Мошник

МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра алгебры и геометрии

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

по курсу "Алгебра и теория чисел" для студентов I курса математического факультета

Гомель 1988

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Составители: А.В.Бузланов, А.Ф.Васильев, В.С.Монахов

Рекомендовано к печати методическим советом математического факультета Гомельского государственного факультета

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее издание состоит из шести лабораторных работ, которые студент математического факультета должен выполнить в I семестре. Каждая работа содержит вопросы для самоконтроля, задание к лабораторной работе, примеры решения и оформления задач.

Вопросы для самоконтроля отражают теоретическую часть изучаемого раздела курса "Алгебра и теория чисел", а их знание служит допуском к выполнению практической части лабораторной работы. Практическая часть приведена в задании к лабораторной работе и с помощью банка данных, находящегося в конце практикума, становится индивидуальной для каждого студента. Решение "своих" задач каждому студенту необходимо оформить в отдельной ученической тетради и представить преподавателю для проверки и последующего собеседования. Образцы оформления решения задач приведены в каждой лабораторной работе. Выполнение лабораторных работ оценивается по двухбальной системе: "зачтено", "незачтено". Получение шести оценок "зачтено" служит допуском к экзамену.

За рамками лабораторных работ остается незначительная часть изучаемого курса, которая подробно обсуждается на лекциях и практических занятиях. Естественно, что на практические занятия также выносятся вопросы лабораторных тем.

Ниже приведен список учебников и задачников по изучаемому курсу. Студентам следует обратить внимание на то, что в различных учебниках материал излагается по разному, имеются расхождения в обозначениях, терминологии. Например, теория определителей в учебнике А.И.Кострикина [2] построена иначе, чем в остальных учебниках, а термин "перестановка" обозначает различные объекты в учебнике [4] и задачнике [II].

В настоящем практикуме под перестановкой понимается взаимно однозначное отображение конечного множества на себя. Лабораторная работа № 2 отражает теорию перестановок в объеме, необходимом для построения теории определителей, а также для иллюстрации элементов теории групп, изучаемых в третьем семестре. Материал лабораторных работ № 2 и № 3 соответствует материалу, изложенному в учебном пособии В.С.Монахова [6]. Для

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕ

выполнения остальных лабораторных работ можно использовать любой учебник по алгебре, например, учебник М.В.Милованова, Р.И. Тышкевич, А.С.Феденко [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Боревич З.И. Определители и матрицы. - М.: Наука, 1970.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. - М.: Наука, 1977.
3. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. - М.: Высшая школа, 1979.
4. Милованов М.В. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Часть I. - Мн.: Вышэйшая школа, 1984.
5. Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия в 2-х частях. Часть 2. - Мн.: Вышэйшая школа, 1987.
6. Монахов В.С. Перестановки и определители: Учебное пособие. - Гомель, 1987.
7. Учебно-методические указания по курсу "Алгебра"// Составитель - В.С.Монахов. - Гомель, 1987.
8. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - М.: Наука, 1984.
9. Шнеперман Л.Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях в двух частях. - Мн.: Вышэйшая школа, 1986-1987.
10. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. - М.: Наука, 1974.
11. Сборник задач по алгебре: Учебное пособие// Под редакцией А.И.Кострикина. - М.: Наука, 1987.
12. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. - М.: Наука, 1977.

Лабораторная работа № I

МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Вопросы для самоконтроля.

I. $k \times l$ -матрица. Строки и столбцы, их запись.
2. Равенство двух матриц.
3. Квадратные матрицы. Диагонали. Единичная матрица.
4. Сложение матриц и умножение матрицы на число, основные свойства. Нулевая матрица.
5. Противоположная матрица.
6. Произведение строки на столбец.
7. Умножение матриц.
8. Ассоциативность умножения матриц.
9. Умножение на единичную матрицу.
I0. Дистрибутивность умножения матриц относительно сложения.
II. Обратимые матрицы. Единственность обратной матрицы.
I2. Матрица, обратная к произведению обратимых матриц.
I3. Элементарные преобразования строк матрицы.
I4. Связь элементарных преобразований с умножением на элементарные матрицы.
I5. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
I6. Приведение матриц и систем линейных уравнений к ступенчатому виду.
I7. Транспонирование матриц, свойства.

Задание к лабораторной работе.

Даны матрицы A, B, C и функция $f(x)$.

I. Вычислить A^2, AB, CB, BA и $f(A)$.

2. Найти A^{-1} и $(AB)^{-1}$ с помощью элементарных преобразований. Сделать проверку.

3. Показать, что ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$.

4. Найти 2×2 -матрицу $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, удовлетворяющую уравнению $f(X) = 0$.

5 . Найти все квадратные матрицы порядка ?, перестановочные со всеми матрицами этого же порядка.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕ

П р и м е р ы   р е ш е н и я   и   о ф о р м л е н и я   з а д а ч.

П р и м е р I. Выполнить действия:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Обозначим первую матрицу через A, вторую через B, третью через C. Перемножим матрицы A и B.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot1+0\cdot2+2\cdot(-1)+0\cdot2 & 3\cdot(-2)+0\cdot(-1)+2\cdot1+0\cdot2 & 3\cdot2+0\cdot1+2\cdot(-2)+0\cdot(-1) \\ 0\cdot1+1\cdot2+2\cdot(-1)+1\cdot2 & 0\cdot(-2)+1\cdot(-1)+2\cdot1+1\cdot2 & 0\cdot2+1\cdot1+2\cdot(-2)+1\cdot(-1) \\ 2\cdot1+3\cdot2+0\cdot(-1)+0\cdot(-1) & 2\cdot(-2)+3\cdot(-1)+0\cdot1+0\cdot2 & 2\cdot2+3\cdot1+0\cdot(-2)+0\cdot(-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 8 & -7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Полученную матрицу сложим с матрицей C.

$$AB + C = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 8 & -7 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+(-2) & (-4)+0 & 2+(-3) \\ 2+0 & 3+6 & (-4)+(-3) \\ 8+5 & (-7)+(-2) & 7+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 2 & 9 & -7 \\ 13 & -9 & 15 \end{bmatrix}.$$

О т в е т: $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 2 & 9 & -7 \\ 13 & -9 & 15 \end{bmatrix}.$

П р и м е р 2. С помощью элементарных преобразований найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице A. Сделать проверку.

Р е ш е н и е. Запишем матрицу $(A|E)$, где E - единичная матрица, и преобразуем ее с помощью элементарных преобразований строк таким образом, чтобы получилась матрица вида $(E|B)$. Матрица B будет обратной к матрице A.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Мы оставили первую строку без изменений, ко второй прибавили первую, умноженную на (-2), к третьей прибавили первую. Теперь к третьей строке прибавим вторую. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim (A|E).$$

В этой матрице умножим третью строку на $\left(\frac{1}{2}\right)$. Затем прибавим третью строку, умноженную на (-2), ко второй, а также прибавим третью строку к первой.

$$(A|E) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Остается к первой строке прибавить вторую, а вторую строку умножить на (-I).

$$(A|E) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (E|B).$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

П р о в е р к а. Покажем, что $B = A^{-1}$, т.е. B является матрицей, обратной к матрице A. Для этого нужно проверить выполнение равенств $AB = BA = E$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac12&\frac12&-\frac12\\1&0&1\\-\frac12&\frac12&\frac12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac12+1+\frac12&\frac12+0-\frac12&-\frac12+1-\frac12\\-1+1+0&1+0+0&-1+1+0\\\frac12+0-\frac12&-\frac12+0+\frac12&\frac12+0+\frac12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-\frac12&\frac12&-\frac12\\1&0&1\\-\frac12&\frac12&\frac12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac12+1+\frac12&-\frac12+\frac12+0&\frac12+0-\frac12\\1+0-1&1+0+0&-1+0+1\\-\frac12+1-\frac12&-\frac12+\frac12+0&\frac12+0+\frac12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

О т в е т:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac12&\frac12&-\frac12\\1&0&1\\-\frac12&\frac12&\frac12\end{pmatrix}.$$

Лабораторная работа № 2

ПЕРЕСТАНОВКИ

В о п р о с ы д л я с а м о к о н т р о л я.

