Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"

П. А. ЖИЗНЕВСКИЙ

О τ-ЗАМКНУТЫХ n-КРАТНО ω-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЯХ С БУЛЕВОЙ ПОДРЕШЕТКОЙ

ПРЕПРИНТ №3. *май 2010*

Гомель
УО "ГГУ им.Ф.Скорины"
2010

Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны. Используется терминология, принятая в работах [1]-[4].

Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел. Тогда любую функцию вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$, называют ω-композиционным спутником. Напомним, что через $R_\omega(G)$ обозначают наибольшую нормальную разрешимую ω-подгруппу группы G, а символом $C^p(G)$ — пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют порядок p (если таких факторов у группы G нет, то полагают $C^p(G) = G$). Для произвольного ω-композиционный спутника f полагают

$$CF_\omega(f) = \{G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и}$$

$$G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(Com(G)) \cap \omega\},$$

где $Com(G)$ — множество всех абелевых композиционных факторов группы G. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторого ω-композиционного спутника f, то говорят, что она ω-композиционна, а f — ω-композиционный спутник этой формации. Всякую формацию будем считают 0-кратно ω-композиционной. При $n \geqslant 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно ω-композиционной, если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями.

Подгрупповым функтором (см. [2]) называется всякое отображение τ, сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что:

1) $G \in \tau(G)$;

2) для всякого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A), T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$, $T^{\varphi^{-1}}\tau(A)$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутым, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

Частично упорядоченное по включению $\subseteq$ множество всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $c^\tau_{\omega_n}$ вместе с операциями $\vee^\tau_{\omega_n}$ и $\cap$ образует полную модулярную решетку.

Если все значения ω-композиционного спутника являются τ-замкнутыми $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями, то такой спутник называется $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значным.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} \in c^\tau_{\omega_n}$ через $c^\tau_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций, содержащих класс групп $\mathfrak{X}$. В частности, пишут $c^\tau_{\omega_n}\mathrm{form}G$ в случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая непустая нильпотентная насыщенная формация. Тогда, следуя [5, 6], будем говорить, что τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-критической или иначе минимальной τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной не $\mathfrak{H}$-формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ для каждой собственной τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$.

Для произвольной совокупности τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают

$$\vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая система $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значных ω-композиционных спутников. Тогда через $\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)$ обозначают такой $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник f, что $f(a) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I} f_i(a))$, если по крайней мере одна из формаций $f_i(a) \neq \emptyset$. Если же $f_i(a) = \emptyset$ для всех $i \in I$, то полагают $f(a) = \emptyset$, где $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Если $\mathfrak{F}$ — непустая τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация, $\mathfrak{H}$ — некоторая нильпотентная насыщенная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то символом $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ обозначается такая подрешетка решетки $c^{\tau}_{\omega_n}$, которая состоит из всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. Длину решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ (конечную или бесконечную) называют $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-дефектом формации $\mathfrak{F}$.

Решетка называется модулярной, если для любых элементов x, y, z решетки из $x \leqslant z$ следует, что $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Говорят, что элемент b является дополнением элемента $a \in L$ в решетке L с нулем 0 и единицей 1, если $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$. Решетка L с нулем 0 и единицей 1 называется решеткой с дополнениями, если каждый ее элемент имеет дополнение. Решетка называется дистрибутивной, если для любых x, y, z выполняется одно из следующих тождеств:

1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Булевой решеткой называют любую дистрибутивную решетку с дополнениями. Атом решетки — это ее наименьший ненулевой элемент, т.е. если $0 < a$, то в L не существует x такого, что $0 < x < a$.

В дальнейшем будем рассматривать только такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G выполняется $\tau(G) \subseteq s_{sn}(G)$, т.е. множество $\tau(G)$ содержится во множестве всех субнормальных подгрупп группы G.

Используемые результаты

Лемма 1. [7] *Пусть $\mathfrak{M}$ — нильпотентная ω-композиционная формация и m — минимальный τ-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{M}$. Тогда*

$$m(a) = \begin{cases} (1), \text{ если } a = p \in \pi(Com(\mathfrak{M})) \cap \omega; \\ \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}, \text{ если } a = \omega'; \\ \varnothing, \text{ если } a = q \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{M})). \end{cases}$$

В дальнейшем вместо пересечения $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}$ будем писать $\mathfrak{M}_{\omega'}$.

Лемма 2. [1] *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, причем $\mathfrak{H}$ локальна и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G монолитична, ее цоколь совпадает с $G^{\mathfrak{H}}$, и если $G^{\mathfrak{H}}$ — p-группа, то $G^{\mathfrak{H}} = C_G(G^{\mathfrak{H}}) = F_p(G)$.*

Лемма 3. [1] *Если в группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и $O_p(G) = \{1\}$ (p — некоторое простое число), то существует точный неприводимый F_pG-модуль, где F_p — поле из p элементов.*

Лемма 4. [8] *Если p — простое число и $O_p(G) = 1$, то $C^p(Z_p \wr G) = K$, где K — база сплетения $Z_p \wr G$.*

Лемма 5. [3] *Если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ и $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$ для некоторого простого числа $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 6. [2, с. 65] *Пусть h — канонический локальный спутник формации $\mathfrak{H}$ и $G = [P]H$ — монолитическая группа с цоколем $P = C_G(P) = O_p(G) = G^{\mathfrak{H}}$. Тогда G в том и только в том случае является $\overline{\tau}$-минимальной не $\mathfrak{H}$-группой, когда H — $\overline{\tau}$-минимальная не $h(p)$-группа.*

Лемма 7. [9] *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая непустая нильпотентная насыщенная формация и $n \geqslant 1$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае является минимальной τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n}$ form G, где G — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = G^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi = \pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) G — группа простого порядка $p \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{H}))$;

2) $G = [P]Q$, причем $P = C_G(P)$ — абелева p-группа, $p \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{H}))$ и $|Q| = q$, где p и q — различные простые числа.

Лемма 8. [3] *Пусть $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, где $f(A) = \mathfrak{F}$ для всех $A \in \mathfrak{L}^{-} \bigcup \{\mathfrak{L}'\}$ и $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда либо $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq G_{E\mathfrak{L}}$, либо найдется $A \in \mathcal{K}(G^{\mathfrak{F}}) \bigcap \mathfrak{L}$ такая, что $G/C^{A}(G) \notin f(A)$.*

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая непустая нильпотентная насыщенная формация, $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, где $n \geqslant 1$. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация.*

Доказательство. Если $\pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega \not\subseteq \pi(Com(\mathfrak{H})) \cap \omega$, то искомой подформацией формации $\mathfrak{F}$ будет формация $\mathfrak{N}_p$ всех p-групп, где $p \in \in (\pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega) \backslash (\pi(Com(\mathfrak{H})) \cap \omega)$. Действительно, $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}_p \subseteq \subseteq \mathfrak{F}$ и единственная собственная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная подформация (1) формации $\mathfrak{N}_p$ входит в $\mathfrak{H}$.

Пусть теперь $\pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega \subseteq \pi(Com(\mathfrak{H})) \cap \omega$. Пусть f — минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, H — канонический ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то найдется такое $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, что $f(a) \not\subseteq H(a)$.

