МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

СТОУНОВЫ РЕШЕТКИ КРАТНО ω-ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Н.Н. Воробьев, А.И. Титова

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова

STONE LATTICES OF MULTIPLY ω-LOCAL FITTING CLASSES

N.N. Vorob'ev, A.I. Titova

P.M. Masherov Vitebsk State University

Описываются n-кратно ω-локальные (тотально ω-локальные) классы Фиттинга со стоуновой решеткой n-кратно ω-локальных (тотально ω-локальных) подклассов Фиттинга.

***Ключевые слова**: класс Фиттинга, полная решетка классов Фиттинга, атом решетки, дистрибутивная решетка, решетка с дополнениями, булева решетка, псевдодополнение, стоунова решетка.*

n-Multiply ω-local (totally ω-local) Fitting classes having a Stone lattice of n-multiply ω-local (totally ω-local) Fitting subclasses are described.

***Keywords**: Fitting class, complete lattice of Fitting classes, atom of lattice, distributive lattice, lattice with complements, pseudocomplement, Boolean lattice, Stone lattice.*

Введение

Все рассматриваемые группы конечны. В дальнейшем символ ω означает некоторое непустое множество простых чисел, а $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Символ $\pi(G)$ – множество всех различных простых делителей порядка группы G, а $\pi(\mathfrak{F})$ является объединением множеств $\pi(G)$ для всех групп G из класса групп $\mathfrak{F}$. В соответствии со стандартной терминологией, $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп, $\mathfrak{N}_p$ – класс всех p-групп (p – фиксированное простое число), $\mathfrak{G}_{\pi'}$ – класс всех π'-групп, $\mathfrak{G}_{p'}$ – класс всех p'-групп, $\mathfrak{G}_{\omega d}$ – класс всех тех групп, у которых композиционный фактор является ωd-группой. ωd*-Группа* – это группа, порядок которой делится хотя бы на одно число из ω.

Напомним, что $\mathfrak{F}$*-корадикал* $G^{\mathfrak{F}}$ группы G – пересечение всех тех нормальных подгрупп T из G, для которых $G / T \in \mathfrak{F}$. В частности, символом $G^{\omega d}$ обозначают наименьшую нормальную подгруппу N группы G со свойством $\omega \cap \pi(H / K) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора H / K из G / N ($G^{\omega d} = G$, если $\omega \cap \pi\left(Soc(G / N)\right) \neq \varnothing$). Кроме того, согласно [1] полагают, что $F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{p'}}$.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}, \qquad (0.1)$$

где $f(\omega') \neq \varnothing$. Следуя [1], сопоставим функции f класс групп

$$LR_\omega(f) = (G \mid G^{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Если класс Фитинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (0.1), то $\mathfrak{F}$ называется ω*-локальным классом Фиттинга с* ω*-локальной H-функцией f* [1]. Напомним теперь восходящее к работе [2] понятие кратно ω-локального класса Фиттинга. Всякий класс Фиттинга считается 0*-кратно* ω*-локальным*, а при $n \geq 1$ класс Фиттинга называется *n-кратно* ω*-локальным*, если $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где все непустые значения H-функции f являются $(n-1)$-кратно ω-локальными классами Фиттинга. Класс Фиттинга называется тотально ω-локальным, если он n-кратно ω-локален для всех натуральных n.

Впервые решетки формаций начал изучать в 1986 году А.Н. Скиба [3]. Непустая совокупность классов групп Θ называется *полной решеткой классов*, если пересечение любой совокупности классов из Θ снова принадлежит Θ, и во множестве Θ имеется такой класс $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любого другого класса $\mathfrak{H} \in \Theta$. Относительно включения $\subseteq$ совокупность всех n-кратно ω-локальных классов Фитинга l_ω^n и совокупность всех тотально ω-локальных классов Фиттинга l_ω^∞ являются полными решетками. Изучению решеток кратно локальных классов Фиттинга и формаций посвящены работы [4]–[7]. В частности, в работе [7] описаны n-кратно локальные классы Фиттинга со стоуновой решеткой n-кратно локальных подклассов Фиттинга. В настоящей работе найдены новые семейства стоуновых решеток кратно ω-локальных классов Фиттинга.

Доказаны следующие теоремы:

***Теорема* 0.1** *Пусть $\mathfrak{F}$ – n-кратно ω-локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда решетка $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ стоунова, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

***Теорема* 0.2** *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально ω-локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда решетка $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ стоунова, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Если $\mathfrak{F}$ – n-кратно ω-локальный (тотально ω-локальный) класс Фиттинга, то символом $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ ($L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$) обозначается решетка всех его n-кратно ω-локальных подклассов Фиттинга (решетка всех его тотально ω-локальных подклассов Фиттинга соответственно).