1. Взаимно однозначное отображение (биекция) множества.
2. Перестановка, ее запись. Тождественная (единичная) перестановка.
3. Умножение перестановок и его свойства.
4. Обратная перестановка и ее нахождение.
5. Симметрическая группа S_n степени n и ее порядок.
6. Цикл длины k. Зависимые и независимые циклы. Умножение циклов.
7. Разложение перестановки в произведение независимых циклов. Нахождение в такой записи обратной перестановки.
8. Транспозиция. Разложение цикла в произведение транспозиций.
9. Разложение перестановки в произведение транспозиций.
10. Знак перестановки. Четные и нечетные перестановки.
11. Знак произведения перестановок.
12. Знак транспозиции.
13. Вычисление знака перестановки.
14. Знакопеременная группа A_n степени n и ее свойства.
15. Группа S_n для $n\leq 4$.

З а д а н и е к л а б о р а т о р н о й р а б о т е.

Даны перестановки α, β, γ.

1. Записать перестановку β в виде таблицы.
2. Вычислить $\alpha^{-1}, \alpha^2, \alpha\beta, \beta^{-1}, \beta\alpha, \beta^2$.
3. Вычислить $\beta^{-1}, \beta^2, (\beta^2)^{-1}$, не прибегая к табличной записи.
4. Разложить в произведение независимых циклов, а затем в произведение транспозиций перестановки $\alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \beta\alpha$.
5. Найти все значения n и m, при которых $\alpha^n=\beta^m=\varepsilon$, где ε - тождественная перестановка.
6. Определить четность перестановок $\alpha, \alpha\beta, \beta\alpha, (\alpha\beta)^{-2}, (\beta\alpha)^3$.
7. При каких значениях i, j, k перестановка γ четная, а при каких - нечетная?
8. Доказать, что всякая четная перестановка может быть

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕ

представлена как произведение циклов вида

$$(1\,2\,3),(1\,2\,4),\ldots,(1\,2\,n).$$

П р и м е р ы   р е ш е н и я   и   о ф о р м л е н и я   з а д а ч.

П р и м е р I. Даны перестановки

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&5&3&4&6\end{pmatrix},\ \beta=(1\,2\,3\,4),$$

принадлежащие симметрической группе S_6 степени 6.

а) Вычислить α^{-1}, β^{-2}, $\alpha\beta$;

б) Разложить $\alpha\beta$ в произведение транспозиций;

в) Вычислить знак перестановки $(\alpha\beta)^{-1}$.

Р е ш е н и е. а) Для нахождения α^{-1} необходимо в перестановке α поменять местами строки, а затем переставить столбцы так, чтобы первая строка была упорядочена по возрастанию.

$$\alpha^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&5&3&4&6\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&1&5&3&4&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&4&5&3&6\end{pmatrix}.$$

Чтобы вычислить β^{-2}, перейдем к табличной записи перестановки β. Так как $\beta\in S_6$, то

$$\beta=(1\,2\,3\,4)=(1\,2\,3\,4)(5)(6)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&1&5&6\end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим β^{-2}.

$$\beta^{-2}=(\beta^2)^{-1}=(\beta^{-1})^2=\left[\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&1&5&6\end{pmatrix}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&1&5&6\end{pmatrix}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&3&4&1&5&6\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&4&1&2&5&6\end{array}\right]^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&1&2&5&6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&1&2&5&6\end{pmatrix}.$$

Вычислим: $\alpha\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&5&3&4&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&1&5&6\end{pmatrix}=$

$$=\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&3&4&1&5&6\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&5&3&2&4&6\end{array}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&5&3&2&4&6\end{pmatrix}.$$

б) Перестановка $\alpha\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&5&3&2&4&6\end{pmatrix}$ переводит $1\mapsto1,\ 2\mapsto5\mapsto4\mapsto2,\ 3\mapsto3,\ 6\mapsto6$, поэтому $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&5&3&2&4&6\end{pmatrix}=(1)(2\,5\,4)(3)(6)$ - разложение перестановки $\alpha\beta$ в произведение независимых циклов.

Чтобы представить перестановку $\alpha\beta$ в виде произведения транспозиций, каждый цикл длины больше 2 разложим в произведение транспозиций:

$(2\,5\,4)=(2\,4)(2\,5)$, $\alpha\beta=(1)(2\,4)(2\,5)(3)(6)$.

Опуская циклы длины I, получим разложение $\alpha\beta$ в произведение транспозиций, т.е.

$$\alpha\beta=(2\,4)(2\,5).$$

в) Знак перестановки вычислим по формуле

$$\operatorname{Sgn}\tau=(-1)^{n-c},$$

где n - степень перестановки τ, а c - число ее независимых циклов.

Так как $(\alpha\beta)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&5&3&2&4&6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&5&3&2&4&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&4&3&5&2&6\end{pmatrix}=(1)(2\,4\,5)(3)(6)$, то $c=4$. Поскольку перестановки α и β принадлежат S_6, то $(\alpha\beta)^{-1}\in S_6$, т.е. $n=6$.

Таким образом, $\operatorname{Sgn}(\alpha\beta)^{-1}=(-1)^{6-4}=(-1)^2=1$, т.е. перестановка $(\alpha\beta)^{-1}$ четная.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

П р и м е р 2. Не прибегая к табличной записи, вычислить β^{-1}, β^{-2}, $\beta^{-2}\tau$, где $\beta=(1234)\in S_6$ и $\tau=(2356)\in S_6$.

Р е ш е н и е. Возьмем перестановку $\alpha=(4321)$, в которой цифры из перестановки β расположены в обратном порядке. Покажем, что $\beta^{-1}=\alpha$.

Действительно, $\beta\cdot\alpha=[(1234)(5)(6)]\cdot[(4321)(5)(6)]=$

$$=\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} =(1)(2)(3)(4)(5)(6)=\varepsilon,$$

$$\alpha\cdot\beta=[(4321)(5)(6)]\cdot[(1234)(5)(6)]=$$

$$=\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} =(1)(2)(3)(4)(5)(6)=\varepsilon,$$

т.е. $\beta\alpha=\alpha\beta=\varepsilon$, где ε – тождественная перестановка. Поэтому $\alpha=\beta^{-1}$.

Вычислим β^{-2} . Так как $\beta^{-2}=(\beta^{-1})^2$, то имеем

$$\beta^{-2}=[(4321)(5)(6)][(4321)(5)(6)]=$$

$$=\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} =(13)(24)(5)(6).$$

Найдем $\beta^{-2}\tau$.

$$\beta^{-2}\tau=[(13)(24)(5)(6)]\cdot[(2356)(1)(4)]=$$

$$=\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{array} =(135642).$$

О т в е т: $\beta^{-1}=(4321)(5)(6)$;

$\beta^{-2}=(13)(24)(5)(6)$; $\beta^{-2}\tau=(135642)$.

Лабораторная работа № 3

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

В о п р о с ы д л я с а м о к о н т р о л я.

I. Определитель матрицы, формула для его вычисления.
2. Вычисление определителя порядка $n\leq 3$.
3. Определитель треугольной матрицы.
\+ 4. Свойства определителей.
5. Определитель блочных матриц.
δ + 6. Определитель произведения матриц.
7. Миноры и алгебраические дополнения.
\+ 8. Вычисление определителя разложением по элементам строки или столбца.
c + 9. Равенство нулю произведений элементов строки (столбца) на алгебраические дополнения к элементам другой строки (столбца).
I0. Присоединенная матрица.
II. Обратная матрица.
I2. Вычисление определителя Вандермонда.

