МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

РАЗРЕШИМЫЕ ГИПЕРРАДИКАЛЬНЫЕ ФОРМАЦИИ

С.Ф. Каморников

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель

SOLUBLE HYPERRADICAL FORMATIONS

S.F. Kamornikov

Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel

В работе устанавливается, что каждая разрешимая гиперрадикальная формация является наследственной и предлагается описание всех разрешимых гиперрадикальных формаций.

Ключевые слова: *формация, гиперрадикальная формация, разрешимая конечная группа.*

It is established that every soluble hyperradical formation is hereditary. The description of all soluble hyperradical formation is given.

Keywords: *formation, hyperradical formation, soluble finite group.*

Введение

В [1] описаны все разрешимые гиперрадикальные формации, т. е. разрешимые формации $\mathfrak{F}$, замкнутые относительно взятия нормальных подгрупп и порождений $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами. В основе доказательства, предложенного в [1], лежит анализ минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для разрешимой гиперрадикальной формации $\mathfrak{F}$ и редукция рассматриваемого случая к формациям Шеметкова – формациям $\mathfrak{F}$, для которых любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка.

В данной работе для описания разрешимых гиперрадикальных формаций предлагается подход, основанный на теореме Брайса и Косси из [2] о насыщенности разрешимой наследственной формации Фиттинга и редукции к работе [3], где описаны все решеточные наследственные насыщенные формации.

Отметим, что гиперрадикальные формации играют важную роль в различных задачах теории конечных групп (см., например, [4], [5]). В частности, они используются при решении проблемы перечисления всех решеточных формаций, т. е. формаций $\mathfrak{F}$, для которых в каждой конечной группе множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку в решетке всех подгрупп.

1 Основные определения и предварительные результаты

Рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [6] и [7].

Напомним, что формация – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G).

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Мы используем запись $s\mathfrak{F}$ ($s_n\mathfrak{F}$) для обозначения класса всех групп G, для которых $G \subseteq H \in \mathfrak{F}$ (класса всех групп G таких, что $G \triangleleft H \in \mathfrak{F}$). Если $s\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$ ($s_n\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$), то класс $\mathfrak{F}$ называется *наследственным* (*нормально наследственным*).

Нам понадобится следующая информация о свойствах $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G будем обозначать через $sn_{\mathfrak{F}}(G)$.

Лемма 1.1 ([4], лемма 3.1.3). *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$.*

Формация $\mathfrak{F}$ называется *гиперрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация;

2) любая группа $G = \langle A, B \rangle$, где A и B – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственный класс;

2) из $G = AB$, где $A \lhd G$, $B \lhd G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга – это формация, являющаяся классом Фиттинга.

Следующая лемма устанавливает связь между гиперрадикальными формациями и формациями Фиттинга.

***Лемма* 1.2.** *Любая наследственная гиперрадикальная формация является формацией Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – гиперрадикальная формация. Тогда из определения следует, что она является нормально наследственным классом.

Пусть теперь $G = AB$, где $A \lhd G$, $B \lhd G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$. Так как

$$G / A = AB / A \cong A / A \cap B$$

и $A \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq A$. На основании леммы 1.1 справедливо включение $A \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$. Аналогично показывается, что $B \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$. Теперь из определения гиперрадикальной формации следует, что группа $G = < A, B >$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{S}$ – формация всех разрешимых групп и $\mathfrak{S}_\pi$ – формация всех разрешимых π-групп (π – некоторое множество простых чисел). В дальнейшем под разрешимой формацией будет пониматься любая подформация формации $\mathfrak{S}$.

Следующий результат известен как теорема Брайса – Косси.

***Лемма* 1.3** [2]. *Любая разрешимая наследственная формация Фиттинга является насыщенной.*

***Лемма* 1.4.** *Любая разрешимая наследственная гиперрадикальная формация является насыщенной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная гиперрадикальная формация. Ввиду леммы 1.2 формация $\mathfrak{F}$ является формацией Фиттинга. Значит, на основании леммы 1.3 она является насыщенной. Лемма доказана.

