

УДК 535.417.06

ПРИМЕНЕНИЕ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ МЕТОДИКИ В ЗВЕЗДНОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

B. I. Вайцель

Предлагается применить описанную ранее методику наблюдения интерференции независимых, слабовырожденных полей в звездной интерферометрии Майкельсона через турбулентную атмосферу. Исследование точности измерений искомой функции взаимной когерентности $|\gamma_{1,2}(0)|$ проводится для схем с регистрацией интерференционной картины исходных полей и их преобразований Фурье. Последняя схема позволяет сравнительно просто обойти трудности, связанные с формированием пространственных спектров интерферирующих полей от источников с малыми угловыми размерами. Приводятся оценки эффективности измерений и обсуждаются вопросы, связанные с практической реализацией методики.

Основным препятствием в практическом применении звездной интерферометрии является наличие слоя турбулентной атмосферы между измеряемым источником и пунктом наблюдения. Влияние турбулентности [1] приводит к необходимости регистрации интерференционной картины в течение промежутков времени, не достаточных для получения заметной плотности на существующих фотослоях. Несложный анализ показывает, однако, что возникающие здесь трудности носят не столько практический, сколько принципиальный характер, обусловленный корпускулярной природой излучения. Для пояснения этого обстоятельства оказывается полезной аналогия между звездной интерферометрией и явлением интерферометрии независимых полей. В обоих случаях единственным условием наблюдаемости интерференционного сигнала является, очевидно, наличие интерференционной картины, возникающей при суперпозиции лучей исследуемого излучения. При этом информативность сигнала определяется прежде всего качеством интерференционной картины (ее регулярностью, стабильностью и четкостью), которое в большинстве случаев адекватно характеризуется параметром вырождения, введенным при описании излучения тепловых источников [3]. По физическому смыслу этот параметр представляет собой среднее число фотонов, попадающих в участки, где интерференционные линии постоянной плотности вероятности появления фотонов образуют регулярную картину в течение промежутков времени ее стабильности. Площадь таких участков совпадает по порядку с площадью когерентности исследуемого излучения, а промежутки времени — с его временем когерентности. Поскольку локализация и динамика интерференционной картины вероятностей в сочетании со средней интенсивностью излучения являются определяющими факторами при описании интерференционных опытов, целесообразно (по аналогии с тепловым излучением) ввести параметр вырождения для любого излучения, основываясь на пространственно-временных изменениях интерференционной картины, отражающих влияние тех или иных искажающих факторов. Одним из таких факторов является турбулентная атмосфера, которая вносит искажения в комплексную амплитуду излучения, характеризуемую объемом когерентности $V_{\text{атм.}} \sim S_{\text{атм.}} \tau_{\text{атм.}}$, c ; $S_{\text{атм.}}, \tau_{\text{атм.}}$ — собственно площадь и время когерентности, обусловленные средой, c — ско-

рость света. Определенный, согласно приведенному выше описанию, параметр вырождения интерферирующих лучей на выходе турбулентного слоя $\bar{n}_{\text{атм.}}$ связан с параметром вырождения исследуемого излучения \bar{n} соотношением