З а д а н и е к л а б о р а т о р н о й р а б о т е.

Даны матрицы A, D, F, K, H , слагаемое m определителя шестого порядка.

I. При каких значениях i, j, k слагаемое m входит в развернутое выражение определителя шестого порядка со знаком "плюс"?

2. Вычислить определители матриц A, D, F, K, H.

3. Решить уравнение, подставив в определитель значения i, j, вычисленные в задаче I.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & j & j \\ -1 & 3-x^2 & 3 & 3 \\ i & i & 5 & 5 \\ -i & -i & 6 & x^2-3 \end{vmatrix}=0.$$

4. Найти матрицы, обратные к матрицам A, F .

5 . Найти наибольшее значение определителя третьего порядка, составленного из чисел $0, 1$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕ

П р и м е р ы   р е ш е н и я   и   о ф о р м л е н и я   з а д а ч.

П р и м е р I. Выбрать i, j, k таким образом, чтобы слагаемое $a_{4i}a_{2k}a_{32}a_{j4}$ входило в развернутое выражение определителя четвертого порядка со знаком "минус".

Р е ш е н и е. Так как каждое слагаемое развернутого выражения определителя представляет собой произведение элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, то в слагаемом $a_{4i}a_{2k}a_{32}a_{j4}$ первые индексы исчерпываются четырьмя цифрами: I,2,3,4. Поскольку цифры 2,3 и 4 присутствуют, то $j=1$.

Знак слагаемого $a_{4i}a_{2k}a_{32}a_{14}$ равен знаку перестановки

$$\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ i & k & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & k & 2 & i \end{pmatrix}.$$

Так как цифры нижней строки перестановки не превышают 4 и все различны, то имеется две возможности:

а) $k=3,\ i=1$. б) $k=1,\ i=3$.

Рассмотрим эти возможности.

а)
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (14)(23).$$

$$\operatorname{Sgn}\alpha = (-1)^{4-2} = (-1)^2 = 1,$$

т.е. перестановка α имеет знак "плюс".

б)
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1432).$$

$$\operatorname{Sgn}\alpha = (-1)^{4-1} = (-1)^3 = -1,$$

т.е. перестановка имеет знак "минус".

Таким образом, при $i=3, j=1, k=1$ слагаемое $a_{4i}a_{2k}a_{32}a_{j4}$ входит в развернутое выражение определителя четвертого порядка со знаком "минус".

О т в е т: $i=3,\ j=1,\ k=1$.

П р и м е р 2. Вычислить определитель, приведя его к треугольному виду

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Поменяем местами первую и вторую строки определителя. От этого преобразования знак определителя изменится на противоположный, т.е.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Известно, что если все элементы некоторой строки умножить на число и сложить с элементами другой строки, то значение определителя не изменится. Применяя только это преобразование, приведем определитель к треугольному виду.

$$-\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Здесь мы ко второй строке прибавили первую, умноженную на 2, а к третьей прибавили первую, умноженную на (-I). Затем к третьей строке прибавили вторую, умноженную на $\frac{3}{5}$, и получили определитель треугольного вида.

Так как определитель треугольного вида равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, то

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot(-5)\cdot 1 = -5.$$

О т в е т: -5.

З а м е ч а н и е. Часто бывает полезно при вычислении определителя привести его к определителю блочной матрицы с помощью преобразований из примера 2.

П р и м е р 3. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Р е ш е н и е. Для нахождения обратной матрицы воспользуемся формулой

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}.$$

Вычислим $\det A$ и алгебраические дополнения A_{ij} и подставим их в формулу.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2\cdot2\cdot1 + 0\cdot2\cdot(-1) +$$

$$+(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) - (-1)\cdot2\cdot(-1) - 0\cdot(-1)\cdot1 - 2\cdot2\cdot(-1)) +$$

$$+(1\cdot(-1)\cdot1 + 2\cdot2\cdot2 + 1\cdot(-1)(-1) - 2\cdot(-1)\cdot(-1) -$$

$$-2\cdot1\cdot(-1) - 2\cdot1\cdot1) = -5 + 6 = 1.$$

Здесь определитель четвертого порядка мы разложили по элементам третьего столбца, так как в этом столбце наибольшее число нулей. Определители третьего порядка вычислены по правилу Саррюса.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1\cdot1\cdot(-1) + 2\cdot0\cdot(-1) + 2\cdot0\cdot(-1) - 2\cdot1\cdot(-1) - 0\cdot(-1)\cdot(-1) -$$

$$- 2\cdot0\cdot1) = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(2\cdot1\cdot1 + 0\cdot0\cdot(-1) + 0\cdot(-1)(-1) - (-1)\cdot1\cdot(-1) -$$

$$- 0\cdot(-1)\cdot2 - 0\cdot0\cdot1) = -1;$$

$A_{13} = 5$; $A_{14} = 3$; $A_{21} = -1$; $A_{22} = 2$; $A_{23} = -9$;

$A_{24} = -5$; $A_{31} = 1$; $A_{32} = -1$; $A_{33} = 6$; $A_{34} = 3$;

$A_{41} = -2$; $A_{42} = 5$; $A_{43} = -15$; $A_{44} = -7$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & -9 & 6 & -15 \\ 5 & -5 & 3 & -7 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $A\cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$, т.е. A^{-1} – обратная матрица для матрицы A.

Ответ:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & -9 & 6 & -15 \\ 3 & -5 & 3 & -7 \end{bmatrix}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

Лабораторная работа № 4

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

В о п р о с ы   д л я   с а м о к о н т р о л я.

I. Построение и единственность поля комплексных чисел.

2. Алгебраическая форма комплексных чисел. Сложение и умножение комплексных чисел.

3. Сопряженные числа.

4. Изображение комплексных чисел на плоскости.

5. Модуль и аргумент комплексного числа.

6. Тригонометрическая форма комплексного числа.

7. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме.

3. Формула Муавра.

9. Извлечение корня из комплексного числа.

IO. Извлечение квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме.

II. Корни из единицы.

I2. Корни n -й степени из единицы для $n \le 4$.

З а д а н и е   к   л а б о р а т о р н о й   р а б о т е.

Даны комплексные числа z_1, z_2, число n - номер студента по списку, число k - остаток от деления n на 5.

V 1. Найти $z_1+z_2,\ z_1-z_2,\ z_1\cdot z_2,\ z_1/z_2,\ z_2/z_1$.

? V 2. Вычислить $\sqrt{z_1}$ в алгебраической форме. ответ

3. Изобразить на плоскости и представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

$$z_1,\ \bar z_1,\ z_1\cdot\bar z_1,\ z_1+\bar z_1,\ z_1-\bar z_1.$$

V 4. Вычислить $z_1^5, \sqrt[5]{z_1}$.

? V 5. Решить уравнение

$$|z_1| + z_1 = 1 + ni.$$

ответ

V 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (3-i)x + (4+ki)y = 2+6i, \\ (n+2i)x + (-2-3i)y = 5+4i. \end{cases}$$

V 7. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} n & i & 5i & 0 \\ 2 & 0 & 1+i & 1 \\ 3-i & -2i & 4 & i \\ i+1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8 . Доказать, что

а) комплексное число является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $\bar z = -z$;

б) определитель

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar z_1 & a \\ z_2 & \bar z_2 & b \\ z_3 & \bar z_3 & c \end{vmatrix},$$

где z_1, z_2, z_3 - комплексные, a, b, c - вещественные числа является чисто мнимым числом.

П р и м е р ы   р е ш е н и я   и   о ф о р м л е н и я   з а д а ч.

П р и м е р I. Изобразить на плоскости и записать в тригонометрической форме числа: $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$.

Р е ш е н и е. Для каждого комплексного числа, откладывая действительную часть по оси OX, а мнимую по оси OY, получим четыре точки $P_1(1,1), P_2(-1,1), P_3(-1,-1), P_4(1,-1)$.