Мы будем использовать терминологию из [1], [8]–[11].

1 Предварительные сведения

Непустой класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Напомним теперь понятие прямого произведения классов. *Ортогональной системой классов* называется такая совокупность $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ непустых классов групп $\mathfrak{F}_i$, что

1) либо $|I| = 1$, либо $|I| > 1$;

2) $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для любых двух различных $i, j \in I$.

Для любой ортогональной системы классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ символом $\underset{i\in I}{\otimes}\mathfrak{F}_i$ (или иначе $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_n$ в случае, когда $I = \{1,...,n\}$) обозначают совокупность всех групп вида $A_1 \times A_2 \times ... \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, ..., A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторого натурального t и $i_1, i_2, ..., i_t \in I$.

Если $|I| = 1$ и $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$, то полагают $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes}\mathfrak{F}_i$.

***Лемма* 1.1** [4, лемма 4]. *Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, ..., \mathfrak{F}_t$ – ортогональная система классов Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_t$ – класс Фиттинга.*

***Лемма* 1.2** [11, теорема 3.2.14]. *Пусть $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ – класс Фиттинга. Тогда класс Фитинга $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-локален в том и только том случае, когда n-кратно ω-локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

***Лемма* 1.3** [4, лемма 1]. *Пусть $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes}\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{M}$ – непустой подкласс Фиттинга в $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{M} = \underset{i\in I}{\otimes}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i)$.*

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная непустая совокупность групп. Символом $l_\omega^n \mathrm{fit}\mathfrak{X}$ обозначают пересечение всех тех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то вместо $l_\omega^n \mathrm{fit}\{G\}$ пишут $l_\omega^n \mathrm{fit}G$. Всякий класс такого вида называется *однопорожденным n-кратно ω-локальным классом Фиттинга* [1].

***Лемма* 1.4** [11, лемма 3.2.26]. *Пусть $\mathfrak{F} = l_\omega^n \mathrm{fit}G$ – однопорожденный n-кратно ω-локальный класс Фиттинга. Тогда решетка $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ имеет лишь конечное число атомов.*

Напомним, что совокупность классов Фиттинга Θ называется *полной решеткой классов Фиттинга* [10], [11], если классы $\varnothing$ и $\mathfrak{G}$ принадлежат Θ и пересечение любого множества классов из Θ снова принадлежит Θ. В дальнейшем Θ обозначает некоторую полную решетку классов Фиттинга, и если $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H} \in \Theta$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ – нижняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в Θ. Символом $\mathfrak{M} \vee^\Theta \mathfrak{H}$ обозначается точная верхняя грань для $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ в решетке Θ.

Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – n-кратно ω-локальные классы Фиттинга, то

$$\mathfrak{M} \vee_\omega^n \mathfrak{H} = l_\omega^n \mathrm{fit}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Аналогично, если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – тотально ω-локальные классы Фиттинга, то

$$\mathfrak{M} \vee_\omega^\infty \mathfrak{H} = l_\omega^\infty \mathrm{fit}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Напомним определение булевой решетки. Решетка L называется *дистрибутивной*, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

называемое *дистрибутивным законом*.

Дополнением элемента x в решетке с нулем и единицей называется такой элемент y, что

$$x \wedge y = 0, \ \ x \vee y = 1.$$

n-Кратно ω-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{M}$ класса $\mathfrak{F} \in l_\omega^n$ называется *дополняемым* в $\mathfrak{F}$ [11]–[12], если в $\mathfrak{F}$ имеется такой n-кратно ω-локальный подкласс Фиттинга $\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$), что $\mathfrak{F} = l_\omega^\infty \mathrm{fit}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. *Булевой решеткой* называется дистрибутивная решетка с дополнениями.

***Лемма* 1.5** [11, теорема 3.2.29]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – неединичный n-кратно ω-локальный класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *решетка $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ булева;*

2) *$\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – набор всех атомов решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F})$;*

3) *в $\mathfrak{F}$ дополняем каждый подкласс Фиттинга, который является атомом решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F})$.*

***Лемма* 1.6** [11, следствие 3.2.15]. *Пусть $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes}\mathfrak{F}_i$, для некоторых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

Тогда в том и только в том случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ тотально ω-локален, когда тотально ω-локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.