$$n_{\text{атм.}} = \bar{n} V_{\text{атм.}} / V_T, \quad (1)$$

где $V_T = S'_T c / \Delta\nu$, S'_T , τ_T , $\Delta\nu = \tau_T^{-1}$ — соответственно объем, площадь, время когерентности и ширина спектра исследуемого излучения (здесь и ниже обозначения те же, что и в [2]). Оценим $\bar{n}_{\text{атм.}}$. В типичных атмосферных условиях $S_{\text{атм.}} \sim (3 \text{ см})^2$, $\tau_{\text{атм.}} \sim 10^{-3} \text{ с}$. В проведенных до сих пор экспериментах измерялись угловые размеры звезд с площадью когерентности S'_T порядка $(10 \text{ м})^2$; для звезд класса G (Солнце, α Центавра A и др.) в видимой области спектра $\bar{n} \sim 10^{-3}$. Ширина спектра $\Delta\nu$ определяется достижимой точностью в выравнивании оптических длин путей интерферирующих лучей. При требуемом (для измерения размеров звезд с площадью когерентности $S'_T \sim (10 \text{ м})^2$) разносе зеркал звездного интерферометра порядка 10 м и сравнительно легко достижимой точности в сопровождении звезды $\sim 3 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 1'$ ошибка в выравнивании оптических длин $\Delta l \sim (10 \text{ м}) \cdot (3 \cdot 10^{-4} \text{ рад}) = 3 \text{ мм}$. Для обеспечения достаточно высокой видности интерференционной картины нужно, чтобы время когерентности исследуемого излучения было порядка $\Delta l/c$, т. е. ширина его спектра $\Delta\nu = c/\Delta l \sim 10^{11} \text{ Гц}$.¹ При таких значениях параметров из (1) получаем $n_{\text{атм.}} \sim 10^{-1}$, т. е. в объеме когерентности на одну полосу интерференционной картины, как правило, не попадает ни одного фотона. Это значит, что об интерференционной картине в обычном смысле, а значит и каких-либо способах ее упорядочения не может идти речь, т. е. по существу мы имеем здесь дело с интерференцией слабовыраженных полей. Естественно поэтому и в этом случае применить рассмотренный в [2] голографический способ наблюдения интерференции. Нетрудно показать, что отношение сигнал/шум в звездном интерферометре при голографической регистрации сигнала определяется выражением, аналогичным (27) [2], если в (27) под γ понимать не квантовомеханическую степень когерентности, а обычную функцию взаимной когерентности $|\gamma_{1,2}(0)|$ в точках 1, 2 при отсутствии турбулентности. Для максимизации отношения сигнал/шум воспользуемся оптимальным фильтром $\Phi_0(\mathbf{k})$, который при «белом» шуме совпадает со спектральной плотностью сигнала, т. е. $\Phi_0(\mathbf{k}) = C(\mathbf{k})/C(0)$,

$$R_0 = 2\pi \bar{n}_{\text{атм.}} |\gamma_{1,2}(0)|^2 \sqrt{S} \left[\int |\Gamma(\mathbf{r})|^4 d\mathbf{r} \right]^{1/2} / \int |\Gamma(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}, \quad (2)$$

где $\Gamma(\mathbf{r}) = \int C(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} dk / \int C(\mathbf{k}) dk$ — нормированная функция когерентности излучения, прошедшего через турбулентную атмосферу. Если интерферирующие поля попадают на фотослой через коллиматор с линейным увеличением ρ , то R_0 умножается на эту величину. Учитывая, кроме того, что $\int |\Gamma(\mathbf{r})|^4 d\mathbf{r} \sim \int |\Gamma(\mathbf{r})|^2 \sim \mu$ совпадает по порядку с площадью когерентности, (2) можно записать в виде

$$R_0 \sim 2\pi \bar{n}_{\text{атм.}} |\gamma_{1,2}(0)|^2 (S/\mu)^{1/2} \rho. \quad (3)$$

Оценим R_0 . В обычных условиях при $\alpha \sim 1$, $\rho \sim 10$, $S \sim (10 \text{ см})^2$, $\mu \sim (3 \text{ см})^2$, $\bar{n}_{\text{атм.}} \sim 10^{-1}$ получим $R_0 \sim |\gamma_{1,2}(0)|^2 < 1$. Столь малое зна-

¹ Такое определение ширины спектра вполне достаточно для выяснения основных особенностей предполагаемой методики. При более последовательном подходе оптимальное значение $\Delta\nu_{\text{опт.}}$ должно определяться из условия максимума точности измерений искомого параметра. Такие расчеты приведены в [4]. Хотя в этой работе оптимальное значение $\Delta\nu$ определяется для фотоэлектрической системы регистрации, соответствующие формулы применимы и для рассматриваемой здесь голографической методики, нужно только подставить соответствующие параметры. Полученные таким путем значения $\Delta\nu_{\text{опт.}}$ совпадают по порядку с фигурирующим в настоящей статье значением $\Delta\nu \sim 10^{11} \text{ Гц}$.