Все четыре числа имеют равные модули: $|OP_1| = |OP_2| = |OP_3| = |OP_4| = \sqrt{(\pm1)^2 + (\pm1)^2} = \sqrt{2}$. Модуль комплексного числа $a+bi$ вычисляется по формуле $r = \sqrt{a^2+b^2}$, т.е. равен длине радиус-вектора, проведенного из начала координат в точку, изображающую комплексное число. Аргумент комплексного числа равен величине угла, отсчитанного от оси OX против часовой стрелки до радиус-вектора, изображающего данное число. Для числа $1+i$ получаем

$\arg(1+i) = X\hat{O}P_1 = \frac{\pi}{4}$. Применяя формулы приведения, находим аргументы остальных комплексных чисел:

$$\arg(-1+i) = X\hat{O}P_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4};$$

$$\arg(-1-i) = X\hat{O}P_3 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4};$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

$$\arg(1-i) = X\hat{O}P_4 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

Используя найденные значения модулей и аргументов комплексных чисел, получаем

О т в е т:
$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$
$$-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$
$$-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right);$$
$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

П р и м е р 2. Вычислить $(-1+i\sqrt{3})^6$, $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$.

Р е ш е н и е. Представим число $(-1+i\sqrt{3})$ в тригонометрической форме.

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\cos\varphi = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $\cos\varphi < 0$, а $\sin\varphi > 0$, то $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.
Тогда $\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, Таким образом,

$$-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

По формуле Муавра имеем:

$$(-1+i\sqrt{3})^6 = \left(2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)^6 = 2^6\left(\cos\frac{6\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{6\cdot 2\pi}{3}\right) = 2^6(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) = 2^6(1+0) = 64.$$

Для вычисления корня из комплексного числа используем формулу

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Имеем $z_k = \sqrt[4]{(-1+i\sqrt{3})} = \sqrt[4]{2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} =$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right),\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Полагая $k = 0, 1, 2, 3$, получаем

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right);$$
$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right);$$
$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right);$$
$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

П р и м е р 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ix + (3+2i)y = 5-3i, \\ (2-i)x + (-2i)y = 1-2i. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Выразим из первого уравнения x и подставим его во второе уравнение.

$$x = \frac{(5-3i)-(3+2i)y}{i} = \frac{[(5-3i)-(3+2i)y]\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} =$$
$$= \frac{(5-3i)(-i)+i(3+2i)y}{1} = (-5i-3) + (3i-..)y;$$
$$(2-i)[(-3-5i)+(-2+3i)y] - 2iy = 1-2i.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$(2-i)[(-3-5i)+(-2+3i)y] - 2iy = (2-i)(-3-5i) +$$
$$+(2-i)(-2+3i)y - 2iy = (-6+3i-10i+5i^2) + (-4+2i+6i-$$
$$-3i^2)y - 2iy = (-6-7i-5) + (-4+8i+3)y - 2iy =$$
$$= (-11-7i) + (-1+8i-2i)y = (-11-7i) + (-1+6i)y.$$

Таким образом, имеем

$$(-11-7i) + (-1+6i)y = 1-2i,$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕ

$$(-1+6i)y = 1-2i+11+7i,$$

$$(-1+6i)y = 12+5i,$$

$$y = \frac{12+5i}{-1+6i} = \frac{(12+5i)(-1-6i)}{(-1+6i)(-1-6i)} = \frac{-12-5i-72i-30i^2}{1+36} = \frac{-12-77i+30}{37} = \frac{18-77i}{37} = \frac{18}{37} - i\frac{77}{37}.$$

Тогда

$$x = (-5i-5) + (-2+5i)\left(\frac{18}{37} - i\frac{77}{37}\right) =$$

$$= -5i - 5 - \frac{2\cdot 18}{37} + \frac{5\cdot 18}{37}i + \frac{2\cdot 77}{37}i - \frac{5\cdot 77}{37}i^2 =$$

$$= \left(-5 - \frac{36}{37} + \frac{5\cdot 77}{37}\right) + i\left(-5 + \frac{54}{37} + \frac{2\cdot 77}{37}\right) =$$

$$= \frac{84}{37} + \frac{23}{37}i.$$

Ответ:

$$x = \frac{84}{37} + \frac{23}{37}i,$$

$$y = \frac{18}{37} - i\frac{77}{37}.$$

Лабораторная работа № 5

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вопросы для самоконтроля.

1. Система линейных уравнений, ее неизвестные, коэффициенты и свободные члены.
2. Решение системы линейных уравнений. Совместная и несовместная система линейных уравнений.
3. Матрица системы и расширенная матрица.
4. Решение системы уравнений методом Гаусса.
5. Крамеровские системы линейных уравнений и их решение.
6. Ранг матрицы и элементарные преобразования.
7. Вычисление ранга матрицы с помощью окаймляющих миноров и с помощью элементарных преобразований.
8. Условие равенства нулю определителя матрицы.
9. Однородные системы линейных уравнений. Общее решение и фундаментальная система решений.

Задание к лабораторной работе.

Даны векторы a_1, a_2, a_3, матрица G, система 1 и система 2 линейных уравнений, число n – номер студента по списку.

1. Найти линейную комбинацию векторов $-2a_1 + a_2 - 3a_3$, если $a_1 = (n, n-2, 0, 3)$, $a_2 = (-1, 4, n, -n)$, $a_3 = (-1+n, -2, 0, 3)$.
2. Является ли зависимой система векторов a_1, a_2, a_3 ?
3. Вычислить ранг матрицы G двумя способами: с помощью окаймляющих миноров и с помощью элементарных преобразований.
4. Исследовать систему 1 на совместность. Найти решения совместной системы уравнений по правилу Крамера и матричным методом.
5. Исследовать систему 2 на совместность. Если она совместна, то решить систему методом Гаусса.
6. Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений с матрицей системы 2.
7. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ :

$$\begin{cases} \alpha x_1 + n x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1. \end{cases}$$

Примеры решения и оформления задач.

Пример I. Выяснить, зависима или независима система векторов $a_1 = -3b_1 + b_2 + 2b_3$, $a_2 = -3b_1 - b_3$, $a_3 = b_1 - b_2 + b_3$, если $b_1 = (2,1,2)$, $b_2 = (1,5,-3)$, $b_3 = (2,0,1)$.

Решение. Вычислим координаты векторов a_1, a_2 и a_3. Вектор a_1 есть линейная комбинация векторов b_1, b_2, b_3. Поэтому

$$a_1 = -3b_1 + b_2 + 2b_3 = -3(2,1,2) + (1,5,-3) +$$

$$+ 2\cdot(2,0,1) = ((-3)\cdot 2, (-3)\cdot 1, (-3)\cdot 2) + (1,5,-3) +$$

$$+ (2\cdot 2, 2\cdot 0, 2\cdot 1) = (-6,-3,-6) + (1,5,-3) + (4,0,2) =$$

$$= (-6+1+4, -3+5+0, -6-3+2) = (-1, 2, -7).$$

Аналогично находим $a_2 = (-8,-3,-7)$, $a_3 = (3,-4,6)$. Теперь составим линейную комбинацию $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ и выясним при каких $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ имеет место равенство

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \Theta, \qquad (I)$$

где $\Theta = (0,0,0)$ - нулевой вектор.

Вычислив линейную комбинацию левой части (I) и приравняв к нулю координаты полученного вектора, приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} -\alpha_1 - 8\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ -7\alpha_1 - 7\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Вычислим определитель матрицы системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -8 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ -7 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 42 - 224 - (63 - 28 - 96) = -187.$$

Так как определитель матрицы системы отличен от нуля и система (2) имеет столько же уравнений, сколько неизвестных, то система (2) - крамеровская. Тогда по теорема Крамера она имеет единственное решение

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Но

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -8 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -7 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & -8 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Таким образом, равенство (I) имеет место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, система векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима.

