

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
по курсу "Методы оптимизации"
Часть 2

Установа адукацыі
"Гомельскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя Францыска Скарыны"
БІБЛІЯТЭКА

Гомель 1986

Рецензент: Кафедра методов оптимального управления
Белорусского государственного университета
им. В.И.Ленина

Составители: Т.П.Былин, В.А.Мережа,
В.В.Можаровский, Л.Н.Федоренко

В лабораторный практикум включены работы по выпуклому, нелинейному, динамическому программированию. Каждая работа содержит постановку задачи, алгоритм или схему ее решения, снабжена иллюстративными примерами, вариантами индивидуальных заданий.

Работа адресована студентам математических специальностей.

20204 - 021
Л-17 86 1702070000
М 339 - 86

© Гомельский государственный
университет (ГГУ), 1986

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ КУНА-ТАККЕРА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Лабораторная работа I

Рассмотрим задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (1)$$

$$X = \{x: g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, k}; g_i(x) = 0, i = \overline{k+1, m}, x \in Q \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Здесь $f(x), g_i(x), i = \overline{1, k}$ - выпуклые функции,
 $g_i(x), i = \overline{k+1, m}$ - линейные функции, Q - выпуклое
множество.

Функция Лагранжа для задачи (1) имеет вид

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^m. \quad (2)$$

Теорема Куна-Таккера: Для существования оптимального плана в
задаче (1) с регулярным множеством планов:

$$\exists x^* \in X, \quad x^* \in \text{ri} Q, \quad (3)$$

$$g_i(x^*) \leq 0, \quad i = \overline{1, k}$$

($\text{ri} Q$ - внутренность множества Q)

необходимо и достаточно существование такого вектора $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m$,

$\lambda_i^0 \geq 0, i = \overline{1, k}; \lambda_i^0, i = \overline{k+1, m}$ - произвольные, что пара

(x^0, λ^0) - седловая точка функции Лагранжа (2):

$$F(x; \lambda) \leq F(x^0, \lambda^0) \leq F(x, \lambda^0) \quad (4)$$

$$\forall x \in Q, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^m, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}$$

и выполняется условие дополняющей нежесткости $\lambda_i^0 g_i(x^0) = 0, i = \overline{1, k}$.

Замечание. Для линейных $g_i(x), i = \overline{1, k}$, теоре-

ма Куна-Таккера верна без условия Слейтера (3).

Схема решения:

1. Проверим, является ли данная задача задачей выпуклого про-

граммирования, используя свойства выпуклых функций, выпуклых мно-

жеств, критерии выпуклости функции.

2. Записываем задачу в виде (1). При этом множество Q строим

по ограничениям исходной задачи так, чтобы легко можно было про-

верить принадлежность ему вектора $x \in \mathbb{R}^n$.

Обычно $Q = \{x: x_j \geq 0, j \in I^* \subset I = \overline{1, n}\}$,

I^* - подмножество множества I .

3. Проверим, является ли множество планов регулярным.

4. Ищем стационарные точки функции Лагранжа. Для этого решаем

систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1, n}, \\ \lambda_i g_i(x) = 0, i = \overline{1, k}, x \in Q, \\ g_i(x) = 0, i = \overline{k+1, m}, \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, k}. \end{cases} \quad (5)$$

5. Для каждой стационарной точки проверим условие (4).

6. Если среди стационарных точек найдется седловая точка функций Лагранжа $\{x^*, \lambda^*\}$, то x^* - решение исходной задачи $x^0 = x^*$. Если нет, (т.е. $x^0 \in \text{int } Q$), то переходим к п.7.

7. Ищем решение задачи на границе множества Q . Если Q состоит из внутренних точек, то задача решения не имеет. Пусть L - граница множества Q , $L \in Q$ и множества L_i , $i = \overline{1, S}$ - элементы L (например: грани, ребра, угловые точки). Для поиска решения задачи имеем совокупность задач:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X_i, i = \overline{1, S}, \quad (6)$$

где $X_i = \{x: x \in L_i, g_i(x) = 0, i = \overline{1, k}, g_i(x) = 0, i = \overline{k+1, m}\}$

Если X_i , $1 \leq i \leq S$ - выпуклое множество, то задачу (6) можно решать по схеме п.1 - п.6. Каждую стационарную точку задач (6) проверяем на седловую для исходной задачи. Если мы не обнаружим решения исходной задачи при исследовании всех задач (6), то у нее решения нет.

Замечания.

1. Если $f(x)$ - строго выпуклая функция, то у задачи (1) может быть лишь один оптимальный план.

2. Если у задачи (1) найдено несколько различных оптимальных планов $x^0, i = \overline{1, l}$, то решением является также любая их выпуклая линейная комбинация: $x = \sum_{i=1}^l \lambda_i x^i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$.

Пример.

Найти решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 4x_3 \rightarrow \min, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 5, \\ 2x_2 + x_3 &\leq 4, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, x \in R^3 \end{aligned} \quad (7)$$

Решение.

1. Составляем матрицу вторых производных целевой функции $f(x)$

$$f(x) \in C^{(2)}$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Так как все главные миноры матрицы неотрицательные, то $f(x)$ - выпуклая функция. Ограничения задачи линейны. Следовательно, исходная задача является задачей выпуклого программирования.

2. Задачу (7) записываем в виде (1). Введем множество

$$\begin{aligned} Q &= \{x: x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x \in R^3\}. \text{ Имеем} \\ f(x) &= 3x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 4x_3 \rightarrow \min, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x &\in Q \end{aligned}$$

3. Так как ограничения задачи линейны, то условие Слейтера

(3) проверять не нужно.

4. Составляем функцию Лагранжа

$$F(x, \lambda) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 4x_3 + \lambda_1 (4x_1 + x_2 - 2x_3 - 5) + \lambda_2 (2x_2 + x_3 - 4), x \in Q, \lambda \in R^2, \lambda_2 \geq 0.$$

5. Составляем и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 6x_1 + x_2 + 4\lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = -4 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0, \\ 2x_2 + x_3 - 4 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) если $\lambda_2 = 0$, то из 3-го уравнения $\lambda_1 = -4/2$

Из 1, 2, 4 уравнения находим

$$x_1 = \frac{48}{11}, x_2 = \frac{7}{11}, x_3 = \frac{25}{11}.$$

Стационарная точка $\{x^*, \lambda^*\} = \{\frac{48}{11}, \frac{7}{11}, \frac{25}{11}, -\frac{2}{11}, 0\}$

2) Если $2x_2 + x_3 - 4 = 0$

, то имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4\lambda_1 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 4, \\ 4x_1 + x_2 - 2\lambda_3 = 5, \\ 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_2 \geq 0. \end{cases}$$

Она решений не имеет.

6. Для пары $\{x^*, \lambda^*\}$ проверяем условие (4). Имеем

$$\frac{35}{44} \leq \frac{35}{44} \leq 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 14x_1 - \frac{x_2}{2} - \frac{35}{2}. \quad (6)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$$

В крайнем справа выражении в (8) стоит выпуклая функция, достигающая минимальное значение $\frac{35}{44}$ в своей стационарной точке:

$x_1 = \frac{19}{22}, x_2 = \frac{3}{22}$. Следовательно, (8) верное неравенство и $\{x^*, \lambda^*\}$ седловая точка функции Лагранжа (2), т.е. $x^0 = x^*$ - оптимальный план задачи (7) и $f(x^0) = \frac{35}{44}$.

Пример 2.

Найти решение задачи

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

1. Задача (9) - задача выпуклого программирования, так как

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq 0$ и ее ограничения линейны.

2. Положим $Q = \{x: x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

3. Составляем функцию Лагранжа, задачи (9):

$$F(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2),$$

$$x \in Q, \lambda \geq 0.$$

4. Составляем и решаем систему (5):

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0, \\ 2x_2 + \lambda = 0, \\ \lambda(x_1 + x_2 - 2) = 0, \quad x \in Q, \lambda \geq 0 \end{cases}$$

1) Если $\lambda = 0$, то из 1 и 2 уравнения получаем точку $x_1 = -1, x_2 = -1$, которая не принадлежит Q .

2) Если $\lambda \neq 0$, то из системы

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0, \\ 2x_2 + \lambda = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0, \\ x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases}$$

находим пару: $\lambda = -2, x_1 = 0, x_2 = 2$, которая также не является стационарной, так как не выполняется условие $\lambda \geq 0$. Итак, у функции Лагранжа нет стационарных точек.