Ввиду замечания 1 из [3, С.787] спутник H имеет следующие значения:

$$H(s) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p h(p), & \text{если } s = p \in \omega, \\ \mathfrak{H}, & \text{если } s = \omega', \end{cases}$$

где h — минимальный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{H}$. Из леммы 1 получаем

$$H(s) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p, & \text{если } s = p \in \pi(Com(\mathfrak{H})) \cap \omega; \\ \varnothing, & \text{если } s = p \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{H})). \\ \mathfrak{H}, & \text{если } s = \omega', \end{cases}$$

Предположим, что $a = p \in \omega$ и пусть $p \in \pi(Com(\mathfrak{H}))$. В этом случае $H(p) = \mathfrak{N}_p$. Пусть H — группа минимального порядка из $f(p) \setminus \mathfrak{N}_p$. Поскольку $f(p)$ — τ-замкнутая формация, то ввиду выбора группы H всякая собственная τ-подгруппа группы H содержится в $\mathfrak{N}_p$. Тогда по лемме 2 группа H — монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{N}_p$-группа с цоколем $Q = H^{\mathfrak{N}_p}$. Так как $\mathfrak{N}_p$ — насыщенная формация, то $Q \not\subseteq \Phi(H)$.

Предположим, что $\omega \cap \pi(Com(Q)) = \varnothing$. Поскольку $H \notin \mathfrak{N}_p$, то $O_p(H) = 1$. По лемме 3 существует точный неприводимый F_pH-модуль P. Пусть $G = [P]H$. Тогда $P = C_G(P) = O_p(G)$ — минимальная нормальная p-подгруппа группы G. По лемме 4, $P = C^p(G)$. Следовательно,

$$G/O_p(G) = G/P \simeq H \in f(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}.$$

По лемме 5 $G \in \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{M} \leq c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form} G \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $H \simeq G/P \in \mathfrak{H}$. Тогда $P = G^{\mathfrak{H}}$. Ввиду леммы 6 и построения группы G, она является монолитической τ-минимальной не $\mathfrak{H}$-группой. Покажем, что $H = Q$ и $|H| = |Q| = q \neq p$. Предположим, что Q — собственная подгруппа группы H. Поскольку $H \simeq G/P \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$, то $H \in \mathfrak{N}$. Значит, в силу монолитичности группы H получаем, что она является примарной. Поэтому H/Q также примарна. Кроме того, $H/Q \in \mathfrak{N}_p$. Значит, H и Q являются p-группами. Противоречие. Следовательно, $H = Q$ и учитывая, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{H})}$ получаем $|H| = |Q| = q \neq p$. В этом случае, согласно лемме 7, $\mathfrak{M}$ — минимальная τ-замкнутая ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$. Пусть теперь $H \simeq G/P \notin \mathfrak{H}$. В этом случае $Q = H^{\mathfrak{H}}$ и H — монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $Q = H^{\mathfrak{H}}$ таким, что выполняется $\pi(Com(Q)) \cap \omega = \varnothing$. Согласно лемме 7, $\mathfrak{M}_1 = c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form} H$ — минимальная τ-замкнутая ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$.

Предположим теперь, что $\pi(Com(Q)) \cap \omega \neq \varnothing$ и пусть $q \in \pi(Com(Q)) \cap \omega$. Тогда Q — абелева q-группа. Если $p \in \pi(Com(Q))$, то $p = q$. Поскольку Q — q-группа, то $Q \in \mathfrak{N}_q$. Кроме того, $H/Q \in \mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_q$. Значит, $H \in \mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_p$. Полученное противоречие показывает, что $p \notin \pi(Com(Q))$. Следовательно, $O_p(H) = 1$. Пусть P — точный неприводимый F_pH-модуль и $G = [P]H$. Тогда $P = C_G(P) = O_p(G)$ минимальная нормальная p-подгруппа группы G. По лемме 4, $P = C^p(G)$. Так как f внутренний спутник, то по лемме 5 $G \in \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{M}_2 = c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form} G \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $G \in \mathfrak{H}$. Тогда $H \simeq G/P = G/C^p(G) \in H(p) = \mathfrak{N}_p$, что противоречит определению группы H. Значит, $G \notin \mathfrak{H}$. Предположим, что $H \notin \mathfrak{H}$, т.е. $H^{\mathfrak{H}} \neq 1$. Поскольку $H/H^{\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$, то $H^{\mathfrak{H}} \subseteq H^{\mathfrak{N}_p}$ и ввиду минимальности группы $Q = H^{\mathfrak{N}_p}$ получаем $H^{\mathfrak{H}} = H^{\mathfrak{N}_p}$. По лемме 8, имеем

$$H/C^p(H) \notin H(p) = \mathfrak{N}_p.$$

Так как Q — не p-группа, то $Q \subseteq C^p(H)$. Таким образом, $C^p(H) \neq 1$ и поэтому $|H/C^p(H)| < |H|$. Так как спутник f внутренний, то $H/C^p(H) \in f(p)$. Значит, $H/C^p(H) \in f(p) \setminus \mathfrak{N}_p$. Полученное противоречие с выбором группы H показывает, что $H \simeq G/P \in \mathfrak{H}$, т.е. $P = G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку $\mathfrak{H}$ насыщена, то $P \not\subseteq \Phi(G)$. Ввиду выбора группа H является монолитической τ-минимальной не $\mathfrak{N}_p$-группой и $Q = H^{\mathfrak{N}_p}$. По лемме 6, G — τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа. Таким образом, G удовлетворяет условию 2 леммы 7 и поэтому $\mathfrak{M}_2$ — минимальная τ-замкнутая ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$.

В случае, когда $p \notin \pi(Com(\mathfrak{H}))$, имеем $H(p) = \varnothing$ и $f(p) \neq \varnothing$. Поскольку $p \in \omega$, то $Z_p \in \mathfrak{F}$ и $c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form} Z_p \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку $p \notin \pi(Com(\mathfrak{H}))$, то

$Z_p \notin \mathfrak{H}$. Поэтому $c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form} Z_p$ является минимальной τ-замкнутой ω-композиционной не $\mathfrak{H}$-подформацией формации $\mathfrak{F}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $a = \omega'$ и $f(\omega') \nsubseteq H(\omega')$. Пусть H — группа минимального порядка из $f(\omega') \setminus H(\omega')$. Поскольку $f(\omega')$ — τ-замкнутая формация, то ввиду выбора группы H всякая собственная τ-подгруппа группы H содержится в $H(\omega')$. Значит, H — монолитическая τ-минимальная не $H(\omega')$-группа. В рассматриваемом случае $H(\omega') = \mathfrak{H}$. Поэтому $H \notin \mathfrak{H}$ и $Q = H^{\mathfrak{H}}$ — цоколь группы H. Поскольку $\mathfrak{H}$ — насыщенная формация, то $Q \nsubseteq \Phi(H)$.

Если $\pi(Com(Q)) \cap \omega = \varnothing$, то ввиду леммы 7 формация $c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form} H$ является минимальной τ-замкнутой ω-композиционной не $\mathfrak{H}$-формацией формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\pi = \pi(Com(Q)) \cap \omega \neq \varnothing$ и $q \in \pi$. В этом случае Q абелева q-группа и $Q = C_H(Q) = O_q(H) = C^q(H)$. По нашему предположению $f(\omega') \nsubseteq H(\omega') = \mathfrak{H}$, а для всех $q \in \omega$ имеем $f(q) \subseteq H(q)$. В противном случае мы получим один из случаев, рассмотренных выше. Следовательно,

$$H/C^q(H) \simeq H/O_q(H) \in f(q) \subseteq H(q) = \mathfrak{N}_q.$$

Так как $q \in \pi(Com(\mathfrak{H}))$, то $H \in \mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что рассматриваемый нами случай невозможен. Лемма доказана.

