Аб. 41
22.14
В751

Министерство образования Республики Беларусь
Гомельский государственный университет
им. Ф.Скорины

Л.А.Воробей, С.Ф.Каморников, А.В.Карпеш

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ПРИМАРНЫХ ГРУПП

Декабрь 2000

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

1

ПРАВИТЬ
2012

Гомель

В данной работе развивается предложенный в [3] А.Н.Скибой функторный решеточный подход для исследования строения групп и формаций. Суть этого подхода в [3] сформулирована следующим образом: "Сопоставляя некоторой формации групп $\mathfrak{X}$ решетки подгрупповых $\mathfrak{X}$-функторов, можно ставить вопрос о том, в какой зависимости находятся свойства формации $\mathfrak{X}$ и свойства решеток. На этом пути, с одной стороны, можно построить новые интересные примеры полных решеток, с другой, — добиться определенного прогресса в исследовании формаций с заданными внешними и внутренними ограничениями". В [3] это иллюстрируется на примере следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая неединичная формация. В том и только в том случае решетка $Reg(\mathfrak{F})$ является счетной цепью, когда $\mathfrak{F}$ — формация всех элементарных абелевых p-групп для некоторого простого числа p.*

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}=formG$. Тогда в том и только в том случае группа G является элементарной абелевой p-группой, когда решетка $Reg(\mathfrak{F})$ является цепью.*

В работе рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения, принятые в [1-4]. Приведем лишь некоторые из них.

Пусть θ — функция, сопоставляющая каждой группе G из произвольного непустого класса групп $\mathfrak{X}$ некоторую систему ее подгрупп $\theta(G)$. Говорят, что θ — подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор, если выполняется следующее условие абстрактности:

$$(\theta(G))^{\varphi} = \theta(G^{\varphi})$$

для любого изоморфизма φ и каждой группы G из $\mathfrak{X}$.

Подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называется транзитивным, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ всегда из $S \in \theta(H)$ и $H \in \theta(G) \cap \mathfrak{X}$ следует $S \in \theta(G)$.

Подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор θ называется эпиморфным, если для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$ (в дальнейшем эпиморфизм $\mathfrak{X}$-группы в $\mathfrak{X}$-группу будем называть $\mathfrak{X}$-эпиморфизмом), справедливо равенство

$$(\theta(A))^{\varphi} = \theta(B).$$

Эпиморфный подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор θ называется регулярным, если для любого $\mathfrak{X}$-эпиморфизма $\varphi : A \to B$ выполняется включение

$$\theta(B)^{\varphi^{-1}} \subseteq \theta(A)$$

и, кроме того, $G \in \theta(G)$ для любой группы $G \in \mathfrak{X}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Пусть $\mathfrak{F}$ – подкласс класса $\mathfrak{X}$ и θ – подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор. Пусть $\theta_1(G) = \theta(G)$ для каждой группы G из $\mathfrak{F}$. Тогда θ_1 – подгрупповой $\mathfrak{F}$-функтор. Этот функтор называется ограничением функтора θ на $\mathfrak{F}$ и обозначается $\theta_1 = \theta|_{\mathfrak{F}}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Обозначим через $Reg_{tr}(\mathfrak{X})$ множество всех регулярных транзитивных подгрупповых $\mathfrak{X}$-функторов и на множестве $Reg_{tr}(\mathfrak{X})$ введем частичный порядок таким же образом, как и на множестве $Reg(\mathfrak{X})$ (см., например, [3]).

Если $\{\theta_i | i \in I\}$ – некоторая система регулярных транзитивных подгрупповых $\mathfrak{X}$-функторов, то $\theta = \cap_{i \in I}\theta_i$ – регулярный транзитивный подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор. Более того, θ – нижняя грань для множества $\{\theta_i | i \in I\}$ в $Reg_{tr}(\mathfrak{X})$. Таким образом, $Reg_{tr}(\mathfrak{X})$ – полная решетка, единицей которой является $\mathfrak{X}$-функтор S, выделяющий в каждой $\mathfrak{X}$-группе все ее подгруппы, а нулем – тривиальный подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор, выделяющий в каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ только саму группу G.

Так как объединение регулярных транзитивных подгрупповых $\mathfrak{X}$-функторов не всегда является транзитивным подгрупповым $\mathfrak{X}$-функтором (например, объединение $\mathfrak{N}_p$-субнормального и $\mathfrak{N}_q$-субнормального подгрупповых функторов), то $Reg_{tr}(\mathfrak{X})$ не является подрешеткой решетки $Reg(\mathfrak{X})$. В общем случае решетка $Reg_{tr}(\mathfrak{X})$ не является цепью.

В [2] под номером 2.18 А.Н.Скибой поставлен вопрос о строении группы G, для которой решетка всех регулярных транзитивных подгрупповых $(formG)$-функторов является цепью. Следующая теорема дает полный ответ на этот вопрос.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} = formG$. Тогда и только тогда решетка $Reg_{tr}(\mathfrak{F})$ всех регулярных транзитивных подгрупповых $\mathfrak{F}$-функторов является цепью, когда G – p-группа для некоторого простого числа p.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $Reg_{tr}(\mathfrak{F})$ – цепь. Предположим, что в $\pi(G)$ имеются, по крайней мере, два различных простых числа p и q. Пусть θ_1 и θ_2 – функторы, выделяющие в каждой $\mathfrak{F}$-группе все подгруппы, индексы которых не делятся на p и q соответственно. Тогда если P – некоторая силовская p-подгруппа в G, а Q – некоторая силовская q-подгруппа в G, то $P \in \theta_1(G) \backslash \theta_2(G)$ и $Q \in \theta_2(G) \backslash \theta_1(G)$. Значит, функторы $\theta_1|_{\mathfrak{F}}$ и $\theta_2|_{\mathfrak{F}}$ несравнимы. Но $Reg_{tr}(\mathfrak{F})$ – цепь. Значит, G – p-группа для некоторого простого числа p.