6. Ищем решение на границе множества Q . Ее элементы

$$L_1 = \{x: x_2 \geq 0, x_1 = 0\}, L_2 = \{x: x_1 \geq 0, x_2 = 0\}, L_3 = \{x: x_1 = x_2 = 0\}$$

Решаем задачу на L_1 . Имеем

$$\begin{aligned} x_2^2 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ x_2 \leq 2, \\ x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Функция Лагранжа задачи (10) имеет вид

$$F(x, \lambda) = x_2^2 - 2x_2 + \lambda(x_2 - 2), \quad x_1 \geq 0, \lambda \geq 0$$

Решаем систему (5). Для нее

$$\begin{aligned} 2x_2 + \lambda &= 2, \\ \lambda(x_2 - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Стационарная точка: $\lambda = 0, x_2 = 1$.

Проверяем для пары $\{x_1 = 0, x_2 = 1; \lambda = 0\}$ условие (4) для исходной задачи. Имеем

$$\begin{aligned} -1 - 2 \leq -1 \leq x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 2, \\ \forall x_1 \geq 0, \forall x_2 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Левое неравенство в (11) выполняется для $\forall \lambda \geq 0$. Так как $(x_1 + 1)^2 \geq 1$ при $x_1 \geq 0$ и $(x_2 - 1)^2 \geq 0$ то правое неравенство выполняется для $\forall x \in Q$. Итак, $\{0, 1; 0\}$ - седловая точка функции Лагранжа задачи (9) и $x^0(9), f(x^0) = -1$.

Задача. Исследовать следующие задачи:

$$1. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_2 - 6 \rightarrow \min \quad 2. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + 5x_2 - 5 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \quad 3. f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_1 + x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad 4. f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad 5. f(x) = 3x_1^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3 - 2 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 6. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 7. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 8. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 9. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 10. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 11. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 12. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 13. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 14. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 15. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 16. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 17. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 18. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 19. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 20. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 21. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 22. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 23. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 24. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 25. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 26. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 27. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 28. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 29. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 30. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 31. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 32. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 33. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 34. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 35. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 36. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 37. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 38. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 39. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 40. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 41. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 42. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 43. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 44. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 45. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 46. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 47. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 48. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 49. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 50. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 51. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 52. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 53. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad 54. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad 55. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad 56. f(x) = x_1^2 + x$$

$$7. f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 - x_3 + 4 \rightarrow \min \quad 8. f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 - 2x_2 + 4 \rightarrow \min$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \quad 5x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_2 + x_3 \geq 4 \quad 2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad x_1 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$9. f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_2 + 5 \rightarrow \min \quad 10. f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1 \quad x_1 + x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_3 = 2 \quad 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad x_1 \geq 0$$

$$11. f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 - 4x_3 \rightarrow \min \quad 12. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 1 \quad 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_2 + x_3 = 2 \quad 4x_1 + 8x_2 - x_3 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$13. f(x) = -x_1^2 - x_3^2 - 6 \rightarrow \max \quad 14. f(x) = x_1^2 + x_2 x_3 - x_1 - 1 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5 \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 2 \quad 2x_2 + x_3 = 2$$

$$x \quad x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$15. f(x) = x_1^2 + x_1 + x_3 - x_2 + 1 \rightarrow \min \quad 16. f(x) = -x_1^2 - x_2 x_3 - x_2^2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \quad x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 1 \quad x_1 + x_3 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$17. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \rightarrow \min \quad 18. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2^2 - 1 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 = 1 \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

$$x_2 + x_3 \leq 2 \quad x_1 + 2x_2 \geq 1$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$19. f(x) = -x_1^2 - x_2 x_3 \rightarrow \max \quad 20. f(x) = -x_1 x_3 + 4x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \quad 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$$

$$-2x_1 + x_3 = 2 \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad x_1 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$21. f(x) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \min \quad 22. f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \quad 6x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 3 \quad 2x_1 - x_3 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

$$23. f(x) = x_1 + x_2^2 + x_3 - 4 \rightarrow \min \quad 24. f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 + x_1 + 4 \rightarrow \min$$

$$4x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \quad x_1 - 2x_2 = 1$$

$$x_1 + 1x_2 \leq 3 \quad x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$25. f(x) = -x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min \quad 26. f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \quad x_1 - 3x_3 \leq 2$$

$$2x_2 + x_3 \geq 2 \quad 2x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (НЛП)

Лабораторная работа 2

Рассматривается задача минимизации с ограничениями смешанного типа:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$g_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, p} \quad (2)$$

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{p+1, q} \quad (3)$$

$$x \in R^n, f(x) \in C^{(u)}, g_i(x) \in C^{(u)}, \quad i = \overline{1, q}$$

Схема исследования.

I. Сведение задачи (1)-(3) к более простой задаче этого же типа (метод исключения).

Если из K -го ограничения - равенства $g_k(x) = 0, 1 \leq k \leq p$, можно легко выразить одну из переменных $x_{i^*}, 1 \leq i^* \leq n$, через остальные

$$x_{i^*} = h(x_i, i = \overline{1, n}, i \neq i^*), \quad (4)$$

то переменную x_i^* в задаче (1)-(3) удобно исключить. Для этого в функции $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, q}$, $i \neq k$ подставляем вместо x_i^* выражение из связи (4). В результате получаем эквивалентную задачу типа (1)-(3), но с меньшим числом неизвестных (на одно) и с меньшим числом ограничений (на одно). После полного завершения исследований новой задачи, используя ее эквивалентность исходной, делаем выводы о задаче (1)-(3). Не ограничивая общности, считаем далее, что задача (1)-(3) не поддается упрощению.

2. Исследование вопроса о существовании решения задачи (1)-(3). Здесь используются критерий существования решений задач НЛП или теорема Вейерштрасса.

Если в результате мы убеждаемся, что у задачи решения нет, то исследование прекращается. Если решение есть (этот факт важен и используется в п.7) либо нельзя дать определенный ответ о его существовании, то поиск продолжается.

3. Нахождение условно-стационарных точек задачи (1)-(3) (точек подозрительных на решение).

а) составляем классическую функцию Лагранжа

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^q \lambda_i g_i(x),$$

$$\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, q},$$

б) используя классическое уравнение множителей Лагранжа, составляем систему уравнений для поиска условно-стационарных точек.

$$\frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x} = 0, \quad g_i(x) = 0, i = \overline{1, p}, \quad (5)$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0, i = \overline{1, q},$$

$$\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, q}, x \in X$$

в) находим $\{x^s, \lambda^s\}$, $s = \overline{1, m}$ - все решения системы (5).

4. Необходимое условие второго порядка. Количество точек, подозрительных на решение, можно сократить, используя необходимое условие второго порядка (здесь предполагаем, что $f(x)$, $g_i(x) \in C^2$, $i = \overline{1, q}$). Для каждой пары проверяем на неотрицательность квадратичную форму:

$$\ell' \frac{\partial^2 F(x^s, \lambda^s)}{\partial x^2} \ell \geq 0 \quad (6)$$

на множестве допустимых направлений $\ell \in R^n$,

$$\ell' \frac{\partial g_i(x^s)}{\partial x} = 0, i = \overline{1, p} \quad (7)$$

$$\ell' \frac{\partial g_i(x^s)}{\partial x} = 0, i = \overline{1, q}, i \neq k, \lambda_i^s = 0, \lambda_k^s > 0 \quad (8)$$

$$\ell' \frac{\partial g_i(x^s)}{\partial x} \leq 0, i = \overline{1, q}, i \neq k, \lambda_i^s = 0, \lambda_k^s > 0 \quad (9)$$

Замечание.

Условие (6) как и условие (10) из п.6 удобно сначала проверять для $\forall \ell \in R^n$, а затем сравнить множества, на которых они не выполняются, с множеством, выделяемым условиями (7)-(9).

5. Достаточное условие оптимальности.

Пусть $\{x^s, \lambda^s\}$, $s = \overline{1, m}$ - пары, удовлетворяющие условиям (6)-(9). Используя достаточное условие оптимальности, находим из числа точек, подозрительных на решение, локально-оптимальные планы. Ими будут те x^s , $s = \overline{1, m}$, для которых выполняется неравенство

$$\ell' \frac{\partial^2 F(x^s, \lambda^s)}{\partial x^2} \ell > 0, \quad 1 \leq s \leq m \quad (10)$$

на множестве векторов ℓ , удовлетворяющих (7)-(9), $\ell \neq 0$.