Если M – подгруппа группы G, то через $Core_G(M)$ обозначается *ядро* подгруппы M в группе G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в подгруппе M.

***Лемма* 1.5** [6, теорема А.16.6]. *Пусть H и M – несопряженные максимальные подгруппы разрешимой группы G. Если $Core_G(M)$ не содержится в $Core_G(H)$, то подгруппа $H \cap M$ максимальна в подгруппе H.*

В доказательстве следующей леммы мы опираемся на известный результат Брайанта, Брайса и Косси из [8], который сформулируем в виде леммы.

***Лемма* 1.6** [8]. *Пусть S – такая подгруппа группы G, что $SF(G) = G$. Если группа G принадлежит формации $\mathfrak{F}$, то подгруппа S также принадлежит формации $\mathfrak{F}$.*

***Теорема* 1.1.** *Любая разрешимая гиперрадикальная формация является наследственной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая гиперрадикальная формация. Предположим, что она не является наследственной. Тогда в формации $\mathfrak{F}$ найдутся группы, обладающие подгруппами, не принадлежащими $\mathfrak{F}$. Из всех таких групп выберем группу G наименьшего порядка. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ и в группе G имеется некоторая подгруппа M, которая не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Ввиду выбора группы G можем полагать, что M – максимальная подгруппа группы G.

Если M не содержит $F(G)$, то ввиду леммы 1.6 подгруппа M принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, $F(G) \subseteq M$.

Пусть H – максимальная подгруппа группы G, не содержащая $F(G)$. Очевидно, подгруппы M и H не являются сопряженными. Рассмотрим подгруппу $H \cap M$. Так как $F(G)$ не содержится в H и $F(G) \le Core_G(M)$, то $Core_G(M)$ не содержится в $Core_G(H)$. Ввиду леммы 1.5 подгруппа $H \cap M$ максимальна в H. Так как $H \in \mathfrak{F}$ и $|H| < |G|$, то $H \cap M \in \mathfrak{F}$. Кроме того, из $M \in \mathfrak{F}$ следует также, что $H^{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap M$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ содержится в H. Следовательно, $H \cap M$ – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.

Так как формация $\mathfrak{F}$ является гиперрадикальной, то по определению она является нормально наследственной. Поэтому из $G \in \mathfrak{F}$ следует, что $F(G) \in \mathfrak{F}$. Так как $|G / F(G)| < |G|$, то ввиду выбора группы G все подгруппы группы $G / F(G)$ принадлежат формации $\mathfrak{F}$. Пусть

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = F(G)$$

– произвольная максимальная цепь подгрупп, соединяющая подгруппу $F(G)$ с группой G. Так как $H_{i-1} / F(G) \in \mathfrak{F}$, то $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq F(G) \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, подгруппа $F(G)$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной в группе G.

Итак, подгруппы $H \cap M$ и $F(G)$ $\mathfrak{F}$-субнормальны в G и принадлежат формации $\mathfrak{F}$. Кроме того,

$$< H \cap M, F(G) > = (H \cap M)F(G) =$$

$= HF(G) \cap M = M$.

Так как формация $\mathfrak{F}$ является гиперрадикальной, то $M \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию.

Таким образом, все максимальные подгруппы группы G принадлежат формации $\mathfrak{F}$, а значит, формация $\mathfrak{F}$ является наследственной. Теорема доказана.

