Министерство образования Республики Беларусь
Гомельский государственный университет
им.Ф.Скорины

Л.А.Воробей

О РЕГУЛЯРНЫХ ТРАНЗИТИВНЫХ ПОДГРУППОВЫХ ФУНКТОРАХ

Апрель 1999 Препринт N 80

Гомель

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения, принятые в [1,2].

Сопоставим каждой группе G из произвольного непустого класса групп $\mathfrak{X}$ некоторую систему ее подгрупп $\tau(G)$. Следуя [2,3], будем говорить, что τ – регулярный подгрупповой $\mathfrak{X}$–функтор, если для всякого эпиморфизма $\varphi : A \to B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения

$$(\tau(A))^{\varphi} \subseteq \tau(B),$$
$$(\tau(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \tau(A),$$

и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, то регулярный подгрупповой $\mathfrak{X}$–функтор называют регулярным подгрупповым функтором.

В [2] поставлен следующий вопрос: верно ли, что для любой непустой формации конечных групп $\mathfrak{F}$ мощность решетки F $(\mathfrak{F})$ всех регулярных подгрупповых функторов не превосходит $2^{\aleph_0}$? Ответ на этот вопрос дает теорема 3.4 данной работы.

Регулярный подгрупповой функтор τ называется транзитивным (замкнутым в терминологии книги [2]), если всегда из $H \in \tau(G)$ следует $\tau(H) \subseteq \tau(G)$.

В данной работе строятся новые примеры регулярных транзитивных подгрупповых функторов и оценивается мощность решетки $\overline{F}(\mathfrak{G})$ всех регулярных транзитивных подгрупповых функторов.

2. $\mathfrak{X}$ – СУБНОРМАЛЬНЫЕ И $\mathfrak{X}$ – СУБАБНОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППОВЫЕ ФУНКТОРЫ

Напомним некоторые ключевые определения.

Класс групп $\mathfrak{X}$ называется классом Шунка, если:

1) $\mathfrak{X}$ – гомоморф;

2) из того, что все примитивные факторгруппы группы G принадлежат $\mathfrak{X}$, всегда следует $G \in \mathfrak{X}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$,

2) из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Максимальная подгруппа M группы G называется:

1) $\mathfrak{X}$- нормальной, если $G/Core_G(M) \in \mathfrak{X}$;

2) $\mathfrak{X}$- абнормальной, если $G/Core_G(M) \notin \mathfrak{X}$.

Нормальная подгруппа N называется $\mathfrak{X}$-корадикальной нормальной подгруппой группы G, если $G/N \in \mathfrak{X}$ и всегда из $G/K \in \mathfrak{X}$, где $K \subseteq N$, следует $K=N$.

Множество всех $\mathfrak{X}$-корадикальных нормальных подгрупп группы G называется $\mathfrak{X}$-корадикалом группы G и обозначается через $G^{\mathfrak{X}}$. Если $\mathfrak{X}$ – формация, то множество $G^{\mathfrak{X}}$ одноэлементно. В этом случае сама $\mathfrak{X}$-корадикальная подгруппа обозначается через $G^{\mathfrak{X}}$.

Лемма 2.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой гомоморф. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) максимальная подгруппа M $\mathfrak{X}$-нормальна в G тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну $\mathfrak{X}$-корадикальную нормальную подгруппу;

2) максимальная подгруппа M $\mathfrak{X}$-абнормальна в G тогда и только тогда, когда она не содержит ни одной $\mathfrak{X}$-корадикальной нормальной подгруппы.

Доказательство леммы 2.1 осуществляется простой проверкой.

Доказательство следующей леммы можно найти в [3].

Лемма 2.2. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой гомоморф, N – нормальная подгруппа группы G. Пусть $G^{\mathfrak{X}} = \{N_1, N_2, \ldots, N_t\}$, $(G/N)^{\mathfrak{X}} = \{K_1/N, K_2/N, \ldots, K_S/N\}$. Тогда $t \geq s$ и для любой группы $K_i/N \in (G/N)^{\mathfrak{X}}$ найдется группа $N_j \in G^{\mathfrak{X}}$ такая, что $N_jN/N = K_i/N$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{X}$-субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ такая, что $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 2.3. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой гомоморф. Пусть τ – функция, которая любой группе G ставит в соответствие все ее $\mathfrak{X}$-субнормальные подгруппы. Тогда τ – регулярный подгрупповой функтор.