Пусть x^s , $s = \overline{1, m}$ - локально-оптимальные планы. Находим из них лучший план x^* по правилу $f(x^*) = \min_{1 \leq s \leq m} f(x^s)$

6. В случае нелинейных ограничений точки, подозрительные на решение, могут также находиться (согласно обобщенному правилу множителей Лагранжа) среди решений системы

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x} = 0,$$

$$g_i(x) = 0, i = \overline{1, p}$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0, i = \overline{1, q}, \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, q}, x \in X$$

Решение этой системы присоединяем к уже найденным точкам, подозрительным на решение исходной задачи.

7. Нахождение оптимального плана

Если у задачи (1)-(3) существует решение (см. п.2) и найдены все точки, подозрительные на решения $x^s, s=1, \dots, l$, то оптимальный план x^0 можно найти из соотношения

$$f(x^0) = \min_{1 \leq s \leq l} f(x^s)$$

6. Поведение целевой функции на бесконечности.

Если определенного ответа на вопрос о существовании решения нет и X неограниченная область, то необходимо исследовать поведение целевой функции при $|x| \rightarrow \infty$ по различным направлениям.

9. Результаты исследования.

На основании п.1 - п.8 делаем заключение о результатах исследования задачи (1)-(3). В общем случае из-за сложности нелинейных задач, такое заключение не удастся сделать полным.

Пример 1.

$$\begin{aligned} 2x_1^2 - x_2 - 1 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &\leq 1, \\ 2x_1 - x_2 &\geq 1, \quad x_1 \geq 0 \end{aligned} \quad (II)$$

Исследование.

1. Записываем задачу (II) в виде (1)-(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1^2 - x_2 - 1 \rightarrow \min \\ g_1(x) &= x_1 + x_2 - 1 \leq 0, \\ g_2(x) &= -2x_1 + x_2 + 1 \leq 0, \\ g_3(x) &= -x_1 \leq 0 \end{aligned} \quad (I2)$$

Задача не поддается упрощению.

2. Исследуем вопрос о существовании решения задачи (I2).

Построим множество ее планов.

Множество планов $X = \{x \in R^2 : x_1 + x_2 \leq 1, 2x_1 + x_2 \geq 1, x_1 \geq 0\}$ неограниченная область. Строим множество уровня целевой функции $X_f(t) = \{x : 2x_1^2 - x_2 - 1 \leq t\}$. Пересечение $X \cap X_f(t)$ (см. рис.1) компактно, и на этом множестве целевая функция непрерывна. Следовательно, по теореме Вейерштрасса у задачи (I2) существует оптимальный план.

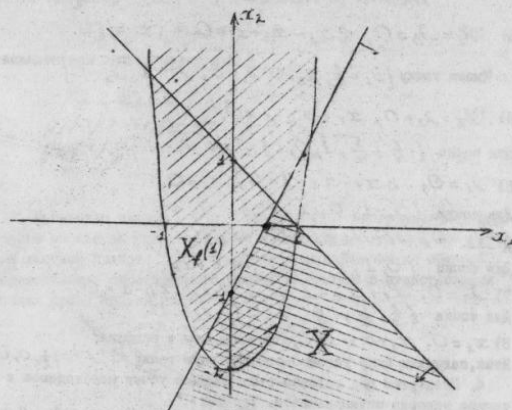


Рис. 1

3. Ограничения задачи линейны (проверка на обобщенность не требуется), следовательно, для ее решения применим классическое правило множителей Лагранжа

$$F(x, \lambda) = 2x_1^2 - x_2 - 1 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) + \lambda_2(2x_1 - x_2 + 1) - \lambda_3 x_1, \quad x \in X, \lambda \geq 0$$

Находим условно-стационарные точки. Имеем систему

$$\begin{aligned} 4x_1 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0, \\ -1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) &= 0, \\ \lambda_2(2x_1 - x_2 + 1) &= 0, \\ \lambda_3 x_1 &= 0, \quad x \in X, \lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (I3)$$

Возможны 8 случаев:

- 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Нет решения 1°
- 2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, x_1 = 0$. Нет решения 1

$$3) \lambda_2 = \lambda_3 = 0, 2x_1 - x_2 - 1 = 0.$$

Ищем точку $\{x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0\}$

$$4) \lambda_2 = \lambda_3 = 0, x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

Для точки $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, 0, 0\} x \in X$

$$5) \lambda_1 = 0, 2x_1 - x_2 - 1 = 0, x_1 = 0$$

Для точки $\{0, -1, 0, 1, -2\}, \lambda_3 < 0$

$$6) \lambda_2 = 0, x_1 + x_2 - 1 = 0, x_1 = 0.$$

Для точки $\{0, 1, 1, 0, 1\}, x \in X.$

$$7) \lambda_3 = 0, x_1 + x_2 - 1 = 0, 2x_1 - x_2 - 1 = 0.$$

Для точки $\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0\} \lambda_1 < 0.$

$$8) x_1 = 0, x_1 + x_2 - 1 = 0, 2x_1 - x_2 - 1 = 0 \text{ нет решения.}$$

Итак, получили одну условно-стационарную точку $\{x^1, \lambda^1\} = \{\frac{1}{2}, 0, 0, 1, 0\}$

4. Проверим для условно-стационарной точки необходимое и достаточное условия оптимальности. Так как

$$b' \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} b = (b_1, b_2) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 4b_1^2 \geq 0, \forall b \in R^2,$$

то точка x^1 удовлетворяет необходимому условию второго порядка.

Для точки x^1 множество (7)-(9) имеет вид:

$$\{b: b' \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} (x^1) = 0\} = \{b \in R^2: -2b_1 + b_2 = 0\}.$$

На этом множестве $4b_2^2 > 0$ всюду кроме точки $\{0, 0\}$. Следовательно, достаточное условие выполняется и точка x^1 локально-оптимальный план.

5. Так как точка x^1 - единственная подозрительная на решение и у задачи решение существует, то $x^0 = x^1$ - оптимальный план, $f(x^0) = -\frac{1}{2}$.

Пример 2.

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 \geq 2 \end{cases} \quad (14)$$

Исследование.

1. Из первого ограничения-равенства можно выразить одну из пере-

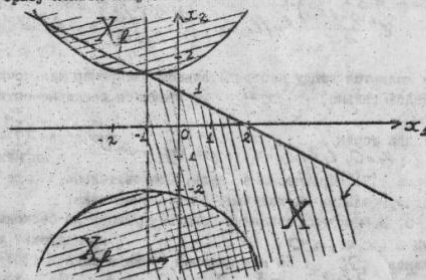
менных (например x_3) и исключить ее из задачи

$$x_3 = x_1 + x_2 + 1 \quad (15)$$

Эквивалентная задача имеет вид

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2 \rightarrow \min, \\ g_1(x) = x_1 + 2x_2 - 2 \leq 0, \\ g_2(x) = -x_1 - 1 \leq 0. \end{cases} \quad (16)$$

2. Множество планов X задачи (16) неограниченно. Пересечение множества уровней $X \cap \{f = c\} = \{x: (x_1 + 1)^2 - x_2^2 + 1 \leq c\}$ с множеством планов X , также неограниченная область. Следовательно, определенного ответа на вопрос о существовании решения сразу нельзя получить.



3. Ищем условно-стационарные точки.

$$\begin{cases} F(x, \lambda) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2 + \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 2) - \lambda_2(-x_1 - 1), \\ \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 2) = 0, \\ -\lambda_1x_2 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 2) = 0, \\ \lambda_2(-x_1 - 1) = 0. \end{cases}$$

Возможны 4 случая:

- 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Имеем точку $\{-1, 0, 0, 0\}$
- 2) $\lambda_1 = 0, x_1 + 1 = 0$. Та же точка;
- 3) $\lambda_2 = 0, x_1 + 2x_2 - 2 = 0$.

Для точки $\{-2, 2, 2, 0\} x \in X$.

- 4) $x_1 + 1 = 0, x_1 + 2x_2 - 2 = 0$. Имеем точку $\{-1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$.
Итак, получено две условно-стационарные точки:
 $\{x^1, \lambda^1\} = \{-1, 0, 0, 0\}; \{x^2, \lambda^2\} = \{-1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$.

