\right) = \frac{\mathrm{ch}^5 x}{5} - \frac{\mathrm{ch}^3 x}{5} + C.$$

Известно, что любая непрерывная на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то есть существует такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Однако не всякую первообразную $F(x)$ можно выразить через конечное число элементарных функций. Интегралы от трансцендентных функций часто не выражают через элементарные функции.

Примеры интегралов, которые не выражаются через элементарные функции:

$\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int e^{-x^2} dx$ – *интеграл Пуассона,*

$\mathrm{Si}(x) = \displaystyle\int \frac{\sin x}{x} dx$ – *интегральный синус,*

$\displaystyle\int \frac{\cos x}{x} dx$ – *интегральный косинус,*

$\mathrm{Li}(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{\ln x}$ – *интегральный логарифм,*

$\displaystyle\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx$ – *интегралы Френеля,*

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$ – *эллиптический интеграл первого рода,*

$\displaystyle\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx$ – *эллиптический интеграл второго рода.*

Каждый из приведенных интегралов представляет собой функцию, не являющуюся элементарной.

Пример 3. Выразить через функции $\mathrm{Si}(x), \mathrm{Li}(x)$ и элементарные функции интеграл

$$\int \frac{dx}{\ln^2 x}, \ x < 1.$$

Решение.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\int \frac{dx}{\ln^2 x} = \int \frac{x\,dx}{x\ln^2 x} = \left[\begin{array}{l} u = x,\ dv = \dfrac{dx}{x\ln^2 x}, \\ du = dx,\ v = \displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \end{array} \right] = -\frac{x}{\ln x} + \int \frac{dx}{\ln x} =$$

$$= -\frac{x}{\ln x} + \mathrm{Li}(x) + C.$$

1 Вычислить интегралы.

1.1 $\int (x^3 + x)e^{-x^2}dx$;

1.2 $\int (\mathrm{sh}x - x^3)^2 dx$;

1.3 $\int x \cdot \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{ch}x\,dx$;

1.4 $\int \sqrt{x}\,\mathrm{arcctg}\sqrt{x}\,dx$;

1.5 $\int e^{\arcsin x}dx$;

1.6 $\int (2x+1)e^{\mathrm{arcctg}x}dx$;

1.7 $\int (1-2x)^2 e^x dx$;

1.8 $\int xe^{\sqrt[3]{x}}dx$;

1.9 $\int x^7\mathrm{arcctg}x\,dx$;

1.10 $\int e^{-x}\arcsin e^x dx$;

2 Вычислить интегралы от гиперболических функций.

2.1 а) $\int \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{sh}7x\,dx$, б) $\int \frac{\mathrm{sh}^4 x}{\mathrm{ch}^6 x}dx$, в) $\int \frac{\mathrm{th}x}{(\mathrm{th}x+2)^2}dx$;

2.2 а) $\int \mathrm{sh}^3 x\,dx$, б) $\int \frac{\mathrm{ch}^5 x}{\mathrm{sh}x}dx$, в) $\int \frac{\mathrm{sh}2x\,dx}{(\mathrm{sh}x+1)(\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}x)}$;

2.3 а) $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x}$, б) $\int \frac{dx}{(1+\mathrm{ch}x)^2}$, в) $\int \frac{4\mathrm{ch}x - 3\mathrm{sh}x}{2\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x}dx$;

2.4 а) $\int \mathrm{ch}^3 x \cdot \mathrm{sh}x\,dx$, б) $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^4 x \cdot \mathrm{ch}^2 x}$, в) $\int \frac{dx}{1-\mathrm{th}x}$;

2.5 а) $\int \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}^3 x\,dx$, б) $\int \mathrm{th}^3 x\,dx$, в) $\int \frac{dx}{1 - 6\mathrm{sh}2x - 37\mathrm{ch}^2 x}$;

2.6 а) $\int \mathrm{sh}^3 x \cdot \mathrm{ch}^2 x\,dx$, б) $\int \mathrm{th}^4 x\,dx$, в) $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^3 x + 3\mathrm{ch}x}$;

2.7 а) $\int \mathrm{ch}x \cdot \mathrm{sh}4x\,dx$, б) $\int \frac{\mathrm{ch}^3 x}{\mathrm{sh}x}dx$, в) $\int \frac{\mathrm{th}x\,dx}{(2+\mathrm{th}x)^2}$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2.8 а) $\int \mathrm{sh}^4 x \cdot \mathrm{ch}^4 x dx$, б) $\int \mathrm{cth}^3 x dx$, в) $\int \frac{\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x} dx$;

2.9 а) $\int \mathrm{ch}^2 3x \cdot \mathrm{sh}^2 3x dx$, б) $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}^4 x}$, в) $\int \frac{\mathrm{sh}^2 x dx}{1 - \mathrm{sh}^2 x}$;

2.10 а) $\int \mathrm{sh}5x \cdot \mathrm{ch}3x dx$, б) $\int \mathrm{cth}^3 x dx$, в) $\int \frac{dx}{10\mathrm{ch}^2 x - 1 - 2\mathrm{sh}2x}$.