Ответ: система векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима.

Пример 2. Показать, что система линейных уравнений совместна. Найти общее решение и одно частное решение системы

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение. Запишем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (I)$$

Вычислим ранг матрицы A с помощью элементарных преобразований. Преобразуем матрицу A так, чтобы в каждой строке и каждом столбце было не более одного ненулевого элемента. Прежде всего получим нули в первом столбце. Для этого ко второй строке матрицы прибавим первую, умноженную на (-2), а к третьей - первую, умноженную на (-3). Получим матрицу

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & 3 & -12 & -10 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Теперь ко второму столбцу прибавим первый, к третьему прибавим первый, умноженный на $\left(-\frac{5}{3}\right)$, а к четвертому - первый, умноженный на $\left(-\frac{4}{3}\right)$. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & 3 & -12 & -10 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Далее, к третьей строке, умноженной на 2, прибавим вторую строку, умноженную на (-3). Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Для получения нулей во второй строке прибавим к третьему столбцу второй, умноженный на 3, а к четвертому - второй, умноженный на $\frac{5}{2}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Наконец, получим нули в третьей строке. Для этого к четвертому столбцу прибавим третий, умноженный на $\left(-\frac{5}{6}\right)$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Так как элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то матрица A имеет тот же ранг, что и полученная матрица (6). Поэтому $rk\,A = 3$.

З а м е ч а н и е. При наличии навыка решения подробные описания элементарных преобразований излишни. Переход от матрицы (I) к матрице (6) можно записать так:

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & -3 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{3} & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & 3 & -12 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -6 & -5 \\ 0 & 3 & -12 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-6} & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь квадратиком выделен элемент, с помощью которого на следующем шаге делаются нули в столбце или строке, в которых стоит данный элемент.

Вернемся к решению задачи. Вычислим ранг расширенной матрицы

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Вычисление $rk\,B$, а вместе с тем решение всей задачи, можно ускорить, если для вычисления ранга матрицы B сначала привести ее к ступенчатому виду, т.е. к виду, когда в $(i+1)$-й строке первый ненулевой элемент стоит правее, чем такой же элемент в i-й строке. Проводя элементарные преобразования над строками матрицы B, получаем

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & -3 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & -10 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right).$$

Так как в полученной матрице имеется отличный от нуля минор третьего порядка

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot(-6) = -36,$$

то ранг этой матрицы, а значит и матрицы B, равен трем.

Таким образом, $rk\,A = rk\,B = 3$. По теореме Кронекера-Капелли наша система совместна. Так как ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений. Число свободных неизвестных равно разности между числом всех неизвестных системы и рангом матрицы системы, т.е. равно $4-3=1$.

Чтобы найти общее решение системы, воспользуемся ступенчатой матрицей. От нее перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ \qquad 2x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -1, \\ \qquad\qquad -6x_3 - 5x_4 = -1. \end{cases}$$

Эта система уравнений равносильна исходной системе. Так как минор

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

составленный из коэффициентов при x_1, x_2, x_3, отличен от нуля, то можно считать x_1, x_2, x_3 главными неизвестными, а x_4 - свободным неизвестным. Тогда перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 - 4x_4, \\ \qquad 2x_2 - 6x_3 = -1 + 5x_4, \\ \qquad\qquad -6x_3 = -1 + 5x_4. \end{cases}$$

Находим общее решение

$$x_1 = \frac{7 + x_4}{18},$$

$$x_2 = 0,$$

$$x_3 = \frac{-1 + 5x_4}{-6} = \frac{1 - 5x_4}{6},$$

x_4 - любое действительное число.

Для того, чтобы найти частное решение системы, положим свободное неизвестное равным какому-либо действительному числу. Пусть, например, $x_4 = 1$. Тогда

$$x_1 = \frac{7+1}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9};\ x_2 = 0;\ x_3 = \frac{1-5}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

О т в е т : Система совместна и имеет общее решение $\left(\frac{7+x_4}{18}, 0, \frac{1-5x_4}{6}, x_4\right)$, где - любое действительное число. Частное решение: $\left(\frac{4}{9}, 0, -\frac{2}{3}, 1\right)$.

З а м е ч а н и е. Проведенная нами процедура приведения матрицы B к ступенчатому виду и нахождение общего решения системы есть не что иное, как метод Гаусса решения системы.

П р и м е р 3. Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases} \qquad (I)$$

Р е ш е н и е. Так как для системы (I) ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы равны, то по теореме Кронекера-Капелли наша система совместна. Приводя матрицу системы к ступенчатому виду, найдем ее ранг

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-7} & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как все миноры третьего порядка равны нулю, и существует минор второго порядка

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-7) = 28,$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

отличный от нуля, то ранг матрицы равен двум. Тогда система (I) имеет бесконечное множество решений. Число свободных неизвестных равно $4-2=2$. Так как минор, составленный из коэффициентов при x_2 и x_3, отличен от нуля, то эти неизвестные будем считать главными, а x_1 и x_4 – свободными.

Найдем общее решение системы (I).

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ \qquad\qquad -7x_3-5x_4=0. \end{cases}$$

Оставим в левой части системы главные неизвестные.

$$\begin{cases} -4x_2+5x_3=-2x_1-3x_4, \\ \qquad -7x_3=5x_4. \end{cases}$$

Получаем общее решение

x_1 – любое действительное число,

$x_2=-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{7}x_4$,

$x_3=-\frac{5}{7}x_4$,

x_4 – любое действительное число.

Число решений в фундаментальной системе решений равно числу свободных неизвестных, т.е. равно двум. Полагая поочередно каждое свободное неизвестное равным единице, а остальные свободные неизвестные – нулю, получим частные решения, которые составляют фундаментальную систему решений системы (I). При $x_1=1,\ x_4=0$ имеем частное решение $(1,-\frac{1}{2},0,0)$. При $x_1=0,\ x_4=1$ имеем частное решение $(0,-\frac{1}{7},-\frac{5}{7},1)$.

О т в е т : Общее решение системы (I): $(x_1,-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{7}x_4,-\frac{5}{7}x_4,x_4)$; фундаментальная система решений:

$$(1,-\tfrac{1}{2},0,0),\ (0,-\tfrac{1}{7},-\tfrac{5}{7},1).$$

Лабораторная работа № 6

МНОГОЧЛЕНЫ

В о п р о с ы д л я с а м о к о н т р о л я.

I. Построение кольца многочленов.

3. Многочлены над целостными кольцами. Степень произведения многочленов.

3. Деление с остатком в кольце многочленов.

4. Алгоритм Евклида. Нахождение НОД (наибольшего общего делителя) и его выражение через исходные многочлены.

5. Неприводимые многочлены. Однозначность разложения на простые множители в кольце многочленов.

6. Корни многочленов и их связь с делителями первой степени. Схема Горнера.

7. Кратность корня, ее понижение при дифференцировании.

8. Многочлены над полем комплексных чисел. Теорема Гаусса об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел (без доказательства) и ее следствие. Неприводимые многочлены с комплексными коэффициентами.

9. Многочлены над полем действительных чисел. Неприводимые многочлены с действительными коэффициентами.

З а д а н и е к л а б о р а т о р н о й р а б о т е.

Даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, корень c многочлена $g(x)$.

1 Найти НОД и выразить его через исходные многочлены $f(x)$ и $g(x)$.

2 Разделить многочлен $f(x)$ на $(x-2)$ по схеме Горнера.

3 Разложить многочлен $f(x)$ по степеням $(x+1)$.

4 Разложить многочлен $f(x)$ на неприводимые множители над полем комплексных чисел и над полем действительных чисел.

5 Зная один корень c многочлена $g(x)$, найти все его корни.

6 . При каком значении a многочлен x^3-ax^2-ax+1 имеет (-1) корнем не ниже второй кратности?

П р и м е р ы р е ш е н и я и о ф о р м л е н и я з а д а ч.