Пусть L – решетка с нулем. Тогда элемент a^* называется *псевдодополнением* элемента $a(\in L)$, если из $a \wedge a^* = 0$ и $a \wedge x = 0$ следует $x \le a^*$. Решетка с нулем называется *решеткой с псевдодополнениями*, если каждый ее элемент обладает псевдодополнением. Дистрибутивная решетка с псевдодополнениями, каждый элемент которой удовлетворяет тождеству

$$a^* \vee (a^*)^* = 1,$$

называется *стоуновой решеткой*.

2 Доказательство теоремы 0.1

***Лемма* 2.1** *Пусть $\mathfrak{F}$ – n-кратно ω-локальный класс Фиттинга. Тогда если класс $\mathfrak{N}_p$ дополняем в решетке $L^n_\omega(\mathfrak{F})$ для каждого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ – n-кратно ω-локальный подкласс Фиттинга класса $\mathfrak{F}$. Покажем, что если $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$, то подкласс $\mathfrak{N}_p$ дополняем в решетке $L^n_\omega(\mathfrak{M})$. Действительно, пусть $\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L^n_\omega(\mathfrak{F})$.

Согласно лемме 1.1 и 1.2

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee^n_\omega \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}.$$

И поэтому по лемме 1.3

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}) =$$
$$= (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) =$$
$$= \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \vee^n_\omega (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}),$$

где $\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = (1)$. Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L^n_\omega(\mathfrak{M})$ для каждого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$.

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $\mathfrak{F}$ – однопорожденный n-кратно ω-локальный класс Фиттинга. В этом случае, согласно лемме 1.4 можно использовать индукцию по числу атомов в решетке $L^n_\omega(\mathfrak{F})$.

Пусть $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L^n_\omega(\mathfrak{F})$, где $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}$, поэтому по индукции $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$.

Вместе с тем $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee^\infty_\omega \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. □

Доказательство теоремы 0.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – n-кратно ω-локальный класс Фиттинга. Допустим, что $L^n_\omega(\mathfrak{F})$ – стоунова решетка и пусть $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$.

Заметим, что для каждого n-кратно ω-локального подкласса Фиттинга $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$ класс $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L^n_\omega(\mathfrak{F})$, где $\pi = \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$. Действительно, для каждого n-кратно ω-локального класса Фитинга $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ равенство $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ имеет место в том и только в том случае, если $\pi \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Значит $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$. Поэтому класс $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L^n_\omega(\mathfrak{F})$. Таким образом, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ – псевдодополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ для каждого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ в решетке $L^n_\omega(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{N}_p$ – псевдодополнение элемента $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ в решетке $L^n_\omega(\mathfrak{F})$.

Вместе с тем, согласно лемме 1.1 и 1.2, по индукции

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee^\infty_\omega (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}).$$

Следовательно, для каждого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ класс $\mathfrak{N}_p$ дополняем в решетке $L^n_\omega(\mathfrak{F})$. Поэтому, согласно лемме 2.1, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.

Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{M} \in L^n_\omega(\mathfrak{F})$, $\pi_1 = \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$ и $\pi_2 = \omega \cap (\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(\mathfrak{M}))$. Если $\pi_1 = \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ и (1) – дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L^n_\omega(\mathfrak{F})$. В противном случае $\mathfrak{N}_{\pi_2}$ – дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L^n_\omega(\mathfrak{F})$. Согласно лемме 1.5, решетка $L^n_\omega(\mathfrak{F})$ булева. Следовательно, $L^n_\omega(\mathfrak{F})$ – стоунова решетка. □

3 Доказательство теоремы 0.2

Следующая лемма очевидна.

***Лемма* 3.1** *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально ω-локальный класс Фиттинга. Тогда если $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$.*

***Лемма* 3.2** *Пусть $\mathfrak{F}$ – однопорожденный тотально ω-локальный класс Фиттинга. Тогда решетка $L^\infty_\omega(\mathfrak{F})$ имеет лишь конечное число атомов.*

Доказательство. Пусть $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{N}_p$ – атом решетки $L^\infty_\omega(\mathfrak{F})$. Пусть $\mathfrak{M}$ – атом решетки $L^\infty_\omega(\mathfrak{F})$. Тогда по лемме 3.1 $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$. Но $\mathfrak{M}$ – атом. Поэтому $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}$.