Лемма 9. [10] *Пусть f_i — минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, где $i \in I$ и $n \geqslant 1$. Тогда $f = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)$ — минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F} = \vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

Лемма 10. [10] *Пусть $\mathfrak{X}$ — такая непустая совокупность групп, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M} \in c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$, $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form}(\mathfrak{X})$ и $\pi = \pi(Com(\mathfrak{X}))$. Тогда $\mathfrak{F}$ имеет минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник f и справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(G/C^p(G) | G \in \mathfrak{X})$, для всех $p \in \pi \cap \omega$;

3) $f(p) = \varnothing$, для всех $p \in \omega \setminus \pi$.

4) Если $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(h)$ и спутник h $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значен, то

$$f(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(A | A \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(A) = 1) \text{ для всех } p \in \pi \cap \omega$$

и $f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(A | A \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_{\omega}(A) = 1)$.

Лемма 11. [2] *Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ справедливо равенство $\tau \operatorname{form}(\mathfrak{X}) = \mathrm{HR_0S_{\tau}}(\mathfrak{X})$.*

Лемма 12. [11] *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация. Тогда $\mathfrak{N}_\omega^n\mathfrak{F} = \underbrace{\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}_\omega\ldots\mathfrak{N}_\omega}_{n\ раз}\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-композиционной формацией.*

Лемма 13. [2] *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная непустая формация и пусть у каждой группы $G \in \mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ не имеет фраттиниевых G-главных факторов. Тогда если A — монолитическая группа из $\mathrm{form}\,\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$, то $A \in \mathbf{H}\mathfrak{X}$.*

Лемма 14. [3] *Пусть N — нормальная подгруппа группы G, A — простая группа. Справедливы следующие утверждения:*

1) если $A \notin \mathcal{K}(N)$, то $C^A(G/N) = C^A(G)/N$;

2) если $N \subseteq \Phi(L)$ для некоторой нормальной разрешимой подгруппы L группы G, то $C^p(G/N) = C^p(G)/N$;

3) если $N \in E\mathfrak{L}$, то $(G/N)_{E\mathfrak{L}} = G_{E\mathfrak{L}}/N$.

Лемма 15. [1, c.81] *Пусть $A \in s\,\mathrm{form}\,G$, где G — конечная группа. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) экспонента группы A не превосходит экспоненту группы G;

2) каждый главный фактор группы A изоморфен некоторому главному фактору группы G.

3) каждый композиционный фактор группы A изоморфен некоторому композиционному фактору группы G.

4) ступень любого нильпотентного фактора группы A не превосходит наибольшую из ступеней нильпотентных факторов группы G.

Лемма 16. [3] *Если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ и $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$ для некоторого простого числа $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 17. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая непустая нильпотентная насыщенная формация, $\Omega = \{\mathfrak{K}_i \mid i \in I\}$ — некоторый набор минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-формаций и $\mathfrak{M}$ — τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация из $\mathfrak{H}$. Тогда, если $\mathfrak{K}$ — некоторая минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация из $\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_n} (\vee^\tau_{\omega_n} \mathfrak{K}_i \mid i \in I)$, то $\mathfrak{K} \in \Omega$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_n} (\vee^\tau_{\omega_n} \mathfrak{K}_i \mid i \in I)$ и f, m — минимальные $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значные ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ соответственно, и для каждого $i \in I$ пусть k_i — минимальный $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{K}_i$.

По лемме 9 получаем

$$f(a) = c^\tau_{\omega_{n-1}}\,\mathrm{form}(m(a) \bigcup c^\tau_{\omega_{n-1}}\,\mathrm{form}(\bigcup_{i \in I} k_i(a))) =$$

$$= c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(m(a) \bigcup (\bigcup_{i \in I} k_i(a)))$$

для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Ввиду леммы 1 имеем

$$m(a) = \begin{cases} (1), \text{ если } a = p \in \pi(Com(\mathfrak{M})) \cap \omega; \\ \mathfrak{M}_{\omega'}, \text{ если } a = \omega'; \\ \varnothing, \text{ если } a = q \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{M})). \end{cases}$$

Используя последнее, получаем

$$f(a) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}((1) \cup (\bigcup_{i \in I} k_i(a))) \text{ если } a \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{M})),$$

$$f(a) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\varnothing \cup (\bigcup_{i \in I} k_i(a))) \text{ если } a \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{M}))$$

и

$$f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\mathfrak{M}_{\omega'} \cup (\bigcup_{i \in I} k_i(\omega'))).$$

Так как $\mathfrak{K}$ — минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация, то по лемме 7 имеем $\mathfrak{H} = c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form} K$, где K — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = K^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi = \pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

1) K — группа простого порядка $p \notin \pi(Com(\mathfrak{H}))$;

2) $K = [P]Q$, $P = C_K(P)$ — абелева p-группа, $p \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{H}))$ и $|Q| = q \neq p$, p и q — простые числа.

Аналогично, поскольку для каждого $i \in I$ формация $\mathfrak{K}_i$ является минимальной τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной не $\mathfrak{H}$-формацией, то по лемме 7 получаем $\mathfrak{K}_i = c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form} K_i$, где K_i — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P_i = K_i^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi_i = \pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi_i \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

а) K_i — группа простого порядка $p_i \notin \pi(Com(\mathfrak{H}))$;

б) $K_i = [P_i]Q_i$, $P_i = C_{K_i}(P_i)$ — абелева p_i-группа, $p_i \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{H}))$ и $|Q_i| = q_i \neq p_i$, p_i и q_i — простые числа.

Введем обозначения

$$\begin{array}{ll} I_1 = \{i \in I \mid \pi_i \neq \varnothing \text{ и выполняется б)}\}, & \mathfrak{X}_1 = \{H_i/R_\omega(H_i) \mid i \in I_1\}, \\ I_2 = \{i \in I \mid \pi_i = \varnothing\}, & \mathfrak{X}_2 = \{H_i \mid i \in I_2\} \\ I_3 = \{i \in I \mid \pi_i \neq \varnothing \text{ и выполняется а)}\}, & \mathfrak{X}_1^* = \mathfrak{M}_{\omega'} \cup \mathfrak{X}_1. \end{array}$$

Пусть для группы K имеет место $\pi = \varnothing$. Тогда $R_\omega(K) = 1$. Поскольку $K \in \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{F}$, то используя леммы 10 и 11 получаем

$$K \simeq K/R_\omega(K) \in f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\mathfrak{M}_{\omega'} \cup (\bigcup_{i\in I} h_i(\omega'))) =$$

$$= c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\mathfrak{M}_{\omega'} \cup (\bigcup_{i\in I_1} k_i(\omega')) \cup (\bigcup_{i\in I_2} k_i(\omega'))) \cup (\bigcup_{i\in I_3} k_i(\omega'))) =$$

$$= c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\mathfrak{M}_{\omega'} \cup \{K_i/R_\omega(K_i) \mid i \in I_1\} \cup \{K_i \mid i \in I_2\} \cup (1)) =$$

$$= c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\mathfrak{M}_{\omega'} \cup \mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2 \cup (1)) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\mathfrak{X}_1^* \cup \mathfrak{X}_2 \cup (1)) =$$

$$= c^{\omega}_{n-1} \operatorname{form}(S_\tau(\mathfrak{X}_1^* \cup \mathfrak{X}_2 \cup (1))) = c^{\omega}_{n-1} \operatorname{form}(S_\tau(\mathfrak{X}_1^*) \cup S_\tau(\mathfrak{X}_2) \cup (1)) =$$

$$= c^{\omega}_{n-1} \operatorname{form}(\mathfrak{X}_1^* \cup \overline{\mathfrak{X}_1^*} \cup \mathfrak{X}_2 \cup \overline{\mathfrak{X}}_2 \cup (1)),$$