П р и м е р I. Разложить многочлен

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

$$f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$$

по степеням $(x-2)$.

Р е ш е н и е. Напомним, что схема Горнера для деления многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ на $(x-c)$ имеет вид

	a_0	a_1	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
c	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + cb_0$	$\ldots$	$b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2}$	$r = a_n + cb_{n-1}$

где числа $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ - коэффициенты частного

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1},$$

а r - остаток от деления $f(x)$ на $x-c$.

Воспользуемся и мы схемой Горнера, которую применим несколько раз

	1	0	-4	6	-8	10
2	1	2	0	6	4	18
2	1	4	8	22	48	
2	1	6	20	62		
2	1	8	36			
2	1	10				
2	1					

В первой строке стоят коэффициенты многочлена $f(x)$. Во второй строке - коэффициенты частного $q_1(x) = x^4 + 2x^3 + 6x + 4$ и остаток $r_1 = 18$, т.е.

$$f(x) = q_1(x)(x-2) + r_1.$$

В третьей строке - коэффициенты частного $q_2(x) = x^3 + 4x^2 + 8x + 22$ и остатка $r_2 = 48$ от деления $q_1(x)$ на $(x-2)$, т.е.

$$q_1(x) = q_2(x)(x-2) + r_2.$$

В чествертой строке - коэффициенты частного $q_3(x) = x^2 + 6x + 20$ и остатка $r_3 = 62$ от деления $q_2(x)$ на $(x-2)$, т.е

$$q_2(x) = q_3(x)(x-2) + r_3.$$

В пятой строке - коэффициенты частного $q_4(x) = x + 8$ и

остатка $r_4 = 36$ от деления $q_3(x)$ на $(x-2)$, т.е.

$$q_3(x) = q_4(x)(x-2) + r_4.$$

В шестой строке - коэффициенты частного $q_5(x) = 1$ и остатка $r_5 = 10$ от деления $q_4(x)$ на $(x-2)$, т.е.

$$q_4(x) = q_5(x)(x-2) + r_5.$$

В седьмой строке - остаток от деления $q_5(x)$ на $(x-2)$.

Теперь

$$q_4(x) = (x-2) + 10,$$

$$q_3(x) = (x-2)^2 + 10(x-2) + 36,$$

$$q_2(x) = (x-2)^3 + 10(x-2)^2 + 36(x-2) + 62,$$

$$q_1(x) = (x-2)^4 + 10(x-2)^3 + 36(x-2)^2 + 62(x-2) + 48$$

и, наконец,

$$f(x) = (x-2)^5 + 10(x-2)^4 + 36(x-2)^3 + 62(x-2)^2 + 48(x-2) + 18.$$

О т в е т:

$$f(x) = (x-2)^5 + 10(x-2)^4 + 36(x-2)^3 + 62(x-2)^2 + 48(x-2) + 18.$$

П р и м е р 2. Найти наибольший общий делитель $d(x)$ многочленов $f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x - 2$, $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$, а затем выразить $d(x)$ через $f(x)$ и $g(x)$.

Р е ш е н и е. Разделим $f(x)$ на $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4 + 4x^3 - 7x + 2 & x^3 + 3x^2 - 4 \\
\underline{x^4 + 3x^3 - 4x} & \overline{x + 1} \\
-\;x^3 - 3x + 2 & \\
\underline{x^3 + 3x^2 - 4} & \\
-3x^2 - 3x + 6 &
\end{array}$$

Таким образом, $f(x) = g(x)(x+1) - 3(x^2 + x - 2)$.

Разделим $g(x)$ на $(x^2 + x - 2)$:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ...

$$
\begin{array}{rl}
-\,\begin{array}{r} x^3+3x^2-4 \\ \underline{x^3+x^2-2x} \\ -\,\begin{array}{r} 2x^2+2x-4 \\ \underline{2x^2+2x-4} \\ 0 \end{array} \end{array} & \begin{array}{|l} x^2+x-2 \\ \hline x+2 \end{array}
\end{array}
$$

Получаем $g(x)=(x^2+x-2)(x+2)$, т.е. $g(x)$ без остатка разделился на (x^2+x-2) . Поэтому $d(x)=x^2+x-2$ – наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Подставим $d(x)$ в равенство

$$f(x)=g(x)(x+1)-3(x^2+x-2).$$

Имеем $f(x)=g(x)(x+1)\ \ 3d(x)$, откуда

$$d(x)=\frac{1}{3}g(x)(x+1)-\frac{1}{3}f(x).$$

О т в е т: Наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ есть многочлен $d(x)=x^2+x-2$, причем

$$d(x)=\frac{1}{3}g(x)(x+1)-\frac{1}{3}f(x).$$

П р и м е р 3. Разложить на неприводимые множители над полем комплексных чисел многочлен

$$f(x)=x^5+3x^4+7x^3+13x^2+12x+4.$$

Р е ш е н и е. Корни многочлена $g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+ +\ldots+a_{n-1}x+a_n$ являются делителями a_n/a_0.

Легко проверить, что $x=-1$ является корнем многочлена $f(x)$. Определим кратность корня $x=-1$. Для этого вычислим производную функции $f(x)$:

$$f'(x)=5x^4+12x^3+21x^2+26x+12.$$

Нетрудно заметить, что $f'(-1)=0$, т.е. $x=-1$ является корнем многочлена $f'(x)$. Находим вторую производную

$$f''(x)=20x^3+36x^2+42x+26.$$

Снова $x=-1$ – корень многочлена $f''(x)$. Вычислим

$$f'''(x)=60x^2+72x+42.$$

Теперь уже $f'''(-1)\neq 0$, т.е. $x=-1$ не является корнем $f'''(x)$.

По теореме Безу $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ делятся на $(x+1)$, а $f'''(x)$ не делится на $(x+1)$. Следовательно, $(x+1)$ –

однократный множитель $f''(x)$, 2-кратный множитель $f'(x)$ и 3-кратный неприводимый множитель $f(x)$.

Разделим теперь $f(x)$ на $(x+1)^3$.

$$
\begin{array}{rl}
-\,\begin{array}{r} x^5+3x^4+7x^3+13x^2+12x+4 \\ \underline{x^5+3x^4+3x^3+x^2} \\ -\,\begin{array}{r} 4x^3+12x^2+12x+4 \\ \underline{4x^3+12x^2+12x+4} \\ 0 \end{array} \end{array} & \begin{array}{|l} x^3+3x^2+3x+1 \\ \hline x^2+4 \end{array}
\end{array}
$$

Таким образом, $f(x)=(x+1)^3\cdot(x^2+4)$ – разложение многочлена $f(x)$ на неприводимые множители над полем действительных чисел.

Для получения разложения над полем комплексных чисел, необходимо разложить многочлен x^2+4 на неприводимые над полем $\mathbb{C}$ множители. Легко видеть, что $x^2+4=(x+2i)(x-2i)$.

Итак, $f(x)=(x+1)^3(x+2i)(x-2i)$ – разложение многочлена $f(x)$ на неприводимые множители над полем комплексных чисел.

О т в е т : $f(x)=(x+1)^3(x+2i)(x-2i)$.

П р и м е р 4. Известен один корень $1+i$ многочлена $f(x)=3x^4-5x^3+3x^2+4x-2$. Найти все корни этого многочлена.