4.а) Для точки $\{x^1, \lambda^1\}$ множество (7)-(9) имеет

$$\text{вид } \{l: l' \frac{\partial^2 f(x^1)}{\partial x^2} l = (l_1, l_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = 2l_1^2 - 2l_2^2 \leq 0\}$$

и на нем квадратичная форма

$$l' \frac{\partial^2 f(x^1)}{\partial x^2} l = (l_1, l_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = 2l_1^2 - 2l_2^2 \quad (17)$$

не является всюду неотрицательной (например для точки $l_1 = 0, l_2 = 1$). Следовательно, x^1 не является локально-оптимальным планом;

б) для точки $\{x^2, \lambda^2\}$ множество (7)-(9) имеет вид $\{l: l_1 = 0, l_1 + 2l_2 = 0\} = \{0, 0\}$ и на нем квадратичная форма (17) обращается в нуль. Следовательно, x^2 остается подозрительным на локально-оптимальный план.

Б. Исследуем поведение целевой функции на бесконечности.

Луч $x_1 = 0, x_2 \leq -1$ принадлежит множеству планов X . На нем целевая функция задачи (16) имеет вид $f(x) = -x_2^2 - 2$. При $x_2 \rightarrow -\infty$ вдоль луча, $f(x) \rightarrow -\infty$. Таким образом,

задача (16) не имеет решения из-за неограниченности снизу целевой функции на множестве планов.

Вывод. Задача (14) не имеет решения.

Задание. Исследовать на оптimum следующие задачи:

$$\begin{aligned} 1. f(x) &= -x_1^2 - x_2^2 + 4 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 &\leq 2, \\ 2x_1 - x_2 &\geq 1, \\ x_1 &\geq 0, \end{aligned} \quad \begin{aligned} 2. f(x) &= x_1^2 - 2x_2 + 3 \rightarrow \min \\ 4x_1 - x_2 &\leq 1, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 2, \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. f(x) &= x_1 x_2 + x_2 + 1 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 &\geq 1, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 2, \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. f(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 1 \rightarrow \min \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 1, \\ 4x_1 - x_2 &\leq 1, \\ x_1 &\geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. f(x) &= x_1 - 2x_2^2 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 &\leq 1, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 2, \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. f(x) &= 4x_1^2 - 2x_2^2 + x_2 \rightarrow \min \\ x_1 - 2x_2 + 1 &= 0, \\ 4x_1 - x_2 &\leq 1, \\ x_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. f(x) &= 8x_1 - x_2^2 + 4 \rightarrow \min \\ x_1 - 3x_2 &\leq 1, \\ x_1 + x_2 &\leq 2, \\ x_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. f(x) &= x_1^2 - x_2 + 2x_1 \rightarrow \min \\ 3x_1 - x_2 &\leq 1, \\ x_1 + x_2 &= 2, \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. f(x) &= 8x_1 - x_2^2 + 4 \rightarrow \min \\ 3x_1 - x_2 &\geq 1, \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2, \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. f(x) &= 4x_1^2 - x_1 x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &\leq 1, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 2, \\ x_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. f(x) &= x_1^2 - 2x_2 + x_1 \rightarrow \min \\ 3x_1 - x_2 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2, \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. f(x) &= x_2^2 - x_1 \rightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13. f(x) &= x_1^2 - 2x_2 \rightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 &\geq 1, \\ x_1 - x_2 &\leq 2, \\ x_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14. f(x) &= x_1^2 + 2x_2 \rightarrow \min \\ 2x_1 - x_2 &\geq 1, \\ x_1 + x_2 &\leq 2, \\ x_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Установа адукацый
"Гомельскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя Францыска Скарыны"
БІБЛІЯТЭКА

$$15. f(x) = 2x_1^2 - x_2 - 1 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$2x_1 - x_2 \geq 1,$$

$$x_1 \geq 0.$$

$$16. f(x) = x_1^2 - x_2^2 + 1 \rightarrow \min$$

$$2x_1 - x_2 \leq 1,$$

$$3x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 0.$$

$$17. f(x) = 2x_1^2 + x_2 - 1 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 = 2,$$

$$-x_1 - 2x_2 \leq 1,$$

$$x_1 \geq 0.$$

$$18. f(x) = x_1^2 - x_2 - 1 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 = 1,$$

$$2x_1 - x_2 \leq 1$$

$$19. f(x) = x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 = 3,$$

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_1 \geq 0$$

$$20. f(x) = x_1^3 - x_2^2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 - x_2 = 1,$$

$$x_1 + x_2 \leq 1.$$

$$21. f(x) = x_1^4 - x_2 - 1 \rightarrow \min$$

$$3x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_1 - x_2 \geq -1.$$

$$22. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 - 2x_2 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0.$$

$$23. f(x) = x_1^2 - x_1 x_2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 - x_2 \leq 1,$$

$$-x_1 - x_2 \geq -1.$$

$$24. f(x) = \frac{1}{3} x_1^3 - x_2 - 6 \rightarrow \min$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 1,$$

$$x_1 \geq 0.$$

$$25. f(x) = \frac{1}{4} x_1^4 - 2x_2 - 1 \rightarrow \min$$

$$4x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$-2x_1 + x_2 \geq -1, x_1 \geq 0$$

$$26. f(x) = -x_1^2 + x_2^2 - 1 \rightarrow \max$$

$$2x_1 - x_2 \geq 1,$$

$$x_1 + x_2 \leq 2.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РИЗКАХ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Лабораторная работа 3

Постановка задачи. Имеется n неделимых предметов:

$I = \{i = \overline{1, n}\}$. Задаем: p_i - вес, c_i - ценность i -го предмета, $1 \leq i \leq n$.

Требуется уложить в рюкзак некую совокупность предметов с общей стоимостью не менее числа C и минимального веса.

Математическая модель задачи. Введем переменные $x_i, i = \overline{1, n}$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если предмет укладывается в рюкзак;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Имеем оптимизационную задачу

$$f(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \rightarrow \min, x \in X,$$

$$X = \{x: \sum_{i=1}^n c_i x_i \geq C, x_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, n}\}. \quad (1)$$

Схема решения:

0 - итерация

Находим оценку

$$\bar{p}_0 = \bar{p}(X)$$

. Для этого решаем задачу

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X, \quad (2)$$

$$\text{где } X = \{x: \sum_{i=1}^n c_i x_i \geq C, 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{1, n}\}$$

Она представляет из себя непрерывную задачу линейного программирования. Пусть x^* - решение задачи (2). Положим $\bar{p}_0 = f(x^*)$. Если x^* есть план задачи (1), то x^* и ее решение. В противном случае разбиваем множество X на два подмножества, укладывая или не укладывая в рюкзак один из предметов (например первый):

$$X_{11} = \{x: x_1 = 0, x \in X\}, X_{12} = \{x: x_1 = 1, x \in X\}.$$

$$\text{Список множеств для первой итерации } S_1 = \{X_{11}, X_{12}\}.$$

$$\text{Рекорд итерации } \bar{p}_0 = \infty.$$

.....
K - итерация. Пусть $S_K = \{X_{K1}, X_{K2}, \dots, X_{Ks(K)}\}$ - список множеств для этой итерации. Находим оценку $\bar{p}_K = \min_{i=1, \dots, s(K)} \bar{p}(X_{Ki})$, где $\bar{p}(X_{Ki})$ - оценки снизу значений функции задачи (1) на подмножестве X_{Ki} . Они находятся, как решения непрерывных задач:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X_{Ki}, 0 \leq x_i \leq s(i) \quad (3)$$

Пусть $x^{*i}, 1 \leq i \leq s(k)$ решения задач (3).

Тогда полагаем

$$f(X_{k+1}) = f(x^{*i}).$$

Если при некотором $i, 1 \leq i \leq s(k)$ задача (3) не имеет решений, то $f(X_{k+1}) = \infty$.

Пусть среди решений $x^{*i}, 1 \leq i \leq s(k)$ непрерывных задач (I) есть планы задачи (I): $x^{*1}, x^{*2}, \dots, x^{*s} \in X$

Вычисляем рекорд итерации $u^k = \min_{1 \leq i \leq s(k)} \{f(x^{*i}), u^{k-1}\}$, и рекордный план x^k

а) если $u^k = \bar{u}^k$, то план x^k решение задачи (I);

б) если $u^k - \bar{u}^k = \varepsilon > 0$, то $x^k = x^k - \varepsilon$ - оптимальный план.