3 Вычислить интегралы.

3.1

а) $\int \frac{e^x + e^{3x}}{1 - e^{2x} + e^{4x}} dx$,

б) $\int \frac{\ln(1 - x + x^2)}{x^2} dx$,

в) $\int (x^2 - 2x + 2) e^{-x} dx$.

3.2

а) $\int \frac{dx}{(1 - e^x)^4}$,

б) $\int \frac{(x \ln x)^2}{\sqrt{x}} dx$,

в) $\int x^7 e^{-x^2} dx$.

3.3

а) $\int \frac{dx}{2 - e^x - e^{2x}}$,

б) $\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx$,

в) $\int x^3 e^{3x} dx$.

3.4

а) $\int \frac{dx}{1 + e^x + e^{2x} + e^{3x}}$,

б) $\int \frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2} dx$,

в) $\int x^2 \ln \sqrt{x} dx$.

3.5

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}}}$,

б) $\int \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) dx$,

в) $\int x^3 \ln^3 x dx$.

3.6

а) $\int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} dx$,

б) $\int e^x \ln(1 + e^{-x}) dx$,

в) $\int (x^2 - 3x + 5) \ln x dx$.

3.7

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^x} + \sqrt{1 + e^x}}$,

3.8

а) $\int \frac{dx}{2 + e^x - e^{2x}}$,

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

б) $\int \frac{(x\ln 2x)^2}{\sqrt{2x}}dx$,

в) $\int x^5 e^{-x^2}dx$.

б) $\int \frac{\ln x+1}{\ln^2 x}dx$,

в) $\int x^2 e^{3x}dx$.

3.9

а) $\int \frac{dx}{(1+e^x)^3}$,

б) $\int \ln(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})dx$,

в) $\int x^3 \ln^2 x dx$.

3.10

а) $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x+1}dx$,

б) $\int e^{-x}\ln(1-e^{-x})dx$,

в) $\int (x^2+2x+5)\ln x dx$.

4 Выразить интегралы через функции $\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Li}(x)$, $\Phi_0(x)$ и элементарные функции

4.1 $\int \frac{e^x}{x}dx,\ \ x<0$;

4.2 $\int \frac{1-x}{x}e^{-x}dx,\ \ x>0$;

4.3 $\int \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$;

4.4 $\int \frac{dx}{\ln^3 x}$;

4.5 $\int \frac{x^{100}dx}{\ln x}$;

4.6 $\int \frac{x\sin x-\cos x}{x^2}dx$;

4.7 $\int \frac{\sin 3x}{x^3}dx$;

4.8 $\int e^{-(2x^2+4x-5)}dx$;

4.9 $\int x^2 e^{-x^2}dx$;

4.10 $\int \frac{\sin x^2}{x}dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Приложение А
(обязательное)
Таблица неопределенных интегралов

1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$;

2) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C\ (a > 0, a \neq 1)$;

3) $\int e^x dx = e^x + C$;

4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

6) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C,\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$**;**

8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C,\ x \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$**;**

9) $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C$;

10) $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C$;

11) $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C$;

12) $\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C$;

13) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C,\ a \neq 0$;

14) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a-x}{a+x}\right| + C,\ a \neq 0$;

15) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,\ |x| > |a|,\ a \neq 0$;

16) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,\ |x| < |a|,\ a \neq 0$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Литература

1. Демидович, В. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / В. П. Демидович. – М. : Наука, 1977. – 624 с.

2. Зверович, Э. И. Вещественный и комплексный анализ: в 7 ч. Ч. 1. Введение в анализ и дифференциальное исчисление / Э. И. Зверович. – Минск: Высш. шк., 2006. – 319 с.

3. Зорич, В. А. Математический анализ: в 2 ч. Ч. 1 / В. А. Зорич. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 544 с.

4. Кудрявцев, Л. Д. Учебник для студентов университетов и вузов: в 3 т. Т. 1. Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев.– М. : Высш. шк., 1988. – 712 с.

5. Сборник задач по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев [и др.] – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 496 с.

6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учебное пособие для вузов: в 3 ч. Ч. 2 / под ред. А. П. Рябушко. – Минск : Высш. шк., 1991. – 349 с.

7. Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 816 с.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Производственно-практическое издание

Атвиновский Александр Алексеевич,
Парукевич Ирина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 14.04.2016. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,6.
Уч.-изд. л. 2,8. Тираж 25 экз. Заказ 239.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