где $\overline{\mathfrak{X}_1^*} = S_\tau(\mathfrak{X}_1^*) \setminus \mathfrak{X}_1^*$ и $\overline{\mathfrak{X}}_2 = S_\tau(\mathfrak{X}_2) \setminus \mathfrak{X}_2$. Обозначим через $\mathfrak{X}_1^{**} = \mathfrak{X}_1^* \cup$ $\cup\, \overline{\mathfrak{X}_1^*} \cup \overline{\mathfrak{X}}_2 \cup (1)$. Тогда в силу леммы 12 получаем

$$K \in c^{\omega}_{n-1} \operatorname{form}(\mathfrak{X}_1^{**} \cup \mathfrak{X}_2) \subseteq \mathfrak{N}_\omega^{n-1} \operatorname{form}(\mathfrak{X}_1^{**} \cup \mathfrak{X}_2).$$

Последнее означает, что $K^{\operatorname{form}(\mathfrak{X}_1^{**} \cup \mathfrak{X}_2)} \in \mathfrak{N}_\omega^{n-1}$. Предположим, что $K^{\operatorname{form}(\mathfrak{X}_1^{**} \cup \mathfrak{X}_2)} \neq 1$. Тогда

$$P = K^{\mathfrak{H}} \subseteq K^{\operatorname{form}(\mathfrak{X}_1^{**} \cup \mathfrak{X}_2)} \in \mathfrak{N}_\omega^{n-1}.$$

Значит, $P \in \mathfrak{N}_\omega^{n-1}$, т. е. P является ω-группой. Но в рассматриваемом случае $\pi = \varnothing$. Противоречие. Следовательно, $K^{\operatorname{form}(\mathfrak{X}_1^{**} \cup \mathfrak{X}_2)} = 1$. Тогда $K \in \operatorname{form}(\mathfrak{X}_1^{**} \cup \mathfrak{X}_2)$. Кроме того $K \notin \mathfrak{H}$. Итак, $K \in \operatorname{form}(\mathfrak{X}_1^{**} \cup \mathfrak{X}_2) \setminus \mathfrak{H}$.

Покажем, что у каждой группы T из $\mathfrak{X}_1^{**} \cup \mathfrak{X}_2$ $\mathfrak{H}$-корадикал $T^{\mathfrak{H}}$ не имеет фраттиниевых T-главных факторов. Покажем прежде, что $\mathfrak{X}_1^{**} \subseteq$ $\subseteq \mathfrak{H}$. Действительно, если $A \in \mathfrak{X}_1$, то для некоторого $i \in I_1$ имеем $A =$ $= K_i/R_\omega(K_i)$. Так как для данного i имеем $\pi_i \neq \varnothing$, то в этом случае $K_i =$ $= [P_i]Q_i$ и $K_i/P_i \simeq Q_i \in \mathfrak{H}$, где $p_i \in \omega$. Поскольку $p_i \in \omega$, то $P_i \subseteq R_\omega(K_i)$. Значит, $A = K_i/R_\omega(K_i) \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Учитывая, что формация $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}$ также содержится в $\mathfrak{H}$ получаем $\mathfrak{X}_1^* \subseteq \mathfrak{H}$. Кроме того, понятно что $\overline{\mathfrak{X}_1^*} \subseteq \mathfrak{H}$, $\overline{\mathfrak{X}}_2 \subseteq \mathfrak{H}$ и $(1) \subseteq \mathfrak{H}$. Итак, $\mathfrak{X}_1^{**} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, если $T \in \mathfrak{X}_1^{**}$, то $T^{\mathfrak{H}} = 1$.

Напомним, что K_i — монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с цоколем $P_i = K_i^{\mathfrak{H}} \not\subseteq \Phi(K_i)$. Теперь, если $T \in \mathfrak{X}_2$, то для некоторого $i \in I_2$ имеем $T = K_i$ и $T^{\mathfrak{H}} = K_i^{\mathfrak{H}} \not\subseteq \Phi(K_i)$.

Итак, $K \in \operatorname{form}(\mathfrak{X}_1^{**} \cup \mathfrak{X}_2) \setminus \mathfrak{H}$ и у каждой группы T из $\mathfrak{X}_1^{**} \cup \mathfrak{X}_2$ $\mathfrak{H}$-корадикал $T^{\mathfrak{H}}$ не имеет фраттиниевых T-главных факторов. Тогда по лемме 13 группа K является гомоморфным образом некоторой группы

G из $\mathfrak{X}_1^{**} \cup \mathfrak{X}_2$. Поскольку $K \notin \mathfrak{H}$, то $G \notin \mathfrak{X}_1^{**}$. Значит, K гомоморфный образ некоторой группы G из $\mathfrak{X}_2$. Тогда $G = K_i$ для некоторого $i \in \in I_2$ и $K \simeq K_i/N$, для некоторой нормальной подгруппы N группы K_i. Пусть $N \neq 1$. Тогда поскольку $P_i \subseteq N$ и $K_i/P_i \in \mathfrak{H}$, то $K \simeq K_i/N \in \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $N = 1$ и $K \simeq K_i$. Таким образом, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_i \in \Omega$.

Предположим, что $\pi \neq \varnothing$ и выполняется условие 1). Тогда K — группа простого порядка $p \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{H}))$. Понятно, что $K = C^p(K)$. Предположим, что $p \notin \pi(Com(\mathfrak{K}_i))$. Тогда $k_i(p) = \varnothing$ и по лемме 10, имеем

$$1 \simeq K/C^p(K) \in f(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\varnothing \cup (\bigcup_{i \in I} k_i(p))) =$$

$$= c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\varnothing \cup (\bigcup_{i \in I} \varnothing)) = \varnothing.$$

Противоречие. Следовательно, $p \in \pi(Com(\mathfrak{K}_i))$.

Пусть для группы K_i выполняется $\pi_i = \varnothing$. Тогда $p \notin \pi(Com(P_i))$ и ввиду леммы 14 имеем $C^p(K_i/P_i) = C^p(K_i)/P_i$. Поскольку $K_i/P_i \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}$ — ω-композиционная формация, то получаем

$$K_i/C^p(K_i) \simeq (K_i/P_i)/(C^p(K_i)/P_i) = (K_i/P_i)/C^p(K_i/P_i) \in h(p),$$

где h — минимальный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{H}$. Но в рассматриваемом случае $p \notin \pi(Com(\mathfrak{H}))$, поэтому из леммы 1 получаем $h(p) = \varnothing$. Получили противоречие. Значит, случай $\pi_i = \varnothing$ для группы K_i невозможен.

Пусть для группы K_i выполняется $\pi_i \neq \varnothing$ и условие а). Тогда $p = p_i$ и

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_{p_i} = \mathfrak{K}_i \in \Omega.$$

Пусть для группы K_i выполняется $\pi_i \neq \varnothing$ и условие б). Тогда $\mathfrak{K} = = \mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{K}_i$. Поскольку формация $\mathfrak{K}_i$ является минимальной τ-замкнутой ω-композиционной не $\mathfrak{H}$-формацией, то $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Значит, этот случай для группы K_i невозможен.