чение R_0 и связанная с этим низкая точность в измерении $|\gamma_{1,2}(0)|^2$ определяется, очевидно, тем, что максимальная площадь спектра пространственных частот (при сохранении спектральной плотности) ограничивается в обсуждаемой схеме не областью разрешения голограммы, а пространственным спектром излучения на выходе турбулентного слоя, который через $\bar{n}_{\text{атм}}$ и μ определяет R_0 . Как видно из (3), R_0 линейно зависит от коэффициента увеличения ρ , который в принципе может быть значительно увеличен. Однако практическая реализация такой схемы по ряду причин оказывается затрудненной. Ниже рассмотрим схему, в которой эквивалентное увеличение ρ достигается при регистрации не суперпозиции исходных полей V_1, V_2 , а их преобразования Фурье, осуществляемого обычной линзой (L) (рис. 1) (при двух соответствующим образом подобранных апертурах L', L''). Свет от звезды проходит через слой турбулентной атмосферы, отражается от зеркал $1 - 4$ и линзой $L(L', L'')$ фокусируется на фотослой Φ .

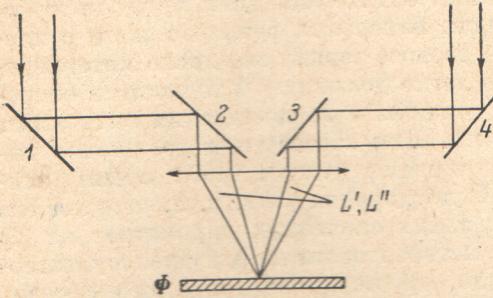


Рис. 1. Схема звездного интерферометра.

Лентность стационарной и изотропной. Пространственная спектральная плотность излучения в плоскости Φ не будет флюктуировать со временем, и в проводимых ниже преобразованиях можно пренебречь дифракцией на апертурах L', L'' . Кроме того, будем считать, что амплитудно-фазовые флюктуации, обусловленные турбулентностью, много меньше флюктуаций, обусловленных аберрациями и дефокусировкой на апертурах L', L'' . Поскольку сигнальными флюктуациями мы пренебрели (это следствие предположения, что площадь апертур L', L'' много больше площади когерентности, обусловленной турбулентностью), единственным источником ошибок будут собственные шумы фотослоя (интерференционным шумом в интересующем нас случае, когда $|\gamma_{1,2}|$ определяется по слабой сигнальной компоненте ($\bar{n}_{\text{атм}} < 1$ или $\bar{n} \ll 1$), также можно пренебречь).

В таких предположениях эффективная мощность шума определится выражением (26) [2]

$$N^2 = \alpha^2 \bar{i} S T^2 s_0^4 \int \Phi^2(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (4)$$

В применении к рассматриваемой схеме \bar{i} уже не будет постоянной по поверхности S , а определится распределением интенсивности в кружке рассеяния. Полная мощность шума

$$N^2 = \alpha^2 T^2 s_0^4 \int \Phi^2(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \int i^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \alpha^2 T^2 s_0^4 B \int \Phi^2(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (5)$$

Вычислим B , считая, что экспонирование фотослоя производится много-кратно в разные точки, так, чтобы перекрытием покрепнений от разных экспозиций можно было пренебречь. При этом

$$i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n i_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}_i); \quad i^2 = \sum i^2(\mathbf{r} + \mathbf{r}_i); \quad i_1(\mathbf{r}) = \left| \int_v \Pi(v) V(v) e^{i \mathbf{r} v} dv \right|^2, \quad (6)$$

где

$$\Pi(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu \in L', L'', \\ 0 & \text{при } \nu \notin L', L''; \end{cases}$$

$V(\nu, t)$ — комплексное поле в точке ν апертуры в момент t . После подстановки (6) в (5) и простых преобразований получим

$$B = nJ^2 \int_{\Delta} \int_{\nu} \int_{\nu'} \Pi(\nu) \Pi(\nu) \Pi(\nu + \Delta) \Pi(\nu' + \Delta) |\Gamma(\Delta)|^2 d\Delta d\nu d\nu'; \quad J = |\nu|^2$$

(с учетом сделанного выше предположения, что площадь когерентности поля $V(\nu)$ существенно меньше площади апертур L', L'')

$$B = nJ^2 \int |\Gamma(\Delta)|^2 d\Delta \left[\int |\Pi(\nu)|^2 d\nu \right]^2. \quad (7)$$

Спектральная плотность интенсивности сигнальной компоненты определяется формулой (19) [2]

$$|L(\mathbf{k})| = 2\alpha^2 s_0^2 J^2 S T \beta |C(-\mathbf{k}) + C(+\mathbf{k})| |\gamma_{1,2}(0)|^2. \quad (8)$$