Поскольку G – группа конечная, то существует конечное число атомов в решетке $L^\infty_\omega(\mathfrak{F})$. □

***Лемма* 3.3** *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально ω-локальный класс Фиттинга. Тогда если класс $\mathfrak{N}_p$ дополняем в решетке $L^\infty_\omega(\mathfrak{F})$ для каждого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ – тотально ω-локальный подкласс Фиттинга класса $\mathfrak{F}$. Покажем, что если $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$, то подкласс $\mathfrak{N}_p$ дополняем в решетке $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$. Действительно, пусть $\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$.

Согласно лемме 1.1 и 1.6

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee_\omega^\infty \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}.$$

И поэтому по лемме 1.3

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}) =$$
$$= (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) =$$
$$= \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \vee_\omega^n (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}),$$

где $\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = (1)$. Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L_\omega^\infty(\mathfrak{M})$ для каждого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$.

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $\mathfrak{F}$ – однопорожденный тотально ω-локальный класс Фиттинга. В этом случае, согласно лемме 3.2 можно использовать индукцию по числу атомов в решетке $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$.

Пусть $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ для каждого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}$, поэтому по индукции $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$.

Согласно лемме 1.1 и 1.6 $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee_\omega^\infty \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}$, при этом $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}$, и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. □

Доказательство теоремы 0.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально ω-локальный класс Фиттинга. Допустим, что $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ – стоунова решетка и пусть $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$.

Заметим, что для каждого тотально ω-локального подкласса Фиттинга $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$ класс $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$, где $\pi = \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$. Действительно, для каждого тотально ω-локального класса Фиттинга $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ равенство $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ имеет место в том и только в том случае, если $\pi \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Значит $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$. Поэтому класс $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$. Таким образом, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ – псевдодополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ для каждого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ в решетке $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{N}_p$ – псевдодополнение элемента $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ в решетке $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$.

Вместе с тем, согласно лемме 1.1 и 1.6, по индукции $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee_\omega^\infty (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'})$.

Следовательно, для каждого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ класс $\mathfrak{N}_p$ дополняем в решетке $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ (элементом $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$). Поэтому, согласно лемме 3.3, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.

Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} \in L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$, $\pi_1 = \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$ и $\pi_2 = \omega \cap (\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(\mathfrak{M}))$. Если $\pi_1 = \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ и (1) – дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$. В противном случае $\mathfrak{N}_{\pi_2}$ – дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$. Следовательно, решетка $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ булева. Поэтому $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ – стоунова решетка. □

***Следствие* 3.4** *Следующие утверждения эквивалентны*:

1. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ ω-локален и $L_\omega^1(\mathfrak{F})$ – стоунова решетка*;
2. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ – n-кратно ω-локален и $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ – стоунова решетка*;
3. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ – тотально ω-локален и $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ – стоунова решетка*;
4. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ ω-локален и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Если $\omega = \mathbb{P}$, мы получаем следующее результаты:

***Следствие* 3.5** [11, следствие 3.3.7]. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ локален и $L_\omega^1(\mathfrak{F})$ – стоунова решетка*;
2. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ – n-кратно локален и $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ – стоунова решетка*;
3. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ – тотально локален и $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ – стоунова решетка*;
4. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ локален и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скиба*, *А.Н.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

2. *Скиба*, *А.Н.* Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Минск: изд-во «Университетское», 1987. – Вып. 3. – С. 21–31.

3. *Скиба*, *А.Н.* О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп: труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР; под ред. М.И. Салука. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 135–149.

4. *Воробьев*, *Н.Н.* О булевых решетках *n*-кратно локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Сибирский матем. журн. – 1999. – Т. 40, № 3. – С. 523–530.

5. *Воробьев*, *Н.Н.* О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67, вып. 5. – С. 662–673.

6. *Царев*, *А.А.* О недистрибутивности решетки всех *n*-кратно ω-композиционных формаций /

А.А. Царев // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3 (8). – С. 84–88.

7. *Skiba*, *A.N.* On Stone sublattices of the lattice of totally local Fitting classes / A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Algebra and Discrete Mathematics. – 2007. – № 4. – P. 138–146.

8. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с.

9. *Шеметков*, *Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1989. – 256 с.

10. *Скиба*, *А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларусская навука, 1997. – 240 с.

11. *Воробьев*, *Н.Н.* Алгебра классов конечных групп: монография / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2012. – 322 с.

12. *Скиба*, *А.Н.* О дополняемых подформациях / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Гомель: изд-во Гомельского гос. ун-та, 1996. – Вып. 9. – С. 114–118.

Поступила в редакцию 11.08.17.