Предположим теперь, что $\pi \neq \varnothing$ и выполняется условие 2). Понятно, что $P = C^p(K)$, где $p \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{H}))$. По лемме 10, имеем

$$Q \simeq K/P = K/C^p(K) \in f(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}((1) \cup (\bigcup_{i \in I} k_i(p))) =$$

$$= c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}((1) \cup (\bigcup_{i \in I_1} k_i(p)) \cup (\bigcup_{i \in I_2} k_i(p)) \cup (\bigcup_{i \in I_3} k_i(p))).$$

Пусть $i \in I_3$. Тогда $p_i \in \pi_i \neq \varnothing$ и K_i — группа простого порядка $p_i \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{H}))$. Поскольку $p \in \pi(Com(\mathfrak{H}))$, а $p_i \notin \pi(Com(\mathfrak{H}))$, то $p \neq p_i$. Значит, $p \notin \pi(Com(P_i)) = \pi(Com(K_i)) = \pi(Com(\mathfrak{K}_i))$, и поэтому, $k_i(p) = \varnothing$.

Пусть $i \in I_2$. Тогда $\pi_i = \varnothing$ и из леммы 10 получаем

$$k_i(p) = \begin{cases} c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(K_i/C^p(K_i)), & \text{если } p \in \pi(Com(K_i)) \cap \pi, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \pi \setminus \pi(Com(K_i)). \end{cases}$$

Так как в этом случае $p \notin \pi(Com(P_i))$, то по лемме 14 имеем $C^p(K_i/P_i) = C^p(K_i)/P_i$. Тогда, учитывая что $K_i/P_i \in \mathfrak{H}$ и то что $\mathfrak{H}$ — ω-композиционная формация получаем

$$K_i/C^p(K_i) \simeq (K_i/P_i)/(C^p(K_i)/P_i) = (K_i/P_i)/C^p(K_i/P_i) \in k(p) = (1).$$

Тогда $K_i/C^p(K_i) = 1$, поэтому $K_i = C^p(K_i)$. Следовательно,

$$k_i(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(K_i/C^p(K_i)) = (1),$$

где $p \in \pi(Com(K_i))$. Таким образом, если $i \in I_2$, то $k_i(p) \subseteq (1)$.

Пусть теперь $i \in I_1$. Тогда $p_i \in \pi_i \neq \varnothing$ и $K_i = [P_i]Q_i$, где P_i — абелева p_i-группа, $p_i \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{H}))$, $|Q_i| = q_i$ и $q_i \neq p_i$. Ясно, что $P_i = C^{p_i}(K_i)$. Значит, ввиду леммы 10, имеем

$$k_i(p) = \begin{cases} c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form} Q_i, & \text{если } p = p_i, \\ c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(K_i/C^p(K_i)), & \text{если } p \in (\pi(Com(K_i)) \cap \pi) \text{ и } p \neq p_i, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \omega \setminus \pi(Com(K_i)). \end{cases}$$

Рассмотрим подробнее случай, когда $p \in (\pi(Com(K_i)) \cap \pi)$ и $p \neq p_i$. Если $C^p(K_i) \subseteq P_i$, то учитывая, что $O_p(K_i) \subseteq C^p(K_i)$ получаем $O_p(K_i) \subseteq P_i$, т.е. $O_p(K_i)$ — p_i-группа. Противоречие. Значит, $P_i \subseteq C^p(K_i)$. Так как $K_i/P_i = K_i/C^{p_i}(K_i) \in k_i(p_i)$, то $K_i/C^p(K_i) \in k_i(p_i) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(K_i/C^{p_i}(K_i)) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form} Q_i$. Следовательно, для любого $i \in I_1$ получаем $k_i(p) \subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form} Q_i$. Итак,

$$Q \in c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}((1) \cup (\bigcup_{i \in I_1} k_i(p)) \cup (\bigcup_{i \in I_2} k_i(p)) \cup (\bigcup_{i \in I_3} k_i(p))) \subseteq$$

$$\subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}((1) \cup (\bigcup_{i \in I_1} c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form} Q_i) \cup (\bigcup_{i \in I_2} (1)) \cup (\bigcup_{i \in I_3} \varnothing)) =$$

$$= c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}((1) \cup \{Q_i \mid i \in I_1\}) = s\operatorname{form}((1) \cup \{Q_i \mid i \in I_1\}).$$

Теперь поскольку группа Q простая, то по лемме 15 получаем, что Q изоморфна некоторому главному фактору некоторой группы G из $(1) \cup \{Q_i \mid i \in I_1\}$. Так как $Q \neq 1$ и Q_i — простая, то для некоторого $i \in I_1$

имеем $Q \simeq Q_i$. Поскольку минимальный спутник является внутренним, то $K/O_p(K) = K/P \simeq Q \simeq Q_i \in k_i(p) \subseteq \mathfrak{K}_i$. По лемме 16 из последнего вытекает $K \in \mathfrak{K}_i$ для некоторого $i \in I_1$. Значит, $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}_i$. Если $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_i$, то поскольку $\mathfrak{K}_i$ — минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация, то $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_i \in \Omega$. Теорема доказана.

Следующая лемма доказываются аналогично лемме 5.2.8 из монографии [2].

Лемма 18. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ — τ-замкнутые n-кратно ω-композиционные формации, причем $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{X}$. Тогда если m, r и t соответственно $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-дефекты формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ и m, $r < \infty$, то $t \leqslant m + r$.*

Лемма 19. [10] *Для любого целого неотрицательного n решетка $c^{\tau}_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций модулярна.*

Лемма 20. [4] *Пусть A — модулярная решетка. Тогда отображение $\varphi : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b]$, где $x \to x \wedge b$, является изоморфизмом.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация, $\mathfrak{H}$ — некоторая непустая нильпотентная насыщенная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. В том и только в том случае $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ — минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация, при этом:*

1) если τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{H}$, то она содержится в формации $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H})$;

2) если τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ не входит в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}_1$ имеет вид $\mathfrak{K} \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Поскольку $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то по теореме 1 в формации $\mathfrak{F}$ имеется минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация $\mathfrak{K}$. Тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — максимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная, входящая в $\mathfrak{H}$ подформация в $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ — минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация. Понятно, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-дефекты формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{K}$ равны соответственно t, m и r. Поскольку $\mathfrak{M}$ — τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация из $\mathfrak{H}$, то $m = 0$. Так как $\mathfrak{H}$ — минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация, то ее $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-дефект r равен 1. В силу леммы 18 для $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-дефекта формации $\mathfrak{F}$ имеет место неравенство

$t \leqslant m + r = 0 + 1 = 1$. Если $t = 0$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, что противоречит условию $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1.

Докажем теперь справедливость утверждений второй части теоремы. Поскольку $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}$, то по лемме 17 в $\mathfrak{F}$ нет минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-формаций отличных от $\mathfrak{K}$. Так как $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}$ — максимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная подформация в $\mathfrak{K}$, то ввиду лемм 19 и 20 имеем

$$(\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H})) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K} /^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H})) \simeq$$

$$\simeq \mathfrak{K} /^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{K} \cap (\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}))) = \mathfrak{K} /^{\tau}_{\omega_n} ((\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}) \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H})) = \mathfrak{K} /^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}.$$

Следовательно, $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H})$ — максимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная подформация в $\mathfrak{F}$. Тогда, поскольку $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то всякая τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная, входящая в $\mathfrak{H}$ подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H})$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ — произвольная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$. Тогда ввиду теоремы 1 в $\mathfrak{F}_1$ имеется минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация. Но по лемме 17 в $\mathfrak{F}$ нет минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-формаций отличных от $\mathfrak{K}$. Значит, $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, ввиду леммы 19 получаем

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}) =$$

$$\mathfrak{K} \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M}) = \mathfrak{K} \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{K} \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H}).$$

Теорема доказана.