Достаточность. Покажем, что если G – p-группа, то регулярный транзитивный подгрупповой $\mathfrak{F}$-функтор является либо нулевым, либо единичным. Пусть G – p-группа наименьшего порядка, для которой это не так. Пусть

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

θ — ненулевой и неединичный регулярный транзитивный подгрупповой $\mathfrak{F}$-функтор.

Если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $|N| = p$. Рассмотрим факторгруппу G/N и формацию $\mathfrak{H} = form(G/N)$. Очевидно, что $\mathfrak{H}$ — подформация из $\mathfrak{F}$. Пусть $\tau = \theta|_{\mathfrak{H}}$ — ограничение $\mathfrak{F}$-функтора θ на классе $\mathfrak{H}$. Ясно, что τ — регулярный транзитивный подгрупповой $\mathfrak{H}$-функтор. Поэтому ввиду предположения либо $\tau = 0_{\mathfrak{H}}$, либо $\tau = 1_{\mathfrak{H}}$. Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$, то утверждение доказано. Значит, далее полагаем, что $\mathfrak{H}$ — собственная подформация из $\mathfrak{F}$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\tau = 0_{\mathfrak{H}}$, то есть $\tau(H) = \{H\}$ для любой группы H из $\mathfrak{H}$. Так как θ — ненулевой подгрупповой $\mathfrak{F}$-функтор, то найдется группа D из $\mathfrak{F}$, для которой $\theta(D) \neq \{D\}$. Поэтому в $\theta(D)$ найдется подгруппа S, отличная от D. Ввиду регулярности подгруппового $\mathfrak{F}$-функтора θ, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что подгруппа S максимальна в D. Так как D — p-группа, то $S \triangleleft D$.

Если формация $\mathfrak{H}$ неединична, то $D/S \in \mathfrak{H}$, а значит, $\tau(D/S) = \{D/S\}$. Но, с другой стороны, ввиду регулярности подгруппового $\mathfrak{F}$-функтора θ имеем, что

$$S/S \in \theta(D/S) = \tau(D/S).$$

Пришли к противоречию.

Значит, формация $\mathfrak{H}$ единична, а следовательно, $G = N$ — группа порядка p. В этом случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}(p)$ — формация элементарных абелевых p-групп. Поэтому $D = S \times A$, где $|A| = p$. Так как подгрупповой $\mathfrak{F}$-функтор θ регулярен, то $S/S \in \theta(D/S)$. Ввиду изоморфизма $D/S \simeq A$ из условия абстрактности заключаем, что $\theta(A) = \{1, A\}$. Рассмотрим теперь произвольную группу M из $\mathfrak{F}$. Пусть L — ее некоторая подгруппа. Рассмотрим максимальную цепь

$$L = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = M.$$

Так как M — p-группа, то $L_{i-1} \triangleleft L_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Отметим еще, что ввиду теоремы П.Неймана [5] $L_i \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Так как $L_i/L_{i-1} \simeq A$, то ввиду регулярности подгруппового $\mathfrak{F}$-функтора θ имеем, что $L_{i-1} \in \theta(L_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Из транзитивности подгруппового $\mathfrak{F}$-функтора θ заключаем, что $L = L_0 \in \theta(M)$. Ввиду произвола выбора группы M и ее подгруппы L имеем, что $\theta = 1_{\mathfrak{F}}$. Снова пришли к противоречию.

2. Пусть $\tau = 1_{\mathfrak{H}}$. Если $\mathfrak{H}$ — единичная формация, то, рассуждая описанным выше образом, получаем равенство $\theta = 1_{\mathfrak{F}}$ и тем самым приходим к противоречию.

Значит, $\mathfrak{H}$ — неединичная формация. Тогда, в частности,

$$\theta(A) = \tau(A) = \{1, A\}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

для группы A порядка p. Пусть M — произвольная группа из $\mathfrak{F}$ и L – ее некоторая подгруппа. Рассматривая цепь

$$L = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = M$$

и ее факторы L_i/L_{i-1}, получаем, что $L \in \theta(M)$, то есть $\theta = 1_{\mathfrak{F}}$. Окончательно пришли к противоречию. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная формация. В том и только в том случае решетка $Reg_{tr}(\mathfrak{F})$ всех регулярных транзитивных подгрупповых $\mathfrak{F}$-функторов является цепью длины 2, когда $\mathfrak{F}$ — формация p-групп для некоторого простого числа p.*

Литература

[1] Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Мн.: Беларуская навука, 1997.–144с.

[2] Скиба А.Н. Алгебра формаций. Препринт/ Гомельский госуниверситет, 1997. №64. 261с.

[3] Скиба А.Н. Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997.– 240с.

[4] Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.– 272с.

[5] Neumann P.M. A note on formations of finite nilpotent groups// Bull. London Math. Soc.–1970.–V.2, №1. P.91.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Воробей Людмила Александровна, Каморников Сергей Федорович, Карпеш Анатолий Владимирович.
ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ПРИМАРНЫХ ГРУПП. Препринты Гомельского госуниверситета.

Подписано в печать 27.12.00. Формат 60x901/16. Бумага писчая №1. Усл.п.л.0,49. Уч.-изд.л. 0,48. Тираж 20 экз. Заказ 376

Отпечатано на ризографе Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины 246699, г.Гомель, ул. Советская, 104.
Лицензия ЛВ № 357 от 12 февраля 1999г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