***Замечание* 1.1.** Следуя [9], будем называть формацию $\mathfrak{F}$ *квазинаследственной*, если из условий $G \in \mathfrak{F}$ и $G = SF^*(G)$ всегда следует, что подгруппа S принадлежит формации $\mathfrak{F}$ (здесь через $F^*(G)$ обозначается *квазинильпотентный радикал* группы G – наибольшая нормальная квазинильпотентная подгруппа группы G; обзор ключевых свойств подгруппы $F^*(G)$ можно найти в [10]; из леммы 1.6 следует, что каждая разрешимая формация является квазинаследственной). По аналогии с теоремой 1.1 можно показать, что любая квазинаследственная (а не только разрешимая) гиперрадикальная формация является наследственной.

***Лемма* 1.7.** *Любая разрешимая гиперрадикальная формация является насыщенной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая гиперрадикальная формация. Тогда ввиду теоремы 1.1 она является наследственной. Отсюда на основании леммы 1.4 формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной. Лемма доказана.

2 Строение разрешимой гиперрадикальной формации

Основная цель работы – доказательство теоремы, описывающей все разрешимые гиперрадикальные формации. Доказательству теоремы предпошлем необходимую информацию о строении решеточных формаций.

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется *решеточной*, если множество $sn_{\mathfrak{F}}(G)$ всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой конечной группе G.

Следующий результат из [3] в случае наследственных насыщенных формаций устанавливает связь между гиперрадикальными и решеточными формациями.

***Лемма* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *формация $\mathfrak{F}$ является решеточной*;

2) *формация $\mathfrak{F}$ является гиперрадикальной*.

Нам понадобится следующее описание разрешимых наследственных насыщенных решеточных формаций из [3] (см. также [12]). Напомним, что если $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп, то через $D_0\mathfrak{X}$ обозначается класс всех групп, представимых в виде прямого произведения $H_1 \times ... \times H_t$, где $H_i \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, ..., t$.

***Лемма* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ является решеточной, когда существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$.*

***Теорема* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая формация. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ является гиперрадикальной, когда существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая формация. Если формация $\mathfrak{F}$ является гиперрадикальной, то ввиду теоремы 1.1 она является наследственной. Кроме того, на основании леммы 1.7 формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной. Значит, ввиду леммы 2.1 она является решеточной. Поэтому на основании леммы 2.2 существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$.

Пусть теперь для формации $\mathfrak{F}$ существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$. Очевидно, формация $\mathfrak{F}$ разрешима. Кроме того, на основании леммы 3.1.13 из [4] она является наследственной и насыщенной. Поэтому ввиду леммы 2.2 она является решеточной. Отсюда и из леммы 2.1 следует, что формация $\mathfrak{F}$ является гиперрадикальной. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев*, *А.Ф.* Гиперрадикальные формации конечных разрешимых групп / А.Ф. Васильев // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6. – С. 62–70.

2. *Bryce*, *R.A.* Fitting formations of finite soluble groups / R.A. Bryce, R. Cossey // Math. Z. – 1972. – Vol. 127, № 3. – P. 217–223.

3. *Васильев*, *А.Ф.* О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие к ним алгебраические системы. – Киев : Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 27–54.

4. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 2003. – 256 с.

5. *Ballester-Bolinches*, *A.* Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p.

6. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. Berlin – New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

7. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

8. *Bryant*, *R.* The formation generated by a finite group / R. Bryant, R.A. Bryce, B. Hartley // Bull. Austral. Math. Soc. – 1970. – Vol. 2, № 3. – P. 347–357.

9. *Васильев*, *А.Ф.* Одна задача теории формаций конечных групп / А.Ф. Васильев // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62, № 1. – С. 52–58.

10. *Каморников*, *С.Ф.* О некоторых свойствах формации квазинильпотентных групп / С.Ф. Каморников // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53, № 2. – С. 71–77.

11. *Каморников*, *С.Ф.* Об одном классе решеточных подгрупповых функторов / С.Ф. Каморников // Матем. заметки. – 2011. – Т. 89, № 3. – С. 355–364.

12. *Ballester-Bolinches*, *A.* On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra. – 1992. – Vol. 148. – P. 42–52.

Поступила в редакцию 24.07.13.