Лемма 21. *Если $\mathfrak{F}$ — однопорожденная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация ($n \geqslant 0$), то в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество разрешимых и наследственных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных подформаций.*

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 2.1.6 из [2].

Лемма 22. *Пусть A — монолитическая группа с неабелевым монолитом, $\mathfrak{M}$ — некоторая полуформация и $A \in c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form} \mathfrak{M}$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$.*

Лемма 23. [12] *Пусть G — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) G — разрешимая бипримарная группа;

2) $G^{\mathfrak{N}}$ является силовской q-подгруппой в G, q — простое число;

3) $G/G^{\mathfrak{N}}$ — циклическая p-группа, p — простое число;

4) $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ — главный фактор гр. G, причем если $|G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})| = q^b$, то $q^b \equiv 1 (mod\ p)$ и b есть показатель числа q по модулю p;

5) Если $P = \langle a \rangle$ — силовская p-подгруппа из G, то $a^p \in Z(G)$;

6) Если $G^{\mathfrak{N}}$ абелева, то $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — однопорожденная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация, $\mathfrak{H}$ — некоторая непустая нильпотентная насыщенная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ $(n \geqslant 1)$. Тогда в $\mathfrak{F}$ содержится лишь конечное множество τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных подформаций с $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-дефектом 1.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form} G$ для некоторой группы G, не содержащейся в $\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 21 формация $\mathfrak{F}$ содержит лишь конечное множество разрешимых τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных подформаций. Тогда в $\mathfrak{F}$ содержится конечное множество τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных подформаций, содержащихся в $\mathfrak{H}$.

Ввиду леммы 7 каждая минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация $\mathfrak{K}$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{K} = c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form} K$, где K — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = K^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi = \pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

1) K — группа простого порядка $p \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{H}))$;

2) $K = [P]Q$, $P = C_K(P)$ — абелева p-группа, $p \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{H}))$ и $|Q| = q$, где p и q — различные простые числа.

Пусть f — минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда из леммы 10 имеем

$$f(a) = \begin{cases} c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(G/C^p(G)), \text{ если } a = p \in \pi(Com(G)) \cap \omega; \\ c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(G/R_{\omega}(G)), \text{ если } a = \omega'; \\ \varnothing, \text{ если } a = q \in \omega \setminus \pi(Com(G)). \end{cases}$$

Пусть $\pi = \varnothing$. Тогда $R_{\omega}(K) = 1$. Следовательно,

$$K \simeq K/R_{\omega}(K) \in f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(G/R_{\omega}(G)) =$$
$$= c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\mathrm{H}(G/R_{\omega}(G))).$$

Если P — неабелева подгруппа группы K, то по лемме 22 получаем, что K изоморфна некоторому гомоморфному образу группы $G/R_{\omega}(G)$. Поскольку G — конечная группа, то $G/R_{\omega}(G)$ конечна. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций вида $c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form} K$, где K — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = K^{\mathfrak{H}}$, что $\pi = \varnothing$ и P — неабелева группа.

Пусть $\pi = \varnothing$ и P — абелева группа. Так как $K/P \leq K/K^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}$, то K — разрешимая группа. Значит, по лемме 21 в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций вида $c^{\tau}_{\omega_n}\operatorname{form} K$, где K — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = K^{\mathfrak{H}}$, что $\pi = \varnothing$ и P — абелева группа. Следовательно, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций вида $c^{\tau}_{\omega_n}\operatorname{form} K$, где где K — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = K^{\mathfrak{H}}$, что выполняется условие $\pi = \varnothing$.

Пусть теперь $\pi \neq \varnothing$ и выполняется условие 1). Поскольку $K \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{S}$ получаем, что K разрешима. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций вида $c^{\tau}_{\omega_n}\operatorname{form} K$, где K — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = K^{\mathfrak{H}}$, что $\pi \neq \varnothing$ и выполняется условие 1).

Пусть теперь $\pi \neq \varnothing$ и выполняется условие 2). Тогда ввиду леммы 23 получаем, что K разрешима. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций вида $c^{\tau}_{\omega_n}\operatorname{form} K$, где K — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = K^{\mathfrak{H}}$, что $\pi \neq \varnothing$ и выполняется условие 2).

Таким образом, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ — произвольная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная несодержащаяся в $\mathfrak{H}$ подформация из $\mathfrak{F}$ с $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-дефектом 1. По теореме 2, имеем $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация содержащаяся в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ — минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация. Значит, из доказанного выше следует, что в $\mathfrak{F}$ содержится лишь конечное множество τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных подформаций с $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-дефектом 1. Теорема доказана.

Лемма 24. *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация, $\mathfrak{H}$ — некоторая непустая нильпотентная насыщенная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ ($n \geqslant 1$). Тогда и только тогда $\mathfrak{M}$ — атом решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$, когда $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{K}$ — некоторая минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{M}$ — атом решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Тогда длина решетки $\mathfrak{M}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ равна 1. Значит, $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$

максимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{M}$, содержащаяся в $\mathfrak{H}$. Применяя теорему 2, имеем $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{K}$ — некоторая минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$.

Достаточность. Предположим противное, т.е. пусть найдется такая τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация $\mathfrak{R}$, что

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}.$$

Поскольку $\mathfrak{R}$ не содержится в $\mathfrak{H}$, то по теореме 1 получаем, что формация $\mathfrak{R}$ имеет минимальную τ-замкнутую n-кратно ω-композиционную не $\mathfrak{H}$-подформацию $\mathfrak{K}_1$. Тогда $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}$. Следовательно, по лемме 17 получаем $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}$. Значит,

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{R}.$$

Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M}$ — атом решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Лемма 25. [4, с.27] *Подрешетка модулярной решетки модулярна.*

Лемма 26. [4, с.31] *Любая модулярная решетка M с дополнениями является решеткой с относительными дополнениями.*

Лемма 27. [13] *Любая модулярная решетка L с дополнениями, имеющая конечное число атомов, является решеткой конечной длины.*

Лемма 28. [4, с.32] *В решетке L конечной длины с относительными дополнениями каждый элемент a является объединением содержащихся в нем атомов.*

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — однопорожденная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация, $\mathfrak{H}$ — некоторая непустая нильпотентная насыщенная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ $(n \geqslant 1)$. Тогда если $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — решетка с дополнениями, то каждый элемент $\mathfrak{M}$ решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ представим в виде*

$$\mathfrak{M} = \vee^{\tau}_{\omega_n}((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}_i \mid i \in I),$$

где $\{\mathfrak{K}_i \mid i \in I\}$ — набор всех минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-формаций, содержащихся в $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Ввиду леммы 19 решетка всех ω-композиционных формаций модулярна, значит, по лемме 25 решетка $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$

как подрешетка модулярной решетки, также модулярна. По лемме 26 решетка $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ является модулярной решеткой с относительными дополнениями. Используя теорему 3 и лемму 24 получаем, что решетка $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ имеет конечное число атомов. Значит, по лемме 27 решетка имеет конечную длину.