Если не выполняются случаи а) либо случая б) (т.е. приближение нас не удовлетворяет), то переходим к следующей итерации. Составляем список множеств для $(k+1)$ -й итерации S_{k+1} . Для этого разбиваем множество X_k ($f(X_k) = \bar{u}^k$) на две подмножества (укладыва или неукладыва в рюкзак один из оставшихся в X_k предметов); X_k^1 и X_k^2 . В S_{k+1} включаем множества из S_k и X_k^1, X_k^2 , исключив множество X_k . Из списка S_{k+1} следует также исключить те множества списка S_k , для которых оценка снизу больше либо равна u^k .

Итерации продолжают либо до получения оптимального плана, либо до достижения заданной степени точности ε . Так как множество планов задачи (I) конечно, то всегда можно построить оптимальный план.

Метод решения непрерывных задач типа (2), (3).

Пусть требуется решить задачу (2). Для каждого $i, 1 \leq i \leq n$ вычисляем относительный вес на единицу стоимости P_i/c_i . Ясно, что оптимальный план задачи (2) будет построен, если записать в рюкзак в первую очередь предметы (для непрерывной задачи их можно дробить) с наименьшим числом P_i/c_i .

Засыпая в рюкзак предметы в порядке возрастания чисел до достижения заданной стоимости груза c , строим оптимальный

план задачи (2). Задачи (3) решаются аналогично.

Пример.

Рассмотрим задачу о рюкзаке с данными из таблицы

N	1	2	3	4
C _i	20	10	12	8
P _i	3	4	5	2

$$n=4, c=30,$$

математическая модель имеет вид

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \rightarrow \min \quad (4)$$

$$20x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 8x_4 \geq 30 \quad (5)$$

$$x_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, 4} \quad (6)$$

Решение

0- итерация.

Решаем задачу (4), (5) с условием

$$0 \leq x_i \leq 1$$

Вычисляем отношение $P_i/c_i, i = \overline{1, 4}$

$$\frac{P_1}{C_1} = \frac{3}{20}, \frac{P_2}{C_2} = \frac{4}{10}, \frac{P_3}{C_3} = \frac{5}{12}, \frac{P_4}{C_4} = \frac{2}{8}$$

Загружаем в рюкзак предметы в порядке возрастания относительной ценности: первый, четвертый, второй, третий. Оптимальный план задачи (4), (5), (7)

$$x^* = \{x_1 = x_4 = 1, x_2 = 0,3, x_3 = 0\},$$

$$\bar{u} = f(x^*) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 6,2$$

x^* не является планом задачи (4)-(6).

Множество X разбиваем на подмножества: $S_1 = \{X_1, X_2\}$

$$X_1 = \{x \in X: x_1 = 0\}; X_2 = \{x \in X: x_1 = 1\}, u_0 = \infty.$$

1- итерация.

Имеем $f(X_1) = \infty$ так как $10 + 12 + 8 = 29 < 30$,

$$f(X_2) = \bar{u}(X), x^{*2} = x^*, \bar{u}_1 = \bar{u}.$$

На итерации план не построен: $u = \infty$

Множество X_1 исключаем из списка, а множество X_2 разбиваем на

два подмножества

$$X_{21} = \{x \in X; x_2 = 0\} = \{x \in X; x_1 = 1, x_2 = 0\}$$

$$X_{22} = \{x \in X; x_1 = x_2 = 1\}, S_2 = \{X_{21}, X_{22}\}$$

2-я итерация.

$$f(X_{21}) = 6,25, x^{*1} = \{1, 0, \frac{1}{4}, 1\},$$

$$f(X_{22}) = 4, x^{*2} = \{1, 1, 0, 0\}, f_2 = 6,25.$$

Получен рекордный план итерации $x^2 = x^{*2}, z_2 = 4$,

x^2 будет ε - оптимальный план: $\varepsilon = z_2 - f_2 = 0,45$.
Так как ρ - целое число, то условие $z_k - \varepsilon_k < 1$ означает, что рекордный план оптимален. Следовательно x^2 решение задачи, $x^0 = \{1, 1, 0, 0\}, f(x^0) = 4$.

Задание.

Записать математическую модель задачи. Решить задачу о рюкзаке с данными из таблицы при $n = 5, c = 30$.

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
C	20	10	12	7	7	10	12	16	9	7	13	10	9	8	15	20	13	17
P	3	4	5	2	3	4	3	5	1	3	4	2	1	5	3	5	4	4

методом ветвей и границ. Нарисовать дерево вариантов. Номера предметов в i -м варианте (i - номер студента по списку в журнале) выбираются следующим образом: $k = 0, 4$,

$$\begin{aligned} 1 \leq i \leq 14: i + 5, & \quad k=0, i=2 \\ 15 \leq i \leq 24: i + 2k - 14, & \quad k=1, i=3 \\ 25 \leq i \leq 30: i + 3k - 24, & \quad k=2, i=4 \\ & \quad k=3, i=5 \\ & \quad k=4, i=6 \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

Лабораторная работа 4

Пусть дана задача на безусловный минимум

$$f(x) \rightarrow \min, x \in R^n \quad (I)$$

и известно начальное приближение x^1 . Требуется построить приближенное (улучшить план x^1) или точное решение задачи (I). Последовательные приближения строим по формуле

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k \rho^k, k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

22

где ρ^k - направление, а θ_k - шаг на k -й итерации.

- Методом наискорейшего спуска (МНС)

Применим в случае $f(x) \in C^1$. В этом методе в качестве ρ^k выбирают направление антиградиента

$$\rho^k = - \frac{\partial f(x^k)}{\partial x}, k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

а шаг θ_k на итерации находят как решение задачи одномерной оптимизации

$$\varphi(\theta) = f(x^k + \theta \frac{\partial f(x^k)}{\partial x}) \rightarrow \min, \theta \geq 0, \quad (4)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

- Методом Ньютона (МН)

В основном применяется при условии $f(x) \in C^2, \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} > 0$

$$\text{В методе полагают } \theta_k = 1, \quad \rho^k = - \left(\frac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x^2} \right)^{-1} \frac{\partial f(x^k)}{\partial x}, k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Анализ решения.

Если на k -й итерации для плана $x^k = x^k$ выполняется условие

$$\frac{\partial f(x^k)}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

то дальнейшее улучшение планов по МНС и МН невозможно. План удовлетворяет необходимому условию оптимальности 1-го порядка, и, следовательно, подозрителен на решение. Он может быть подвергнут исследованию на оптимальность с помощью известных для задачи (I) более сильных (необходимых и достаточных) условий оптимальности.

Например. Если $f(x) \in C^2$, то условие $\frac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x^2} > 0$ является необходимым, а условие $\frac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x^2} > 0$ достаточным для локальной оптимальности плана x^k . Если $f(x), x \in R^n$ выпуклая функция, то условие (6) является критерием оптимальности плана x^k .

Пример.

Решить методом наискорейшего спуска задачу

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 7 \rightarrow \min, x \in R^2, \quad (7)$$

начав итерационный процесс в точке $x^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Решение.

$$\text{Вычисляем градиент целевой функции: } \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 4 \end{pmatrix}$$

1-я итерация. I. Проверяем для начального плана условие (6):

$$\frac{\partial f(x^1)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} \neq 0.$$

23

2. Составляем и решаем задачу (4):

$$\varphi(\theta) = (5-8\theta)^2 + (10-16\theta)^2 - 2(5-8\theta) \cdot 4(10-16\theta) + 7 \cdot 320\theta^2 - 320\theta + 32,$$

а) находим стационарную точку функции $\varphi(\theta)$:

$$\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} = 640\theta - 320 = 0, \quad \theta^0 = \frac{1}{2} > 0,$$

б) так как $\frac{\partial^2 \varphi(\theta)}{\partial \theta^2} = 640 > 0$, то $\theta^0 = \frac{1}{2}$ решение задачи

$$\varphi(\theta) \rightarrow \min, \quad \theta \geq 0 \text{ и } \theta_1 = \frac{1}{2};$$

3. Строим x^2 :

$$x^2 = x_1 - \theta_1 \frac{\partial f(x^1)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2-я итерация.