Доказательство. Пусть подгруппа H $\mathfrak{X}$-субнормальна в G и $H \neq G$. Тогда ввиду леммы 2.1 существует максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G \qquad (1)$$

такая, что подгруппа H_{i-1} содержит некоторую $\mathfrak{X}$-корадикальную нормальную подгруппу группы H_i для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. Пусть N – нормальная подгруппа группы G. И пусть H_{i-1} и H_i – такие члены цепи (1), что $NH_{i-1} \neq NH_i$. Покажем, что NH_{i-1} - максимальная подгруппа в NH_i. Допустим, что $NH_{i-1} \subset L \subset NH_i$ для некоторой подгруппы L. Тогда поскольку подгруппа H_{i-1} максимальна в H_i, то либо $H_i \cap L = H_{i-1}$, либо $H_i \cap L = H_i$. Пусть имеет место первое. Тогда поскольку $L = L \cap NH_i = N(L \cap H_i)$, то $L = NH_{i-1}$. Противоречие. Значит, $H_i \cap L = H_i$, то есть $H_i \subseteq L$. Поэтому $NH_i \subseteq L$. Противоречие. Итак, ряд

$$HN/N = NH_0/N \subseteq NH_1/N \subseteq \ldots \subseteq NH_t/N = G/N \qquad (2)$$

таков, что в нем для любого $i \in \{1, \ldots, t\}$ имеет место одно из двух условий:

1) $H_{i-1}N/N = H_iN/N$;

2) $H_{i-1}N/N$ – максимальная подгруппа в H_iN/N.

Не нарушая общности рассуждений, мы можем считать, что все члены ряда (2) различны.

Так как H_{i-1} – $\mathfrak{X}$-нормальная максимальная подгруппа группы H_i, то найдется $\mathfrak{X}$-корадикальная нормальная подгруппа K группы H_i такая, что $K \subseteq H_{i-1}$. Так как

$$H_iN/N\big/KN/N \cong H_iN/KN \cong H_i/H_i \cap KN \cong H_i/K(H_i \cap N),$$

то $H_iN/N\big/KN/N \in \mathfrak{X}$. Значит, KN/N содержит некоторую $\mathfrak{X}$-корадикальную нормальную подгруппу S/N группы H_iN/N. Следовательно,

$$H_{i-1}N/N \supseteq KN/N \supseteq S/N,$$

то есть $H_{i-1}N/N$ содержит $\mathfrak{X}$-корадикальную нормальную подгруппу S/N группы H_iN/N. По определению $H_{i-1}N/N$ – $\mathfrak{X}$-нормальная максимальная подгруппа группы H_iN/N.

Таким образом, если подгруппа H $\mathfrak{X}$-субнормальна в G, то HN/N – $\mathfrak{X}$-субнормальная подгруппа группы G/N.

Пусть теперь H/N – $\mathfrak{X}$-субнормальная подгруппа группы G/N. Тогда либо $H/N = G/N$, либо существует максимальная цепь

$$H/N = H_0/N \subset H_1/N \subset \ldots \subset H_s/N = G/N \qquad (3)$$

где H_{i-1}/N содержит хотя бы одну $\mathfrak{X}$-корадикальную нормальную подгруппу группы H_iN/N для всех $i = 1,2, \ldots, s$.

Пусть $H_{i-1}/N \supseteq K/N$, где K/N – $\mathfrak{X}$-корадикальная нормальная подгруппа группы H_i/N. Ввиду леммы 2.2 найдется $\mathfrak{X}$-корадикальная нормальная подгруппа S группы H_i такая, что $SN/N = K/N$.

Тогда $H_{i-1} \supseteq K \supseteq S$, т.е. H_{i-1} – $\mathfrak{X}$-нормальная максимальная подгруппа группы H_i. Это означает, что H – $\mathfrak{X}$-субнормальная подгруппа группы G. Лемма доказана.

В дальнейшем подгрупповой функтор, выделяющий в каждой группе множество всех ее $\mathfrak{X}$-субнормальных подгрупп, будем называть $\mathfrak{X}$-субнормальным.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{X}$-субабнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$$

такая, что $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \notin \mathfrak{X}$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$.

Замечание. Ввиду леммы 2.1, если $\mathfrak{X}$ – гомоморф, то подгруппа H является $\mathfrak{X}$-субабнормальной, если либо $H = G$, либо $H \neq G$ и существует максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_t = G,$$

где для всех $i = 1,2,\ldots,t$ подгруппа H_{i-1} не содержит ни одной $\mathfrak{X}$-корадикальной нормальной подгруппы группы H_i.