Пусть $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ — множество всех атомов решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Тогда ввиду леммы 24, для каждого $i \in I$ имеем $\mathfrak{M}_i = (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}_i$, где $\mathfrak{K}_i$ — некоторая минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация. Теперь, используя лемму 28, получаем, что каждый элемент $\mathfrak{M}$ решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ представим в виде

$$\mathfrak{M} = \vee^{\tau}_{\omega_n}((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}_i \mid i \in I),$$

где $\{\mathfrak{K}_i \mid i \in I\}$ — набор всех минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-формаций, содержащихся в $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Лемма 29. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая непустая нильпотентная насыщенная формация, $\mathfrak{F}$ — некоторая τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация ($n \geqslant 1$), $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ и*

$$\Omega = \{\mathfrak{F}_i \mid \mathfrak{F}\cap\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F},\ i \in I\}$$

— некоторый набор несодержащихся в $\mathfrak{H}$ τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных подформаций $\mathfrak{F}_i$ из $\mathfrak{F}$, у которых $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ — максимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная подформация. Кроме того, пусть

$$\mathfrak{R} = c^{\tau}_{\omega_n}\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i),$$

где $\mathfrak{F}_i \in \Omega$. Тогда, если $\mathfrak{M}$ — произвольная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная подформация из $\mathfrak{R}$ с максимальной подформацией $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M} \in \Omega$.

Доказательство. По теореме 2 для каждого $i \in I$ формация $\mathfrak{F}_i \in \Omega$ имеет вид $\mathfrak{F}_i = (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}_i$, где $\mathfrak{K}_i$ — некоторая минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация. Следовательно, формация $\mathfrak{R}$ имеет вид

$$\mathfrak{R} = c^{\tau}_{\omega_n}\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) = c^{\tau}_{\omega_n}\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}_i)) =$$

$$= c^{\tau}_{\omega_n}\,\mathrm{form}((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \cup (\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_i \mid i \in I)) = (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} (\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_i \mid i \in I).$$

Ввиду теоремы 2 формация $\mathfrak{M}$ имеет вид $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{K}$ — минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация.

Следовательно, по лемме 17 имеет место $\mathfrak{K} \in \{\mathfrak{K}_i \mid i \in I\}$, т.е. $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_i$ для некоторого $i \in I$. Значит,

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K} \in \{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}_i \mid i \in I\} = \Omega.$$

Лемма доказана.

Лемма 30. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая непустая нильпотентная насыщенная формация, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутые n-кратно ω-композиционные формации ($n \geqslant 1$), причем $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}_1$ в решетке $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ дополнение к $\mathfrak{M}_1$ в решетке $\mathfrak{M}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$.*

Доказательство. По условию $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Значит, ввиду лемм 19 и 25 имеем

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{M}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H}) = \mathfrak{M}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}).$$

Покажем, что $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Действительно,

$$(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}.$$

Итак, получили, что $\mathfrak{M}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1 \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Это означает, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ дополнение к $\mathfrak{M}_1$ в решетке $\mathfrak{M}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Лемма 31. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая непустая нильпотентная насыщенная формация, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ — такие τ-замкнутые n-кратно ω-композиционные формации, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ ($n \geqslant 1$). Тогда, если $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — решетка с дополнениями, то $\mathfrak{M}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ также является решеткой с дополнениями.*

Доказательство. Ввиду лемм 19 и 25 решетка $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ модулярна. По лемме 20 имеет место решеточный изоморфизм

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{M})/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \simeq \mathfrak{M}/^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{M}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}.$$

Но $((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{M})/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — подрешетка решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Значит, из леммы 30 получаем, что $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{M})/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — решетка с дополнениями. Следовательно, $\mathfrak{M}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ также является решеткой с дополнениями. Лемма доказана.

Лемма 32. [14, с.50] *Следующие равенства истинны на произвольной решетке:*

1) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leqslant x \wedge (y \vee z)$;

2) $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;

3) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leqslant (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$;

4) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leqslant x \wedge (y \vee (x \wedge z))$.

1)-3) называются неравенствами дистрибутивности, 4) — неравенством модулярности.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая непустая нильпотентная насыщенная формация, $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ ($n \geqslant 1$). Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ *— решетка с дополнениями;*

2) $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n}(\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_i \mid i \in I)$, *где* $\{\mathfrak{K}_i \mid i \in I\}$ *— множество всех минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций из $\mathfrak{F}$.*

3) $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ *— булева решетка.*

Доказательство. Проведем доказательство теоремы по следующей схеме: 2) $\Leftrightarrow$ 1) $\Leftrightarrow$ 3). Предположим, что выполняется утверждение 1). Покажем, что выполняется утверждение 2). Пусть $\mathfrak{M}$ произвольная однопорожденная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$. По лемме 31 решетка $\mathfrak{M}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ является решеткой с дополнениями.

По теореме 4 имеем

$$\mathfrak{M} = \vee^{\tau}_{\omega_n}((\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_i \mid i \in I) = (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n}(\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_j \mid j \in J),$$

где $\{\mathfrak{K}_j \mid j \in J \subseteq I\}$ — набор всех минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-формаций, содержащихся в $\mathfrak{M}$. Очевидно, что любая τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация есть объединение (в решетке $c^{\tau}_{\omega_n}$) своих однопорожденных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных подформаций. Тогда

$$\mathfrak{F} = \vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{M}_i \mid i \in I) = \vee^{\tau}_{\omega_n}(((\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n}(\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_j \mid j \in J_i)) \mid i \in I) =$$

$$= \vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H} \mid i \in I) \vee^{\tau}_{\omega_n}(\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_i \mid i \in I) = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n}(\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_i \mid i \in I),$$

т.е. выполняется утверждение 2).

Предположим теперь, что выполняется утверждение 2). Покажем, что выполняется утверждение 1). Пусть $\psi = \{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — множество всех минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций из $\mathfrak{F}$. Покажем, что каждый элемент решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \cap \mathfrak{H}$ представим в виде объединения атомов, содержащихся в нем. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация из решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{R}_1$ — τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация порожденная множеством ψ_1 — всех минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций, содержащихся в $\mathfrak{M}$, а $\mathfrak{R}_2$ — τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация порожденная множеством ψ_2, где ψ_2 — дополнение к ψ_1 в ψ. Ввиду модулярности решетки $c^{\tau}_{\omega_n}$ имеют место равенства:

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\cap((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})\vee^{\tau}_{\omega_n}(\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_i\mid i\in I))=$$

$$=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})\vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{M}\cap(\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_i\mid i\in I))=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})\vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{M}\cap(\mathfrak{R}_1\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{R}_2))=$$
$$=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{R}_1\vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{R}_2).$$

Допустим, что $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{R}_2\not\subseteq\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Тогда по теореме 1 в $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{R}_2$ имеется минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация $\mathfrak{H}_i$ для некоторого $i\in I$. Следовательно, по лемме 17 получаем $\mathfrak{H}_i\in\psi_1\cap\cap\psi_2=\varnothing$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{R}_2\subseteq\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Таким образом,

$$\mathfrak{M}=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{R}_1=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})\vee^{\tau}_{\omega_n}(\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_i\mid\mathfrak{K}_i\in\psi_1)=$$
$$=\vee^{\tau}_{\omega_n}((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_i\mid\mathfrak{K}_i\in\psi_1).$$

Ввиду леммы 24 и произвольности выбора формации $\mathfrak{M}$ получаем, что каждый элемент решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ представим в виде объединения атомов, содержащихся в нем.