1. Проверим для x^2 условие (6):

$$\frac{\partial f(x^2)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итак, точка x^2 является стационарной точкой целевой функции.

Анализ полученного решения.

Целевая функция задачи (7) строго выпукла, так как

$$\frac{\partial^2 f(x^2)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0.$$

Следовательно, план x^2 является оптимальным и $f(x^0) = 5$.

Пример 2.

Улучшить начальный план x^1 методом наискорейшего спуска (2-й итерации) и затем применить метод Ньютона к задаче

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 \rightarrow \min, \quad x \in R^2, \quad x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Сравнить полученные планы по целевой функции.

Решение.

Вычисляем градиент и матрицу вторых производных целевой функции $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 4x_2 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} > 0$.

Улучшаем план x^1 методом наискорейшего спуска.

1-я итерация.

1. Вычисляем в точке x^1 градиент

$$\frac{\partial f(x^1)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \neq 0.$$

2. Вычисляем θ_1 :

$$\varphi(\theta) = 36\theta^2 - 20\theta + 2, \\ \frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} = 72\theta - 20 = 0, \quad \theta_1 = \frac{5}{18}.$$

3. Строим x^2 :

$$x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{18} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -19 \end{pmatrix}.$$

4. Подсчитываем $\Delta f = f(x^2) - f(x^1)$:

$$f(x^1) = 2, \quad f(x^2) = -\frac{2}{9}, \quad \Delta f = f(x^2) - f(x^1) = -2\frac{2}{9},$$

то есть целевая функция при переходе от x^1 к x^2 уменьшилась на $2\frac{2}{9}$.

2-я итерация.

1. Проверим для x^2 условие (6):

$$\frac{\partial f(x^2)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 8/9 \\ -4/9 \end{pmatrix} \neq 0$$

2. Вычисляем θ_2 :

$$\varphi(\theta) = \frac{8}{9}\theta^2 - 20\theta - 63,$$

$$\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} = \frac{16}{9}\theta - 20 = 0, \quad \theta_2 = \frac{9}{4}.$$

3. Строим x^3 :

$$x^3 = \begin{pmatrix} 7/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} - \frac{9}{4} \begin{pmatrix} 8/9 \\ -4/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/24 \\ 2/24 \end{pmatrix}.$$

4. Подсчитываем $f(x^3) - f(x^2)$:

$$f(x^3) = -239/243,$$

$$f(x^2) - f(x^3) = -239/243 + 1/9 = -58/243,$$

то есть план x^3 лучше x^2 на $58/243$.

Применим к задаче (8) метод Ньютона.

1-я итерация.

Строим x^2 по формуле (2). Считаем θ^1 ,

$$\text{имеем } \frac{\partial^2 f(x^1)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\theta^1 = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$x^2 = x^1 + \theta^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2-я итерация.

Проверим для x^2 условие (6):

$$\frac{\partial f(x^2)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

x^2 — стационарная точка целевой функции.

Анализ решения.

Так как целевая функция задачи (8) строго выпукла, то $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ оптимальный план, $f(x^0) = -1$.

План x^3 , построенный по МНС, является ε -оптимальным с $\varepsilon = f(x^3) - f(x^0) = 1 - 239/243 = \frac{6}{243}$.

ЗАДАНИЕ

Улучшить начальный план x^1 методом наискорейшего спуска (2-й итерации), а затем применить метод Ньютона к задаче $f(x) \rightarrow \min, x \in R^n$, сравнить полученный план по целевой функции.

1. $f(x) = 9x_1^2 + 16x_2^2 - 90x_1 - 128x_2 \rightarrow \min, x^1 = (0, 0)$
2. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, x^1 = (3, 0)$
3. $f(x) = x_2^2 + 2x_1^2 - 12x_1 \rightarrow \min, x^1 = (5, 3)$
4. $f(x) = 6x_1 + 32x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (0, 0)$
5. $f(x) = 16x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (2, 4)$
6. $f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min, x^1 = (8, 9)$
7. $f(x) = 5(x_1 - 2)^2 + 3(x_2 - 1)^2 \rightarrow \min, x^1 = (4, 5)$
8. $f(x) = -10(x_1 - 2)^2 - 2(x_2 - 3)^2 \rightarrow \max, x^1 = (6, 4)$
9. $f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_1 - x_2)^2 \rightarrow \min, x^1 = (3, -1)$
10. $f(x) = 20x_1 + 16x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (2, 3)$
11. $f(x) = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, x^1 = (5, 2)$
12. $f(x) = 32x_1 + 24x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (3, 10)$

13. $f(x) = x_1 + x_2 - 8x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (2, 2)$
14. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 \rightarrow \min, x^1 = (2, 2)$
15. $f(x) = 20x_1^2 - 18x_2^2 - x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, x^1 = (4, 3)$
16. $f(x) = -4(x_1 - 5)^2 (x_2 - 1)^2 \rightarrow \max, x^1 = (3, 5)$
17. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 30x_1 + 6x_2 \rightarrow \min, x^1 = (2, 6)$
18. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \min, x^1 = (4, 2, 1)$
19. $f(x) = 3x_1 - 0,2x_1^2 + x_2 - 0,5x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (4, 2)$
20. $f(x) = 2x_1 - 0,1x_1^2 + 3x_2 - 3x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (3, 1)$
21. $f(x) = 3x_1 - (x_1 - 2)^2 (2x_2 + 1)^2 \rightarrow \max, x^1 = (5, 4)$
22. $f(x) = 9x_1^2 + x_2^2 - (x_1 - 3)^2 (x_2 + 0,2)^2 \rightarrow \min, x^1 = (0, 5)$
23. $f(x) = -6x_1 + 4x_2^2 + x_1^2 - 18 \rightarrow \min, x^1 = (3, 2)$
24. $f(x) = (x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 1)^2 \rightarrow \min, x^1 = (4, 0)$
25. $f(x) = 10 - 2x_1 + x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 \rightarrow \max, x^1 = (0, 2)$
26. $f(x) = (x_1 - 10)^2 (0,1x_2 + 10)^2 \rightarrow \min, x^1 = (0, 5)$

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Лабораторная работа 5

Задача распределения ресурсов имеет вид

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = c,$$

(1)

(2)

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где n - число технологических процессов, между которыми нужно распределить сырье в объеме c , с целью получения максимальной прибыли;

x_i - количество сырья, выделяемое на i -й процесс;
 $f_i(x_i)$ - прибыль, получаемая в i -м процессе при использовании в нем сырья в объеме $x_i, i = \overline{1, n}$.

Так как целевая функция и ограничения в задаче (1)-(3) сепарабельны, то к ней применим метод динамического программирования.

Пусть c - целое число и $x_i, i = \overline{1, n}$ - могут принимать лишь целые неотрицательные значения. В этом случае для задачи (1)-(3) удобно использовать следующую табличную реализацию метода динамического программирования.

1. Рассчитываем функцию Беллмана $B_k(y)$ путем последовательного решения уравнения Беллмана

$$B_k(y) = \max_{0 \leq x_k \leq y} [f_k(x_k) + B_{k-1}(y - x_k)], k = \overline{2, n}, \quad (4)$$

с начальным условием

$$B_1(y) = f_1(y), 0 \leq y \leq c \quad (5)$$

Данные заносим в таблицу, имеющую $c+1$ столбцов и $n+1$ строк.

$B(y) \backslash y$	1	2	...	k	...	c
$B_1(y)$	$B_1(1)$	$B_1(2)$	...	$B_1(k)$	...	$B_1(c)$
$B_2(y)$	$B_2(1)$	$B_2(2)$	...	$B_2(k)$	...	$B_2(c)$
	$[x_2(1)]$	$[x_2(2)]$	...	$[x_2(k)]$	...	$[x_2(c)]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$B_n(y)$	$B_n(1)$	$B_n(2)$	...	$B_n(k)$	...	$B_n(c)$
	$[x_n(1)]$	$[x_n(2)]$	...	$[x_n(k)]$	...	$[x_n(c)]$

При заполнении таблицы в ее клетке вместе со значением

$$B_k(y), 1 \leq k \leq n, 1 \leq y \leq c$$

записываем также (в квадратных скобках) и величину $x_k(y)$, определяемую, как то число x , $0 \leq x \leq y$, на котором в уравнении (4) достигается максимум (если таких чисел несколько, записываем все).