Заменим в (8), как и при расчете шума, $J^2 S$ величиной B . Пространственная спектральная плотность поля, падающего на фотослой для данной схемы, запишется в виде

$$C(\mathbf{k}) = \int |\Pi(\nu)|^2 |\Pi(\nu - \mathbf{k})| d\nu \left[\int |\Pi(\nu)|^2 d\nu \right]^2. \quad (9)$$

Подставляя (9), (7) в (8) и (8) в (5), получим выражение для интенсивности сигнальной компоненты

$$S = \alpha^2 s_0^2 T n_{\text{атм.}} J \int \Phi(\mathbf{k}) [C(-\mathbf{k}) + C(+\mathbf{k})] d\mathbf{k} |\gamma_{1,2}(0)|^2. \quad (10)$$

Пользуясь формулами (10), (7), (5), получим отношение сигнал/шум

$$\frac{S}{N} = \frac{\alpha n_{\text{атм.}} |\gamma_{1,2}(0)|^2 \sqrt{n} \int |\Phi(\mathbf{k})| |\Pi(\nu)|^2 |\Pi(\nu - \mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} d\nu}{\left(\int |\Phi(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \int |\Gamma(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \right)^{1/2} \int |\Pi(\nu)|^2 d\nu}. \quad (11)$$

Для узкополосного фильтра $\Phi(\mathbf{k})$ с центром в \mathbf{k}_0

$$\frac{S}{N} = \frac{\alpha n_{\text{атм.}} |\gamma_{1,2}(0)|^2 \sqrt{n} \left(\int |\Phi(\mathbf{k})| d\mathbf{k} \right)^{1/2} \int |\Pi(\nu)|^2 |\Pi(\nu - \mathbf{k}_0)|^2 d\nu}{\left(\int |\Gamma(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \right)^{1/2} \int |\Pi(\nu)|^2 d\nu}. \quad (12)$$

Оценим точность измерений, которая может быть достигнута при использовании транспаранта площади S . Число почти неперекрывающихся экспозиций на таком транспаранте равно $n = S/\Delta S$, где ΔS — эффективная площадь покрытия от одной экспозиции

$$\Delta S \approx \int \frac{S(f) df}{S(0)} \approx 1 / \int |\Gamma(\mathbf{r})| d\mathbf{r}; \quad S(f) = \int \Gamma(\mathbf{r}) e^{i f \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (13)$$

Учитывая, что $\int |\Gamma(\mathbf{r})| d\mathbf{r}$ совпадает по порядку с площадью когерентности $\int |\Gamma(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$, в (12) можно приближенно положить

$$\int |\Gamma(\mathbf{r})| d\mathbf{r} / \int |\Gamma(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \sim 1. \quad (14)$$

Верхнюю оценку для отношения сигнал/шум можно найти, как и в [2], не конкретизируя вида спектра $C(\mathbf{k})$ в (в [2]) или апертуры $\Pi(\nu)$, подставив в (12) вместо величины $\int |\Pi(\nu)|^2 |\Pi(\nu - \mathbf{k}_0)|^2 d\nu / \int |\Pi(\nu)|^2 d\nu$ ее максимальное значение при $\mathbf{k}_0 = 0$, равное единице. При этом с учетом (14)

$$S/N = \alpha \bar{n}_{\text{атм.}} |\gamma_{1,2}(0)|^2 \sqrt{S} \left(\int |\Phi(\mathbf{k})| d\mathbf{k} \right)^{1/2} \quad (15)$$

совпадает по форме с выражением (28)^[2], полученным при исследовании точности измерений интерференционного сигнала от двух независимых источников. Предельное значение $S/N = R_{\max}$, получаемое при аксиально-симметричном фильтре²^[2]

$$R_{\max} \sim 2\pi\alpha\bar{n}_{\text{атм.}} |\gamma_{1,2}(0)|^2 \frac{R_1}{l}. \quad (16)$$

Оценку R_{\max} получим, подставив в (16) проведенные выше значения величин α , $\bar{n}_{\text{атм.}}$, R_1 , l

$$R_{\max} \sim 2 \cdot 10^5 |\gamma_{1,2}(0)|^2, \quad (17)$$

т. е. потенциальная точность измерений оказывается весьма высокой. Однако в действительности в первую очередь из-за наличия отличного от единицы множителя

$$\int |\Pi(\nu)|^2 \Pi(\nu - k_0)^2 d\nu / \int |\Pi(\nu)|^2 d\nu$$

величина R_{\max} значительно меньше и в сильной степени зависит от выбора оптимальной апертуры $\Pi(\nu)$.