Лемма 2.4. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой гомоморф. Пусть τ – функция, которая любой группе G ставит в соответствие все ее $\mathfrak{X}$-субабнормальные подгруппы. Тогда τ – регулярный подгрупповой функтор.

Доказательство. Пусть подгруппа H $\mathfrak{X}$-субабнормальна в G и $H \neq G$. Тогда ввиду леммы 2.1 существует максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_t = G \qquad (1)$$

такая, что подгруппа H_{i-1} не содержит ни одной $\mathfrak{X}$-корадикальной нормальной подгруппы группы H_i всех $i = 1,2, \ldots, t$.

Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Как и в лемме 2.3 показывается, что для любого $i = 1,2, \ldots, t$ либо $H_{i-1}N/N = H_iN/N$, либо $H_{i-1}N/N$ – максимальная подгруппа группы H_iN/N.

Не нарушая общности рассуждений, мы можем считать, что все члены ряда

$$NH/N = NH_0/N \subseteq NH_1/N \subseteq \ldots \subseteq NH_t/N = G/N$$

различны.

Предположим, что подгруппа $H_{i-1}N/N$ содержит некоторую $\mathfrak{X}$-корадикальную нормальную подгруппу R/N группы H_iN/N. Тогда ввиду леммы 2.2 найдется $\mathfrak{X}$-корадикальная нормальная подгруппа T группы H_iN такая, что $R/N = TN/N$. Таким образом, $TN \subseteq H_{i-1}N$.

Ввиду изоморфизма

$$H_iN/N\big/R/N \cong H_iN/R$$

заключаем, что $H_iN/TN \in \mathfrak{X}$. Отсюда из изоморфизма $H_iN/TN \cong H_i/H_i \cap TN$ следует, что $H_i/H_i \cap TN \in \mathfrak{X}$. Пусть S – $\mathfrak{X}$-корадикальная нормальная подгруппа группы H_i, содержащаяся в $H_i \cap TN$. Тогда $SN = TN$, так как

$$H_iN/N\big/SN/N \cong H_iN/SN \cong H_i/H_i \cap SN = H_i/S(H_i \cap N) \in \mathfrak{X}.$$

Теперь имеем, что $SN \subseteq H_{i-1}N$. С другой стороны, $H_{i-1}S = H_i$. Отсюда $H_{i-1}SN = H_iN$. Так как $H_{i-1}N$ – максимальная подгруппа группы H_iN, то S не входит в $H_{i-1}N$. Пришли к противоречию. Следовательно, HN/N – $\mathfrak{X}$-субабнормальная подгруппа группы G/N.

Пусть теперь H/N – $\mathfrak{X}$-субабнормальная подгруппа группы G/N. Тогда либо $H = G$, либо существует такая максимальная цепь

$$H/N = H_0/N \subset H_1/N \subset \ldots \subset H_s/N = G/N, \qquad (2)$$

что H_{i-1}/N не содержит ни одной $\mathfrak{X}$-корадикальной нормальной подгруппы группы H_i/N для всех $i = 1,2,\ldots,s$. Предположим, что H_{i-1} содержит некоторую $\mathfrak{X}$-корадикальную нормальную подгруппу группы H_i. Тогда ввиду леммы 2.3 H_{i-1}/N содержит некоторую $\mathfrak{X}$-корадикальную нормальную подгруппу группы H_i/N. Пришли к противоречию. Следовательно, подгруппа H $\mathfrak{X}$-субабнормальна в группе G. Лемма доказана.

В дальнейшем подгрупповой функтор, выделяющий в каждой группе все ее $\mathfrak{X}$-субабнормальные подгруппы, будем называть $\mathfrak{X}$-субабнормальным.

Замечание 1. Из определения $\mathfrak{X}$-субнормальной подгруппы следует, что $\mathfrak{X}$-субнормальный функтор является транзитивным для любого непустого гомоморфа $\mathfrak{X}$.

2. Из определения $\mathfrak{X}$-субабнормальной подгруппы следует, что $\mathfrak{X}$-субабнормальный функтор является транзитивным для любого непустого гомоморфа $\mathfrak{X}$.

3. ОЦЕНКА МОЩНОСТИ РЕШЕТКИ ВСЕХ РЕГУЛЯРНЫХ ПОДГРУППОВЫХ ФУНКТОРОВ

Следующий результат анонсирован в [5].