2. Определяем оптимальное значение целевой функции задачи (1)-(3). Максимальная прибыль равна величине $B_n(c)$.

3. Определяем оптимальное распределение сырья между процессами $x_i, i = \overline{1, n}$. На таблице последовательно находим $x_n^0 = x_n(c)$, $x_i^0 = x_i(c - \sum_{j=i+1}^n x_j^0)$, $i = n-1, \dots, 2$, $x_1^0 = c - \sum_{j=2}^n x_j^0$.

Решений $x_i^0 = \{x_i^0, i = \overline{1, n}\}$ может оказаться несколько.

Замечание. Описанную выше табличную реализацию удобно применять в случае изменения условий задачи (1)-(3): при сокращении или при увеличении д-го количества сырья c , либо числа n технологических процессов. При сокращении чисел c или n для подсчета решения новой задачи рассматривается соответствующая часть таблицы, получаемая путем вычеркивания ненужных столбцов или строк. При увеличении c или n для получения решения новой задачи таблицу следует нарастить.

Решить пример.

$$\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \max, \quad (6)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

1. Заполняем таблицу. Имеем $f_1(x) = \frac{x^2}{2}$, $f_2(x) = x^2 - x$, $f_3(x) = 2x$, $c=5$, $n=3$.

а) для первой строки таблицы

$$B_1(y) = f_1(y) = \frac{y^2}{2}, 1 \leq y \leq 5$$

$$B_1(1) = 0,5; B_1(2) = 1; B_1(3) = 4,5; B_1(4) = 8; B_1(5) = 12,5$$

б) для второй строки

$$B_2(y) = \max_{0 \leq x_2 \leq y} [f_2(x_2) + B_1(y - x_2)] = \max_{0 \leq x_2 \leq y} [x_2^2 - x_2 + \frac{(y - x_2)^2}{2}], 1 \leq y \leq 5$$

$$B_2(1) = \max_{0 \leq x_2 \leq 1} [x_2^2 - x_2 + \frac{(1 - x_2)^2}{2}] = \max_{0 \leq x_2 \leq 1} [0,5; 0,5; 0,5] = 0,5;$$

$$x_2(1) = 0;$$

$$B_2(2) = \max_{0 \leq x_2 \leq 2} [x_2^2 - x_2 + \frac{(2 - x_2)^2}{2}] = \max_{0 \leq x_2 \leq 2} [0,5; 0,5; 2 + 0,5; 2 + 0,5; 2] = 2;$$

$$x_2(2) = \frac{1}{2};$$

$$B_2(3) = \max_{0 \leq z \leq 3} [0+4,5; 0+2; 2+0,5; 6+0] = 6;$$

$$x_2(3) = 3;$$

$$B_2(4) = \max_{0 \leq z \leq 4} [0+8; 0+4,5; 2+2; 6+0,5; 12+0] = 12;$$

$$x_2(4) = 4;$$

$$B_2(5) = \max_{0 \leq z \leq 5} [0+12,5; 0+8; 2+4,5; 6+2; 12+0,5; 20+0] = 20$$

$$x_2(5) = 5;$$

а) для третьей строки

$$B_3(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [t_3(z) + B_2(y-z)] =$$

$$= \max_{0 \leq z \leq y} [2z + B_2(y-z)], \quad 1 \leq y \leq 5$$

$$B_3(1) = \max_{0 \leq z \leq 1} [2z + B_2(1-z)] = \max [0+0,5; 2+0] = 2$$

$$x_3(1) = 1;$$

$$B_3(2) = 4, \quad x_3(2) = 2;$$

$$B_3(3) = 6, \quad x_3(3) = 3;$$

$$B_3(4) = 12, \quad x_3(4) = 4;$$

$$B_3(5) = 20, \quad x_3(5) = 5.$$

$y \backslash B(y)$	1	2	3	4	5
$B_1(y)$	0,5	2	4,5	8	12,5
$B_2(y)$	0,5 [0]	2 [0; 2]	6 [3]	12 [4]	20 [5]
$B_3(y)$	2 [1]	4 [2]	6 [3]	12 [4]	20 [5]

Ответ: $B_3(5) = 20$;

$$x_3^0 = x_3(5) = 0, \quad x_2^0 = x_2(5-0) = 5;$$

$$x_1^0 = 0 - x_2^0 - x_3^0 = 0.$$

2. Подсчитать решение задачи (6) при сокращении ресурса на 2.

Из таблицы получим $B_3(3) = 6$;

Два решения: $\bar{x}_3^0 = 3, \bar{x}_2^0 = 0, \bar{x}_1^0 = 0$;

$$\bar{\bar{x}}_3^0 = 0, \bar{\bar{x}}_2^0 = 3, \bar{\bar{x}}_1^0 = 0.$$

Варианты функций прибыли

А. $f(x) = C, \quad x = C$

1. $\begin{cases} x^2, & x=1,2,3, \\ 2x+1, & x=4,5,6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x=1,2,3, \\ \frac{x^2}{2}-2x+6, & x=4,5,6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4+x^2, & x=1,2,3 \\ 2x+3, & x=4,5,6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{x^2}{2}+2x, & x=1,2,3, \\ x+6, & x=4,5,6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x-2, & x=1,2,3 \\ 2x-2, & x=4,5,6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-2, & x=1,2,3 \\ 2x-3, & x=4,5,6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2, & x=1,2,3 \\ 9, & x=4,5,6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{x^3}{3}+1, & x=1,2,3 \\ x+2, & x=4,5,6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+1, & x=1,2,3 \\ \frac{x^2}{4}+3, & x=4,5,6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x, & x=1,2,3 \\ 10, & x=4,5,6 \end{cases}$

Б.

1. $\frac{1}{2}(x^2-3x)$

2. $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$

3. $\frac{1}{18}(x^3 - x^2)$

4. $\frac{1}{2}x$

5. $0,3(2^x/(x-1)^2)$

6. $0,2(x^2 + 3x)$

7. $2/(x - x^2)$

8. $0,05(3(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2})$

9. $2x$

10. $0,3(x^2 + 2x)$

В.

N ^o \ x	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	2	4	6
2	2	3	4	5	6	11
3	2	2	4	5	6	9
4	2	4	6	8	8	8
5	0	4	5	5	9	10
6	1	1	4	6	8	11
7	2	3	5	7	9	10
8	1	3	5	7	9	10
9	0	2	4	6	8	12
10	0	0	3	5	7	9

Задание.

Записать задачу в виде (1)-(2)-(3).

1. Решить задачу распределения ресурсов при $c = 6, n = 3$
2. Найти по таблице решение в случае сокращения ресурса на одну единицу, $c = 5$.
3. Эффективно ли введение еще одного дополнительного технологического процесса f_4 ?

Номер варианта выбирается по таблице:

Номер по порядку	f_1	f_2	f_3	f_4
I-10	Ai	Bi	Bi	Bi+1
II-I'	Ai-10	Bi-9	Bi-9	Bi-9
18-24	Ai-17	Bi-15	Bi-16	Bi-14
25-28	Ai-24	Bi-21	Bi-20	Bi-20

где i - порядковый номер студента по журналу.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Лабораторная работа 6

Требуется решить задачу

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \rightarrow \min, y \in Y, \quad (1)$$

$$\text{где } Y = \{y(x) \in C[a, b] : y(a) = c, y(b) = d\}$$

Кривую $y \in Y$ называют слабой минималью задачи (1), если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$J(y) \leq J(y^*), \quad \forall y \in Y,$$

$$|y(x) - y^*(x)| \leq \varepsilon, |y'(x) - y'^*(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in [a, b]$$

Схема исследования задачи (1)

1. Составляем уравнение Эйлера и находим его общее решение:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

2. Пусть $y = y(x, c_1, c_2)$ общее решение дифференциального уравнения (2). Находим экстремали задачи, подбирая произвольные постоянные c_1 и c_2 из условий

$$y(a, c_1, c_2) = c, \quad y(b, c_1, c_2) = d.$$

3. Для каждой экстремали $y^*(x)$, $x \in [a, b]$ проверяем необходимое условие слабого минимума второго порядка Лежандра-Клебша.

$$\frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y'^*(x))}{\partial y'^2} \geq 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad (3)$$

Экстремали, не удовлетворяющие условию (3), не могут быть минималью задачи (1). Исключаем их из рассмотрения.