Р е ш е н и е. Так как коэффициенты многочлена $f(x)$ действительные числа, то число $1-i$, сопряженное к корню $1+i$ также будет корнем этого многочлена. Поэтому $f(x)$ делится на многочлен

$$(x-(1-i))(x-(1+i))=(x-1+i)(x-1-i)=$$

$$=(x-1)^2-i^2=x^2-2x+1+1=x^2-2x+2.$$

$$
\begin{array}{rl}
-\,\begin{array}{r} 3x^4-5x^3+3x^2+4x-2 \\ \underline{3x^4-6x^3+6x^2} \\ -\,\begin{array}{r} x^3-3x^2+4x-2 \\ \underline{x^3-2x^2+2x} \\ -\,\begin{array}{r} -x^2+2x-2 \\ \underline{-x^2+2x-2} \\ 0 \end{array} \end{array} \end{array} & \begin{array}{|l} x^2-2x+2 \\ \hline 3x^2+x-1 \end{array}
\end{array}
$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

Таким образом, $f(x)=(x^2-2x+2)(3x^2+x-1)$.
Найдем корни многочлена $3x^2+x-1$:

$$3x^2+x-1=0,$$

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{6}, \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{6}.$$

Корни многочлена $3x^2+x-1$ являются корнями многочлена $f(x)$. Поэтому $f(x)$ имеет четыре корня: $1+i$, $1-i$, $\frac{-1-\sqrt{13}}{6}$, $\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$.

Ответ:

$$1+i,\ 1-i,\ \frac{-1+\sqrt{13}}{6},\ \frac{-1-\sqrt{13}}{6}.$$

Перечень задач для самоконтроля.

Ниже указаны номера задач из сборника [II], которые первокурсник обязан уметь решать.

Часть I

I.3.I, I.3.2, I.3.3, I.3.4, I.3.5.

2.I.I - 2.I.3, 2.I.7 - 2.I.9, 2.I.II; 2.I.I2, 2.I.I4, 2.2.I, 2.2.2, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.7, 2.2.I0, 2.2.II, 2.3.I, 2.3.2, 2.3.4, 2.3.6, 2.3.7, 2.3.9.

3.I.I, 3.I.2, 3.2.I - 3.2.5, 3.3.2, 3.3.3, 3.3.5, 3.4.I - 3.4.3, 3.5.I, 3.5.2, 3.6.I, 3.8.I.

4.I.I - 4.I.3, 4.I.5, 4.2.I, 4.2.3, 4.2.7, 4.2.8, 4.2.I0, 4.2.I6.

6.I.I - 6.I.5, 6.I.II, 6.2.I - 6.2.3, 6.2.5, 6.2.8, 6.2.I0, 6.2.I2, 6.3.7 - 6.3.9, 6.4.I, 6.4.8, 6.6.I, 6.6.2, 6.6.4, 6.6.5.

7.I.I - 7.I.4, 7.2.I - 7.2.4, 7.2.8, 7.2.I0, 7.2.II, 7.3.I, 7.3.2, 7.6.I - 7.6.3, 7.7.2, 7.7.9.

БАНК ДАННЫХ

Матрицы

А

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. 3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. 5. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. 6. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. 8. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -8 \end{bmatrix}$. 9. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. 11. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. 12. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

В

1. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. 2. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. 3. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 5. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. 6. $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. 8. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. 9. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

10. $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 11. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. 12. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

C

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

D

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$. 7. $\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 10. $\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

F

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. 2. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. 4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. 6. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. 8. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. 10. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. 12. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

G

1. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$. 2. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3+i & 3-i \end{bmatrix}$. 3. $\begin{bmatrix} 1 & 2i & 1-i \\ -i & 2 & -1-i \\ 3 & 6i & 3-3i \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \\ 1 & 1+i\sqrt{3} & 1-i\sqrt{3} \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. 5. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 8 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

6. $\begin{bmatrix} 0 & 2i & -2i \\ 1 & 2i & -2i \\ 1 & 3i-1 & -3i-1 \end{bmatrix}.$ 7. $\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -i & -i \end{bmatrix}.$

8. $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$ 9. $\begin{bmatrix} 1 & c & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$

10. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & \lambda \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$ 11. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & a & 0 \\ 3 & a & 4 & -1 \end{bmatrix}.$

12. $\begin{bmatrix} 8 & 1 & i \\ 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1-2i \end{bmatrix}.$ 13. $\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 1+i \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -i & i \end{bmatrix}.$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$ 15. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \\ 6 & -3 & 9 & -6 & 12 \end{bmatrix}.$

K

1. $\begin{bmatrix} 1 & x & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & x & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & x & 3 \\ 2 & x & 1 & 2 & 2x \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$ 2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -a & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & a & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

3. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ a & b & c & d & e \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$ 4. $\begin{bmatrix} x & 1 & 3 & 2 & x \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ x & 1 & x & -1 & 3 \\ -x & -1 & 5 & -6 & 4 \\ 2x & 2 & 8 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$

5. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & a \\ b & 4 & -2 & 0 & 3 \\ c & -1 & 0 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$ 6. $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & \alpha & 5 \\ -5 & 4 & a & 1 & -1 \\ x & -3 & 2 & 6 & -6 \\ 1 & -a & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$

7. $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$ 8. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{bmatrix}.$ 10. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 4 & -5 & 8 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$

Матрица H порядка n

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1 \end{bmatrix}.$ 2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}.$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$ 4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$. 6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{bmatrix}$. 8. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. 10. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

Системы

Система I

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Система 2

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ -3 \\ 17 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 2 \\ -12 & -3 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 4 & 14 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & -6 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -10 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 13 \\ 4 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} -6 & 9 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ И

10. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 40 \\ 37 \end{bmatrix}.$ 10. $\begin{bmatrix} -9 & 10 & 3 & 7 \\ -4 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$

11. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}.$ 11. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 \\ 6 & -3 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & 14 & -31 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 18 \end{bmatrix}.$

12. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}.$ 12. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}.$

13. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}.$ 13. $\begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}.$

14. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$ 14. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$ 15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}.$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}.$ 16. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$

Векторы

a_1	a_2	a_3
1. (1,-1,0,1).	1. (0,1,-1,2).	1. (-1,1,2,0).
2. (-1,1,1,2).	2. (0,-1,2,1).	2. (1,-1,0,1).
3. (0,-1,-2,0).	3. (1,1,2,0).	3. (0,-1,-2,2).
4. (-1,1,2,0).	4. (0,-1,1,2).	4. (-2,0,0,1).
5. (-1,2,1,1).	5. (0,-1,-1,2).	5. (-1,2,0,1).
6. (-1,1,2,1).	6. (0,-1,1,3).	6. (0,1,-2,1).
7. (2,0,-2,3).	7. (-1,1,0,1).	7. (0,-1,-3,2).
8. (-1,-1,2,0).	8. (0,1,2,-1).	8. (3,1,1,1).
9. (2,2,-1,3).	9. (0,1,1,2).	9. (1,1,1,2).
10. (-3,1,0,1).	10. (1,0,0,3).	10. (0,0,1,2).
11. (2,2,-1,-1).	11. (3,-1,-1,2).	11. (2,1,2,1).
12. (1,-3,-3,-3).	12. (-3,-1,-3,-3).	12. (-3,-3,-1,-3).
13. (1,-2,-2,-2).	13. (-2,-2,-2,1).	13. (-2,1,-2,1).
14. (2,-1,3,-3).	14. (2,0,0,3).	14. (-4,1,2,3).
15. (1,2,3,4).	15. (4,5,6,7).	15. (1,1,1,1).
16. (-1,-2,4,4).	16. (4,4,-1,2).	16. (1,1,2,2).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.

Слагаемое из развернутого выражения определителя шестого порядка.