Теорема 3.1. Пусть τ – регулярный подгрупповой функтор. Тогда класс групп $\mathfrak{X} = \{G \mid \tau(G) = \{G\}\}$ является классом Шунка.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и N – нормальная подгруппа группы G. Предположим, что G/N не входит в $\mathfrak{X}$. Тогда в G/N найдется собственная подгруппа K/N, принадлежащая $\tau(G/N)$. Отсюда и из определения подгруппового функтора следует, что $K \in \tau(G)$. Так как $G \in \mathfrak{X}$, то $\tau(G) = \{G\}$. Следовательно, $K = G$. Пришли к противоречию с тем, что K – собственная подгруппа группы G. Таким образом, $\mathfrak{X}$ – гомоморф.

Пусть теперь $G/Core_G(M) \in \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы M группы G. Предположим, что $\tau(G) \neq \{G\}$. Тогда в G найдется собственная подгруппа R, принадлежащая $\tau(G)$. Заключим R в некоторую максимальную подгруппу H группы G. Так как τ – подгрупповой функтор, то $RCore_G(H)/Core_G(H) \in \tau(G/Core_G(H))$. Отсюда и из равенства $\tau(G/Core_G(H)) = \{G/Core_G(H)\}$ следует, что $RCore_G(H) = G$. Но $RCore_G(H) \subseteq HH = H$. Отсюда имеем, что $G \subseteq H$. Пришли к противоречию с тем, что H – собственная подгруппа группы G. Таким образом, $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ является классом Шунка. Теорема доказана.

В дальнейшем класс $\mathfrak{X}$ будем называть классом Шунка, индуцированным подгрупповым функтором τ. Такой класс часто будем обозначать через $\mathfrak{S}^\tau$.

Теорема 3.2. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс Шунка. Если τ – $\mathfrak{X}$-субабнормальный подгрупповой функтор, то $\mathfrak{S}^\tau = \mathfrak{X}$.

Доказательство. Пусть H – произвольная группа из класса $\mathfrak{X}$. Предположим, что в H имеется $\mathfrak{X}$-субабнормальная подгруппа R, отличная от H. Тогда существует такая максимальная цепь

$$R = R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_{t-1} \subset R_t = H,$$

что подгруппа R_{i-1} не содержит ни одной $\mathfrak{X}$-корадикальной нормальной подгруппы группы R_i для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. В частности, подгруппа R_{t-1} не содержит $\mathfrak{X}$-корадикальных нормальных подгрупп группы H. Но это невозможно, так как $H^{\mathfrak{X}} = \{1\}$ ввиду $H \in \mathfrak{X}$. Пришли к противоречию. Значит, $\tau(H) = \{H\}$ и поэтому $H \in \mathfrak{S}^\tau$.

Пусть теперь $G \in \mathfrak{S}^\tau$. Тогда по определению класса $\mathfrak{S}^\tau$ имеем, что в G нет $\mathfrak{X}$-субабнормальных подгрупп, отличных от G. В частности $G/Core_G(M) \in \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы M группы G. Отсюда и из определения класса Шунка заключаем, что $G \in \mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Следствие 1. Отображение, сопоставляющее каждому транзитивномурегулярному подгрупповому функтору τ класс $\mathfrak{G}^{\tau}$, является сюръективным отображением множества всех транзитивных регулярных подгрупповых функторов и множества всех классов Шунка.

Следствие 2. Мощность множества всех транзитивных регулярных подгрупповых функторов не меньше, чем $2^{\aleph_0}$.

Лемма 3.3. Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ – непустые формации, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $Card\ F(\mathfrak{F}) \leq Card\ F(\mathfrak{H})$.

Доказательство. Пусть $\tau \in F(\mathfrak{F})$. Рассмотрим функцию θ, которая каждой группе $G \in \mathfrak{H}$ ставит в соответствие множество подгрупп $\theta(G) = (\tau(G/G^{\mathfrak{F}}))^{\varphi^{-1}}$, где φ – канонический эпиморфизм с $Ker\varphi = G^{\mathfrak{F}}$.

Покажем, что θ – регулярный подгрупповой $\mathfrak{H}$- функтор. Пусть $\psi : A \rightarrow B$ – эпиморфизм и $A \in \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}$ –формация, то $B \in \mathfrak{H}$. Пусть $H \in \theta(A)$. Тогда из определения функции θ следует, что $A^{\mathfrak{F}} \subseteq H$ и $H / A^{\mathfrak{F}} \in \tau(A/A^{\mathfrak{F}})$. Рассмотрим отображение $\overline{\psi} : xA^{\mathfrak{F}} \rightarrow x^{\psi}B^{\mathfrak{F}}$ группы $A/A^{\mathfrak{F}}$ в группу $B/B^{\mathfrak{F}}$. Очевидно, $\overline{\psi}$ – эпиморфизм $\mathfrak{H}$-группы A на $\mathfrak{H}$-группу B. Из свойств $\mathfrak{F}$-корадикала следует, что $(A^{\mathfrak{F}})^{\psi} = (A^{\psi})^{\mathfrak{F}} = B^{\mathfrak{F}}$. Поэтому $(H/A^{\mathfrak{F}})^{\overline{\psi}} = H^{\psi}/B^{\mathfrak{F}}$. Так как τ – подгрупповой $\mathfrak{F}$–функтор, то $(H/A^{\mathfrak{F}})^{\overline{\psi}} = H^{\psi}/B^{\mathfrak{F}} \in \tau(B/B^{\mathfrak{F}})$. Снова используя определение функции θ, получаем, что $H^{\psi} \in \theta(B)$. Итак, $(\theta(A))^{\psi} \subseteq \theta(B)$.