Остановимся вкратце на вопросах, связанных с практической реализацией описанной методики измерений $|\gamma_{1,2}(0)|$. Важно рассматривалась

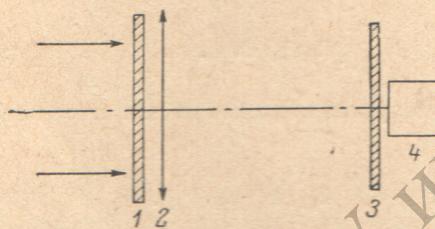


Рис. 2. Схема измерений сигнальной компоненты.

1 — транспарант, полученный после обработки фотослоя; 2 — линза, формирующая спектр сигнальной компоненты в плоскости фильтра 3; 3 — фильтр $\Phi(k)$; 4 — фотоэлектрическая схема измерений светового потока на выходе фильтра $\Phi(k)$.

несущественные константы и параметры (обычно трудноизмеримые), нужно провести дополнительные нулевые измерения при известном значении $|\gamma_{1,2}(0)|$. В применении к схеме рис. 1 измерение $|\gamma_{1,2}(0)|$ сводится к следующему. При наилучшим образом выбранной апертуре $\Pi(e)$ (из соображений максимальности отношения сигнал/шум) производится последовательное экспонирование всего транспаранта, когда обе части апертуры L' , L'' , открыты одновременно. На другом (контрольном) транспаранте экспонирование в каждой точке производится дважды, когда L' , L'' открыты поочередно, так, что полная экспозиция остается постоянной.³ Оба транспаранта обрабатываются в одинаковых условиях, затем для каждого производится измерение эффективной сигнальной компоненты, определяемой как разность двух световых потоков при двух ортогональ-

² Хотя в (16) размеры приемного объектива явно не входят, эта зависимость принципиально существенна и следует из легко доказываемого соотношения ($t_1 S_1 = t_2 S_2$), связывающего площади приемных апертур S_1 , S_2 с временами наблюдения t_1 , t_2 , необходимыми для обеспечения одинаковой точности измерений.

³ Нетрудно представить себе и различные варианты этой схемы, преследующие цель проведения сигнального и контрольного измерений в одинаковых условиях, что существенно при нестационарном характере турбулентности и фотослоя. Можно к примеру производить контрольную и сигнальную экспозиции поочередно на одном транспаранте, а при измерении сигнальной компоненты поочередно открывать и закрывать соответствующие участки или, разделив исходный спектр на два (полупрозрачным зеркалом), можно производить контрольную и сигнальную экспозиции одновременно. Однако в последнем случае точность измерений ухудшается в $\sqrt{2}$ раза.

ных положениях транспаранта.⁴ Контрольный транспарант нужен для того, чтобы учесть несовершенство реальных фотослоев (для пленки типа «Микрат» это несовершенство выражается, как показали опыты, прежде всего в анизотропии шумового фона), которое обусловливает появление довольно мощной сигнальной компоненты («фонового сигнала»), и в случае, когда обе части апертуры открываются поочередно и интерференционного сигнала нет. Для сигнального транспаранта эффективная сигнальная компонента определяется суммой интерференционного и «фонового» сигналов. Разность эффективных сигнальных компонент, полученных по сигнальному и контрольному транспарантам, определит искомый интерференционный сигнал. С практической точки зрения весьма существенным оказывается тот факт, установленный в опытах, что даже при не слишком жестких требованиях на одинаковость условий обработки и хранения транспарантов фоновый сигнал остается постоянным от транспаранта к транспаранту с чрезвычайно высокой точностью (порядка шумовой ошибки фотослоя), особенно в области высоких пространственных частот.

По описанной схеме в начале 1970 г. была собрана экспериментальная установка для проведения опытов по интерференции световых полей от независимых тепловых источников (с параметром вырождения $\bar{n} \sim 10^{-3}$). Однако по независящим от автора причинам эти опыты были прекращены, и работа по экспериментальному наблюдению интерференции независимых слабовырожденных полей в целом осталась незавершенной, тем не менее ход этих экспериментов подтвердил высокую эффективность и практичность описанной здесь методики измерений.