4. Для неособых экстремалей y^* , $x \in [a, b]$ (удовлетворяющих усиленному условию Лежандра-Клебша)

$$\frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y'^*(x))}{\partial y'^2} > 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad (4)$$

проверяем условие Якоби:

$$a) \text{ с тем же уравнением Якоби вдоль } y^*(x), \quad x \in [a, b]$$

$$a(x)h_{xx}(x) + b(x)h_x(x) + c(x)h(x) = 0, \quad x \in [a, b], \quad (5)$$

где $a(x) = \frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y'_*(x))}{\partial y^2}$, $b(x) = \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y'_*(x))}{\partial y \partial y'}$

$$c(x) = \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y'_*(x))}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y'_*(x))}{\partial y^2}$$

$$x \in [a, b]$$

б) находим общее решение уравнения (5)

$$h = h(x, y_1, y_2), \quad x \in [a, b] \quad (6)$$

в) из кривых (6) выделяем класс кривых $h = h(x, y)$, $x \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $h(a, y) = 0$.

г) для кривых $h = h(x, y)$ находим наименьшую сопряженную с точкой a точку x^* , исследуя уравнение

$$h(x, y) = 0 \quad (7)$$

Если для неособой экстремали $y^*(x)$ точка $x^* \in [a, b]$, то она не является минимальной. Исключаем ее из рассмотрения.

5. Проверяем для неособых экстремалей достаточное условие слабого минимума. Если для некоторой экстремали, удовлетворяющей условию (4), не существуют точки x^* из отрезка $[a, b]$, сопряженной с a , то эта экстремаль является слабой минимальной.

6. Для слабой минимали $y = y^*(x)$, $x \in [a, b]$ вычисляем значение функционала $J = J(y^*)$.

Пример.

Исследовать задачу

$$\int_a^b (y_1^2 - y^2 + 4y \sin 2x) dx \rightarrow \min \quad (8)$$

$$y(x) \in C^{(1)}_{[0, \pi]}, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = -\frac{2}{3} \sin 2\pi. \quad (9)$$

1. Составляем уравнение Эйлера

$$y_{11} + y = 2 \sin 2x, \quad x \in [0, \pi] \quad (10)$$

2. Общее уравнение (10) имеет вид

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x - \frac{2}{3} \sin 2x, \quad x \in [0, \pi]$$

Используя (9), находим

$$c_1 = c_2 = 0$$

Таким образом, экстремаль имеет вид

$$y^*(x) = -\frac{2}{3} \sin 2x, \quad x \in [0, \pi] \quad (11)$$

3. Для экстремали проверяем условие (4):

$$\frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y'_*(x))}{\partial y^2} = 2 > 0$$

Итак, условие Лежандра-Клебша выполняется в усиленной форме, т.е. экстремаль (если она существует) является неособой, удовлетворяет необходимому условию минимума Лежандра-Клебша.

4. Составляем и решаем уравнения Якоби

$$a) \quad h_{11}(x) + h(x) = 0, \quad x \in [0, \pi]$$

б) общее решение имеет вид

$$h(x) = \bar{h}_1 \sin x + \bar{h}_2 \cos x \quad (12)$$

в) кривая семейства (12), удовлетворяющая условию $h(x) = 0$, имеет вид $h = h(x, y) = \bar{h}_1 \sin x$, $x \in [0, \pi]$

г) наименьшая сопряженная с точкой a точка кривой (12) $x^* = \pi$.

5. Вывод:

а) если $\alpha < \pi$, то кривая (II)

$$y(x) = -\frac{2}{3} \sin 2x, \quad x \in [0, \pi]$$

слабая минималь задачи (8)-(9), так как для нее выполняется достаточно условие слабого минимума;

б) если $\alpha > \pi$, то у задачи (8), (9) нет слабых минималей, так как в этом случае для экстремалей не выполняется необходимое условие Якоби;

в) если $\alpha = \pi$, то экстремаль (II) остается подозрительной на слабую минималь.

6. Пусть $\alpha \leq \pi$. Для кривой (II) вычисляем значение функционала $J(y^*)$.

Задание. Исследовать на экстремум следующие задачи:

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} e^{-2x} y^2 + e^{2x} y + \frac{3}{2} e^{-2x} y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} y^2 + y + y(2e^{-x} x^2) + \frac{1}{2} y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} y^2 + 4x e^x y - \frac{1}{2} y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} y^2 e^{2x} + 3e^{2x} xy + e^{2x} y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$$

5. $\int_0^1 (\frac{1}{2}e^{-3x}y'' + e^{-3x}y \sin x - e^{-3x}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
6. $\int_0^1 (\frac{1}{2}y'' + 2y + 4y \sin x - \frac{1}{2}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
7. $\int_0^1 (\frac{1}{2}e^{-5x}y'' + 4x^2e^{-3x}y - 2e^{-5x}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
8. $\int_0^1 (\frac{1}{2}y'' + 3y + (x^2x + x + \frac{1}{2}y^2)) dx, y(0)=C, y(1)=1$
9. $\int_0^1 (\frac{1}{2}e^{-4x}y'' + e^{-4x}y + e^{-4x} \cdot (2x^2 + 6x)y) dx, y(0)=C, y(1)=1$
10. $\int_0^1 (\frac{1}{2}e^{-5x}y'' - \frac{3}{2}e^{-5x}y - 3e^{-5x}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
11. $\int_0^1 (\frac{1}{2}y'' + 2y + 4e^xy - \frac{1}{2}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
12. $\int_0^1 (\frac{1}{2}e^{-2x}y'' + 4e^{-2x}y - \frac{1}{2}e^{-2x}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
13. $\int_0^1 (\frac{1}{2}e^{-2x}y'' + \frac{3}{2}e^{-2x}y - 4e^{-2x}y + \frac{3}{2}e^{-2x}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
14. $\int_0^1 (\frac{1}{2}e^{-3x}y'' + e^{-3x}(3e^{2x}2x^2)y - e^{-3x}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
15. $\int_0^1 (\frac{1}{2}y'' + 3y + 4e^2y + \frac{1}{2}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
16. $\int_0^1 (\frac{1}{2}e^{-3x}y'' - 13xe^{-3x}y + 1) dx, y(0)=C, y(1)=1$
17. $\int_0^1 (\frac{1}{2}y'' + 2y + 6y \sin 2x - \frac{1}{2}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
18. $\int_0^1 (\frac{1}{2}e^{-x}y'' - 13e^{-x}y \sin x - \frac{1}{2}e^{-x}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
19. $\int_0^1 (\frac{1}{2}y'' + 4y + y \sin 2x - 2y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
20. $\int_0^1 (\frac{1}{2}y'' + 3y + 4xy \cos x - \frac{1}{2}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
21. $\int_0^1 (\frac{1}{2}y'' + y + xy \sin x - \frac{1}{2}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
22. $\int_0^1 (\frac{1}{2}e^{-2x}y'' + e^{-2x}y \sin x - \frac{1}{2}e^{-2x}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
23. $\int_0^1 (\frac{1}{2}y'' + 3y + 6y \cos 2x - \frac{1}{2}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
24. $\int_0^1 (\frac{1}{2}y'' + 2y + 2y \sin x - \frac{1}{2}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
25. $\int_0^1 (\frac{1}{2}e^{2x}y'' + e^{2x}y + e^{2x}xy - \frac{1}{2}e^{2x}y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$
26. $\int_0^1 (\frac{1}{2}y'' + 5y + y \cos 3x - 2y^2) dx, y(0)=C, y(1)=1$

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа 1.....	3
Лабораторная работа 2.....	9
Лабораторная работа 3.....	16
Лабораторная работа 4.....	22
Лабораторная работа 5.....	27
Лабораторная работа 6.....	33

Лабораторный практикум по курсу "Методы оптимизации"
Часть 2

Составители: Татьяна Петровна Былик, Валерий Леонидович
Мережа, Валентин Васильевич Можаровский,
Лина Николаевна Федоренко

Ответственный за выпуск В.Л.Мережа

Редактор Е.Ф.Зайцева

Подписано к печати 07.05.86. Формат 60х84 1/16.

Бумага писчая №1. Печать офсетная. Усл.п.л. 2,1.

Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 500. Заказ 204 . Цена 6 к.

Отпечатано на ротационной машине ГТУ, г.Гомель, ул.Советская, 104.