Пусть теперь $S \in (\theta(B))^{\psi^{-1}}$. Тогда в B найдется такая подгруппа R, что $R/B^{\mathfrak{F}} \in \tau(B/B^{\mathfrak{F}})$ и $S = R^{\psi^{-1}}$. При этом $A^{\mathfrak{F}} \subseteq S$ и $S/A^{\mathfrak{F}} = (R/B^{\mathfrak{F}})^{\overline{\psi}^{-1}}$. Отсюда и из определения функции θ следует, что $S \in \theta(A)$. Таким образом, $(\theta(B))^{\psi^{-1}} \subseteq \theta(A)$. Следовательно, θ – подгрупповой $\mathfrak{H}$-функтор.

Итак, показали, что каждый подгрупповой $\mathfrak{F}$-функтор является ограничением на $\mathfrak{F}$ некоторого $\mathfrak{H}$-функтора. Отсюда следует, что $Card\ F(\mathfrak{F}) \leq Card\ F(\mathfrak{H})$. Лемма доказана.

Теорема 3.4. Для любой непустой формации $\mathfrak{F}$ мощность решетки $F(\mathfrak{F})$ не превосходит $2^{\aleph_0}$.

Доказательство. Ввиду леммы 3.3 достаточно показать, что мощность решетки всех регулярных подгрупповых функторов равна $2^{\aleph_0}$.

Обозначим через $\mathfrak{X}$ множество всех классов автоморфно сопряженных подгрупп и их объединений всех конечных групп. Так как множество всех конечных групп счетно, а число всех классов автоморно сопряженных подгрупп и их объединений для каждой конечной группы конечно, то $Card\ \mathfrak{X} = \aleph_0$.

Подгрупповой функтор τ выделяем в каждой группе либо класс автоморфно сопряженных подгрупп либо объединение нескольких таких классов. Таким образом, каждому подгрупповому функтору τ ставится в соответствие некоторое подмножество из $\mathfrak{X}$. При этом разными подгрупповыми функторами в $\mathfrak{X}$ выделяются разные подмножества. Следовательно, множество всех подгрупповых функторов эквивалентно некоторому подмножеству множества всех подмножеств множества $\mathfrak{X}$. Поэтому мощность множества всех регулярных подгрупповых функторов не превосходит $2^{\aleph_0}$. Теорема доказана.

Следствие 1. Мощность множества всех транзитивных регулярных подгрупповых функторов равна $2^{\aleph_0}$.

Следствие 2. Мощность множества всех регулярных подгрупповых функторов равна $2^{\aleph_0}$.

Следствие 3. Если $\mathfrak{F}$ – неединичная формация, то

$$\aleph_0 \leq Card\ F(\mathfrak{F}) \leq 2^{\aleph_0}.$$

СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

[2] Скиба А.Н. Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997.

[3] Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Мн.: Беларуская навука, 1997.

[4] Скиба А.Н. О решетке подгрупповых функторов // Вопросы алгебры. Гомель, 1996. Вып. 10. С. 177-186.

[5] Воробей Л.А., Каморников С.Ф. О связи подгрупповых функторов и классов Шунка // Материалы I Международной науч. конф. "Вычислительные методы и производство: реальность, проблемы и перспективы". Гомель, 1998. – С. 186.

Воробей Л.А.

О РЕГУЛЯРНЫХ ТРАНЗИТИВНЫХ ПОДГРУППОВЫХ ФУНКТОРАХ

Препринты Гомельского государственного университета им.Ф.Скорины

Подписано в печать . Формат 60 х 901/16. Бумага писчая N 1.

Усл.п.л. 0.87. Уч.-изд.л. 0.64. Тираж 20 экз. Заказ

Отпечатано на ризографе Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. 246699, Гомель, ул. Советская, 104