1. $a_{2i}\, a_{41}\, a_{j3}\, a_{5k}\, a_{12}\, a_{64}$.
2. $a_{j3}\, a_{14}\, a_{5i}\, a_{k1}\, a_{26}\, a_{15}$.
3. $a_{32}\, a_{i1}\, a_{46}\, a_{1j}\, a_{2k}\, a_{63}$.
4. $a_{62}\, a_{i1}\, a_{4j}\, a_{25}\, a_{5k}\, a_{54}$.
5. $a_{4i}\, a_{j2}\, a_{36}\, a_{k5}\, a_{61}\, a_{53}$.
6. $a_{ij}\, a_{13}\, a_{4k}\, a_{62}\, a_{54}\, a_{31}$.
7. $a_{2i}\, a_{32}\, a_{j6}\, a_{k5}\, a_{51}\, a_{63}$.
8. $a_{16}\, a_{i3}\, a_{4j}\, a_{k1}\, a_{25}\, a_{52}$.
9. $a_{44}\, a_{2j}\, a_{k3}\, a_{65}\, a_{i6}\, a_{31}$.
10. $a_{26}\, a_{6j}\, a_{1k}\, a_{55}\, a_{64}\, a_{i1}$.
11. $a_{11}\, a_{2i}\, a_{43}\, a_{4k}\, a_{j6}\, a_{54}$.
12. $a_{i6}\, a_{2j}\, a_{5k}\, a_{13}\, a_{54}\, a_{62}$.
13. $a_{15}\, a_{i2}\, a_{j4}\, a_{51}\, a_{36}\, a_{2k}$.
14. $a_{23}\, a_{4k}\, a_{j6}\, a_{5i}\, a_{11}\, a_{54}$.
15. $a_{42}\, a_{i3}\, a_{66}\, a_{3j}\, a_{1k}\, a_{51}$.
16. $a_{56}\, a_{63}\, a_{ik}\, a_{2j}\, a_{43}\, a_{14}$.

Перестановки степени 9

а	б
1. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&4&5&8&9&2&1&6&3\end{pmatrix}$.	1. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\i&4&3&1&j&k&8&9&5\end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&3&1&2&7&6&8&9&5\end{pmatrix}$.	2. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&i&k&j&6&5&8&1&2\end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&3&1&5&6&7&4&8&9\end{pmatrix}$.	3. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&5&i&1&2&j&7&k&9\end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&5&7&6&4&3&8&9&1\end{pmatrix}$.	4. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\5&6&7&i&1&j&k&2&3\end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&2&4&1&8&6&7&9&5\end{pmatrix}$.	5. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\j&6&7&8&i&2&1&k&3\end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\5&4&3&7&1&8&2&6&9\end{pmatrix}$.	6. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&3&1&j&i&k&8&9&7\end{pmatrix}$.
7. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\9&3&1&6&5&4&8&7&2\end{pmatrix}$.	7. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&i&1&6&j&4&9&k&7\end{pmatrix}$.
8. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\5&1&3&7&2&8&4&9&6\end{pmatrix}$.	8. $\begin{pmatrix}1&2&6&4&5&6&7&8&9\\6&5&i&7&8&j&1&2&k\end{pmatrix}$.
9. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&4&1&2&7&5&6&9&8\end{pmatrix}$.	9. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\i&j&k&1&2&7&8&9&3\end{pmatrix}$.
10. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\5&2&7&8&1&9&4&3&6\end{pmatrix}$.	10. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\i&3&2&j&6&5&k&9&8\end{pmatrix}$.
11. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\5&3&4&2&6&1&7&9&8\end{pmatrix}$.	11. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\i&7&8&5&j&6&3&2&k\end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & i & 1 & j & 2 & 3 & k \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$. 13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & i & j & k & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 9 & 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & i & 1 & 2 & j & 7 & 8 & 3 & k \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 5 & 3 & 4 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & j & i & 3 & 2 & k \end{pmatrix}$.

В

1. (7894). 2. (1548). 3. (1586).

4. (45628). 5. (5678). 6. (34891).

7. (21435). 8. (54127). 9. (125).

10. (7932). 11. (2579). 12. (9861).

13. (12756). 14. (5613). 15. (235).

Комплексные числа

z_1		z_2	
1.	$\sqrt{3} - i$.	1.	$2 + i$.
2.	$-\sqrt{2} - i$.	2.	$2 + 3i$.
3.	$\sqrt{3} + i$.	3.	$3 + 4i$.
4.	$1 - 2i$.	4.	$3 + 7i$.

5.	$2 + \sqrt{12}\, i$.	5.	$-2 - 3i$.
6.	$4i$.	6.	$-3 - 7i$.
7.	$2 - \sqrt{12}\, i$.	7.	$5 + 3i$.
8.	$-\sqrt{3} + i$.	8.	$-5 - 3i$.
9.	$-2 + \sqrt{12}\, i$.	9.	$-5 + 3i$.
10.	$-2 - \sqrt{12}\, i$.	10.	$-3 + 7i$.
11.	$\sqrt{12} + 2i$.	11.	$3 - 7i$.
12.	$\sqrt{12} - 2i$.	12.	$1 - 4i$.
13.	$-\sqrt{12} - 2i$.	13.	$1 + 4i$.
14.	$-\sqrt{12} + 2i$.	14.	$-1 - 4i$.
15.	$1 + \sqrt{3}\, i$.	15.	$-1 + 4i$.

Функция $f(x)$:

1. $x^2 - 2x - 3$. 2. $x^2 - 3x + 2$.

3. $2x^2 - 3x + 1$. 4. $x^2 + 2x - 3$.

5. $x^2 - 5x + 6$. 6. $x^2 - 4x + 4$.

7. $x^2 - 6x + 5$. 8. $x^2 - 2x + 1$.

9. $x^2 + 2x + 1$. 10. $x^2 + 4x + 4$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

11. $2x^2-5x+3$.   12. $3x^2+5x+2$.

13. x^2-7x+6.   14. $x^2+7x+12$.

15. $x^2-8x+15$.   16. $x^2+8x+15$.

Многочлены $f(x)$; $g(x)$; c - корень $g(x)$

1. x^5-2x^3+5x-4; $x^3-7x^2+19x-13$;
$c=3-2i$.

2. $x^5+4x^4+4x^3-8x^2-32x-32$;
$x^4+2x^3+8x+16$; $c=1+\sqrt{3}\,i$.

3. $x^5+4x^4+4x^3-x^2-4x-4$;
$x^4+2x^3+8x+16$; $c=1-\sqrt{3}\,i$.

4. $x^5+2x^4+x^3+x^2+2x+1$;
$x^4-4x^3+2x^2+20x+13$; $c=3-2i$.

5. $x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$;
$x^3-7x^2+19x-13$; $c=3+2i$.

6. $x^5-6x^4+9x^3-x^2+6x-9$;
$x^4-8x^3+25x^2-42x+36$; $c=1-\sqrt{3}\,i$.

7. $x^5-6x^4+9x^3+x^2-6x+9$;
$x^4-6x^3+13x^2-24x+36$; $c=2i$.

8. x^5-2x^4+5x-4; $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$;
$c=-i$.

9. $x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$;
$x^4+2x^3+2x^2+2x+1$; $c=i$.

10. $x^5-16x^3+6x^2+63x-54$;
$x^4-4x^3-4x^2+36x-45$; $c=2-i$.

11. $x^5+x^4-13x^3-13x^2+36x+36$;
$x^4-4x^3-4x^2+36x-45$; $c=2+i$.

12. $x^5-5x^4+7x^3-x^2-8x+6$;
$x^4-2x^3+3x^2-2x+2$; $c=1+i$.

13. $x^5+8x^4+2x^3+12x^2-24x+16$;
$x^4-2x^3+3x^2-2x+2$; $c=1-i$.

14. $x^5-x^3-x^2+1$; $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$;
$c=-i$.

15. $x^5+9x^3+3x^4+27x^2$;
$x^4+6x^3+10x^2+6x+9$; $c=i$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

Содержание

Лабораторные работы по курсу "Алгебра и теория чисел"
для студентов I курса математического факультета

Составители: Бузланов Александр Васильевич,
Васильев Александр Федорович,
Монахов Виктор Степанович

Ответственный за выпуск А.В.Бузланов

Подписано в печать 01.07.88. Формат 60х84 I/I6. Бумага писчая № I. Печать офсетная. Усл.п.л. 3,0 Уч.-изд.л. 2,7
Тираж 200. Заказ 210 Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте ГГУ., г.Гомель, ул.Советская, I04

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