Покажем теперь, что в решетке $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ дополняема каждая τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация из $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\cap\mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{M}=\mathfrak{F}$, то дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ является формация $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Итак, можно считать, что $\mathfrak{M}\neq\mathfrak{F}$. Обозначим через Σ множество всех атомов решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$, а через Ω_1 — множество всех атомов решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$, содержащихся в $\mathfrak{M}$. Тогда $\Sigma\neq\Omega_1$, иначе ввиду доказанного выше,

$$\mathfrak{M}=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})\vee^{\tau}_{\omega_n}(\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_i\mid i\in I)=\mathfrak{F}.$$

Пусть Ω_2 — дополнение к Ω_1 в Σ и $\mathfrak{H}=c^{\tau}_{\omega_n}\operatorname{form}(\Omega_2)$. Докажем, что $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Так как по условию

$$\mathfrak{F}=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})\vee^{\tau}_{\omega_n}(\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}_i\mid i\in I),$$

то ввиду леммы 24 имеет место равенство $\mathfrak{M}=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{K}$, где $\mathfrak{K}$ — некоторая минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{R}=\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ являются элементами решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{R}$.

Допустим, что $\mathfrak{R} \not\subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Тогда по теореме 1 в $\mathfrak{R}$ имеется минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация $\mathfrak{K}_i$ для некоторого $i \in I$. Следовательно, $\mathfrak{R}$ содержит формацию $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}_i$. По теореме 2 формация $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}_i$ содержит максимальную τ-замкнутую n-кратно ω-композиционную подформацию, содержащуюся в $\mathfrak{H}$. Применяя лемму 24 и результат полученный в предыдущем абзаце, имеем $(\mathfrak{F} \cap \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}_i \in \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Таким образом, формация $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Значит, решетка $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — решетка с дополнениями.

Предположим, что выполняется утверждение 3). Тогда утверждение 1) будет выполнятся по определению булевой решетки.

Предположим, что выполняется утверждение 1). Покажем, что выполняется утверждение 3). Для этого достаточно показать, что для любых элементов $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ выполняется равенсто:

$$\mathfrak{M}_1 \cap (\mathfrak{M}_2 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{M}_3) = (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2) \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3). \qquad (*)$$

По лемме 32 на любой решетке выполняется неравенство дистрибутивности:

$$(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2) \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3) \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap (\mathfrak{M}_2 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{M}_3).$$

Обозначим через

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{M}_1 \cap (\mathfrak{M}_2 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{M}_3)$$

и

$$\mathfrak{Y} = (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2) \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3).$$

Покажем, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$. Поскольку $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ решетка с дополнениями, то ввиду леммы 31 у каждой формации $\mathfrak{M}$ из решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, решетка $\mathfrak{M}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ является решеткой с дополнениями. Из доказанного 1) влечет 2) это означает, что

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} (\vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{K}_i \mid i \in I), \qquad (**)$$

где $\{\mathfrak{K}_i \mid i \in I\}$ — множество всех минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций из $\mathfrak{M}$. Поскольку формации $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ являются элементами решетки $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, то для них также верно представление $(**)$. Поэтому для доказательства необходимого включения достаточно показать, что каждая минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{X}$ содержится в $\mathfrak{Y}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная минимальная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{X}$. Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{Y}$.

Пусть ψ_j — набор всех минимальных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-подформаций из $\mathfrak{M}_j$, $j = 1, 2, 3$. Понятно, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1$. Из представления (**) для $\mathfrak{M}_1$ получаем, что $\mathfrak{H} \in \psi_1$. Кроме того, имеем

$$\mathfrak{H} \subseteq \Big((\mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \Big(c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form}\Big(\bigcup_{\mathfrak{K}_i \in \psi_2} \mathfrak{K}_i\Big)\Big)\Big) \vee^{\tau}_{\omega_n}$$

$$\vee^{\tau}_{\omega_n} \Big((\mathfrak{M}_3 \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \Big(c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form}\Big(\bigcup_{\mathfrak{K}_i \in \psi_3} \mathfrak{K}_i\Big)\Big)\Big)$$

$$= ((\mathfrak{M}_2 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{M}_3) \cap \mathfrak{H}) \vee^{\tau}_{\omega_n} \Big(c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form}\Big(\bigcup_{\mathfrak{K}_i \in \psi_2 \cup \psi_3} \mathfrak{K}_i\Big)\Big).$$

Применяя лемму 29, находим, что $\mathfrak{H} \in \psi_2 \cup \psi_3$. Значит, либо $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, либо $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3$. Отсюда получаем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{Y}$, т.е. верно равенство (*). Это означает, что верно утверждение 3). Теорема доказана.

Отметим, что полученный результат дает ответ на вопрос 5, поставленный А.Н.Скибой и Л.А.Шеметковым в [3] для τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.

Литература

[1] Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. — М.: Наука, 1989. — 253 с.

[2] Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

[3] Скиба, А.Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский математический журнал. — 2000. — том 52, № 6. — С. 783-797.

[4] Биркгоф, Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. — М.: Наука, 1984. — 568 с.

[5] Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Нацыянальная акадэмія навук Беларусі. Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук — Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук. 1980. № 4. С. 27-33.

[6] Шеметков, Л.А. Экраны ступенчатых формация / Л.А. Шеметков // Тр. VI Всесоюзного симпозиума по теории групп. Киев, 1980. С. 37 50.

[7] Жизневский, П.А. О $\mathfrak{L}$-композиционных формациях с дополняемыми подрешетками / П.А. Жизневский, В.Г. Сафонов // Вестник Витебского госуниверситета. Серия С. Фундаментальные науки. — 2008. — № 3(49). — С. 93-100.

[8] Скиба, А.Н. О минимальном композиционном экране композиционной формации / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Вопросы алгебры. — 1992. — Вып. 7. — С. 39-43.

[9] Жизневский, П.А. О $\mathfrak{H}^{\tau}_{\omega_n}$-критических формациях конечных групп / П.А. Жизневский, В.Г. Сафонов // Препринт ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель, 2010, № 2, 14 с.

[10] Жизневский, П.А. О модулярности и индуктивности решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций конечных групп / П.А. Жизневский // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины, №1(58), 2010. С. 185-191.

[11] Жизневский, П.А. К теории кратно частично композиционных формаций конечных групп / П.А. Жизневский // Препринт ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель, 2008, № 30, 35 с.

[12] Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт. — Матем. сб., 1924. — Т. 31. — с. 366-372.

[13] Жевнова, Н.Г. ω-локальные формации с дополняемыми подформациями: Автореф. дис. "ω-локальные формации с дополняемыми подформациями" к-та физ.-мат. наук: Д 02.12.01 / Н.Г. Жевнова; Гом. гос. ун-т им. Ф.Скорины. — Гомель, 1997. — 17 с.

[14] Гретцер, Г. Общая теория решеток: Пер. с англ. / Под редакцией Д.М. Смирнова. — М.: Мир, 1981. — 465 с.

Научное издание

Жизневский Павел Александрович

О τ-ЗАМКНУТЫХ n-КРАТНО ω-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЯХ С БУЛЕВОЙ ПОДРЕШЕТКОЙ

Препринт №3

В авторской редакции

Подписано в печать 09.06.2010. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,62.
Уч.-изд. л. 1,78. Тираж 25 экз. Заказ № 417.
1290-00
Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждения образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"
ЛИ № 02330/0549481 от 14.05.2009.
ЛП № 02330/0150450 от 03.02.2009.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.