С момента написания этой статьи в печати появилось большое число работ, прямо или косвенно примыкающих к звездной интерферометрии через случайные среды. Из оригинальных работ этого направления, представляющих, в принципе, наибольший интерес или ближе всего примыкающих к рассмотренной здесь методике, отметим лишь [5-9]. Общим в этих работах является то, что интерференционные картины регистрируются тем или иным способом в течение малых промежутков времени (порядка времени когерентности $\tau_{\text{атм}}$), и затем полностью или частично реализуется оптимальный алгоритм, заключающийся в когерентной обработке в объеме когерентности $V_{\text{атм}}$, и некогерентной — по сигналам от каждого объема. Нетрудно показать, что в рассматриваемой схеме также реализуется оптимальный алгоритм — при $T \sim \tau_{\text{атм}}$. При длинных экспозициях ($T \gg \tau_{\text{атм}}$) эта схема уже не будет оптимальной, однако для случая слабовырожденных полей соответствующее ухудшение в точности незначительно, в то же время требуемая площадь транспаранта при этом уменьшается в $(T/\tau_{\text{атм}})$ раз (при сохранении в обоих случаях полного времени измерений), или, в других терминах, отношение сигнал/шум в долгоякспозиционном случае почти в $(T/\tau_{\text{атм}})^{1/2}$ раз выше. Величина T , т. е. время экспозиции каждого спектра, при этом определяется из условия, чтобы мощность «темнового» шума N_0 равнялась мощности сигнального («квантового») шума, обусловленного экспозицией сигнальным спектром (увеличение T сверх этого значения не приводит к заметному росту точности измерений, но увеличивает общее время измерений). Приближенно мощность сигнального шума N_s определяется плотностью погорнения фотослоя и пропорциональна яркости источника в максимуме регистрируемого спектра J_m и времени экспозиции, т. е. $N_s = B'J_m T$. Тогда $T = N_0/B'J_m$ и коэффициент эффективности

$$K = N_0/B'J_m \tau_{\text{атм}}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что сравнительная эффективность растет с ухудшением условий наблюдения и уменьшением яркости исследуемого объекта.

⁴ Практически более удобной может оказаться схема с непрерывно вращающимся транспарантом. Тогда сигнальная компонента определяется по переменной составляющей светового потока, которая может быть выделена селективным измерителем.

Так, при измерениях звезд, требующих времени экспозиции ~ 10 с и характера времени когерентности $\tau_{\text{атм.}} \sim 10^{-3}$ с, в короткоэкспозиционном случае требуются транспаранты с общей площадью в 10^4 раз большей, чем в длинноэкспозиционном (или при равных площадях в долгоэкспозиционном случае можно измерять объекты с 10^2 раз меньшей яркостью).

В применении к звездному интерферометру с фотоэлектрической регистрацией аналогичный вывод, следующий из свойства взаимности голограммической и гетеродинной систем [10], заключается в том, что с целью уменьшения числа каналов при $n_{\text{атм.}} \ll 1$ приемную апертуру следует выбирать много большей площади когерентности $S_{\text{атм.}}$. При этом система остается практически оптимальной.

В заключение отметим, что приведенные выше формулы могут быть использованы при сравнительной характеристике звездного интерферометра и интерферометра интенсивностей.

Литература

- [1] В. И. Вайцель. Астр. ж., 47, 890, 1970.
- [2] В. И. Вайцель. Опт. и спектр., 33, 975, 1972.
- [3] Е. Вольф, Л. Мандель. Усп. физ. наук, 87, № 3, 1965; 88, № 4, 1966.
- [4] В. И. Вайцель. Опт. и спектр., 43, 1977.
- [5] A. Labeyrie. Astron. and Astrophys., 6, 85, 1970.
- [6] D. Kogel, G. Dryden, M. D. Miller. Opt. commun., 5, 187, 1972.
- [7] Д. В. Корольков, О. И. Крат. Астр. ж., 53, вып. 3, 1976.
- [8] C. P. Wang. Opt. Commun., 10, 253, 1974.
- [9] W. T. Rhodes, J. W. Goodman. J. Opt. Soc. Am., 63, 647, 1973.
- [10] В. И. Вайцель. Радиотехн. и электрон., 16, 440, 1971.

Поступило в Редакцию 30 сентября 1971 г.
В окончательной редакции 3 февраля 1977 г.