

УДК 535.16:534.341

## ФОТОТЕРМИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ПЛОТНОМ СЛОЕ ХИРАЛЬНЫХ И АХИРАЛЬНЫХ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

Г.С. Митюрин<sup>1</sup>, Е.В. Лебедева<sup>2</sup>, А.Н. Сердюков<sup>1</sup><sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины<sup>2</sup>Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель

## PHOTOTHERMAL TRANSFORMATION OF BESSEL LIGHT BEAMS IN THE DENSE LAYER OF CHIRAL AND ACHIRAL CARBON NANOTUBES

G.S. Mityurich<sup>1</sup>, E.V. Lebedeva<sup>2</sup>, A.N. Serdyukov<sup>1</sup><sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University<sup>2</sup>Belarusian Trade and Economics University of Consumer Cooperatives, Gomel

Развита теория формирования фотодефлекционного отклика в слоях хиральных и ахиральных углеродных нанотрубок при облучении их поляризованными модами бesselевых световых пучков. В рамках исследований получено решение системы уравнений теплопроводности с использованием интегральных преобразований Фурье – Бесселя и Лапласа для трехслойной структуры.

**Ключевые слова:** фототермическое преобразование, фотодефлекционная спектроскопия, хиральные и ахиральные углеродные нанотрубки, бesselевый световой пучок, диссипация энергии, функция Бесселя, уравнение теплопроводности, преобразование Фурье – Бесселя, угол фотодефлекции.

The theory of formation of photodeflection signal in the dense layer of chiral and achiral carbon nanotubes by irradiation of polarized modes of Bessel light beams was investigated. For the first time the solution of the heat equation was obtained using integral transforms Fourier – Bessel and Laplace for a three-layer medium, which is irradiated with light polarization modes Bessel beams with an intensity distribution in space.

**Keywords:** photothermal transformation, photodeflection spectroscopy, chiral carbon nanotubes, Bessel light beam, energy dissipation, Bessel function, heat equation, Fourier – Bessel transformation, angle of photodeflection.

### Введение

Перспективным материалом в различных областях науки и техники являются углеродные нанотрубки (УНТ). Одним из главных достоинств этих структур является возможность управления свойствами создаваемых слоев УНТ путем изменения геометрических размеров и конфигурации нанообъектов. Классическая теория электродинамики не всегда может быть применена для описания нанотрубок и, следовательно, требуется поиск новых квазиклассических теоретических подходов и исследований, которые позволяли бы решать задачи микро- и макроскопической электродинамики [1], лежащие в основе теоретической базы современной фотоакустической спектроскопии.

Целью данной работы являлось построение теории фототермического преобразования энергии бesselевых световых пучков в плотных слоях хиральных и ахиральных углеродных нанотрубок, находящихся на диэлектрической подложке, для случая трансверсальной геометрии взаимодействия падающего и пробного пучков (рисунок 0.1). Заметим, что не составляет трудности рассмотрение случая коллинеарной геометрии взаимодействия световых пучков.

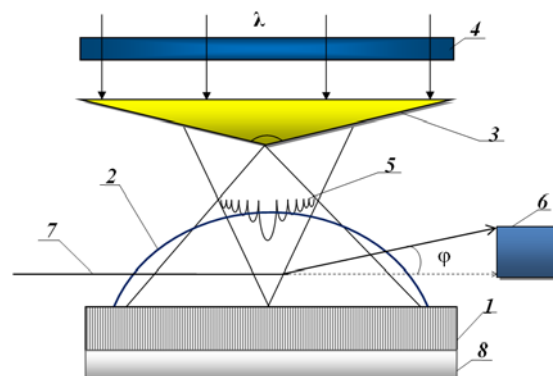


Рисунок 0.1 – Схема регистрации фотодефлекционного сигнала:

- 1 – слой углеродных нанотрубок;
- 2 – «термическая» линза;
- 3 – аксикон;
- 4 – модулятор;
- 5 – ТЕ-мода БСП;
- 6 – позиционно-чувствительный фотодетектор;
- 7 – зондирующий луч;
- 8 – подложка

### 1 Расчет проводимости ахиральных и хиральных нанотрубок

Электронные свойства графена будем описывать на основе закона дисперсии [2]

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \quad (1.1)$$

$$= \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(ap_x) \cos\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_y\right) + 4 \cos^2\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_y\right)},$$

в котором учтено взаимодействие только трёх соседних атомов гексагональной структуры. В выражении (1.1)  $\gamma_0 \approx 2,7 \text{ эВ}$  – интеграл перекрытия,  $a = 3b / 2\hbar$ ,  $b$  – расстояние между соседними атомами углерода в графеновой плоскости ( $b = 0,142 \text{ нм}$ ),  $p_x, p_y$  – проекции квазиимпульса вектора  $\mathbf{p}$ ,  $\hbar$  – приведенная постоянная Планка, знак «плюс» соответствует зоне проводимости, а знак «минус» – валентной зоне. Законы дисперсии для углеродных нанотрубок типов zigzag и armchair можно легко получить, выполняя соответственно в соотношении (1.1) замены  $\{p_x \rightarrow p_z, p_y \rightarrow p_\phi\}$  и  $\{p_x \rightarrow p_\phi, p_y \rightarrow p_z\}$  соответственно:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) =$$

$$= \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(ap_z) \cos\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_\phi\right) + 4 \cos^2\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_\phi\right)},$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) =$$

$$= \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(ap_\phi) \cos\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_z\right) + 4 \cos^2\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_z\right)}.$$

Нанотрубки типа armchair обладают металлической проводимостью при всех значениях  $m$ , а нанотрубки типа zigzag являются металлами только при  $m = 3q$ , где  $q$  – целое число. Как отмечено в [1], одной из важных особенностей углеродных нанотрубок является то, что при помещении УНТ в продольное магнитостатическое поле меняется характер их электрической проводимости, и, следовательно, изменяя величину намагниченности можно управлять проводимостью нанотрубок.

Далее рассмотрим уравнение Больцмана, описывающее движение  $\pi$ -электронов по цилиндрической поверхности однослойной нанотрубки в полуклассическом приближении [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + eE_z \frac{\partial f}{\partial p_z} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = J(F(\mathbf{p}); f(\mathbf{p}, z, t)), \quad (1.2)$$

где  $e$  – заряд электрона;  $v_z = \partial \varepsilon(\mathbf{p}) / \partial p_z$  – скорость электрона;  $J(F, f)$  – интеграл столкновений;  $F(\mathbf{p}) = [1 + \exp\{\varepsilon(\mathbf{p}) / k_B T\}]^{-1}$  – равновесная функция распределения Ферми;  $T$  – температура;  $k_B$  – постоянная Больцмана.

Для вычисления интеграла столкновений воспользуемся приближением времени релаксации, в соответствии с которым

$$J(F(\mathbf{p}); f(\mathbf{p}, z, t)) \cong \nu [F(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}, z, t)],$$

где  $\nu = 1 / \tau$  – частота релаксации;  $\tau$  – среднее время свободного пробега электрона.

Ограничение, которое накладывается на полуклассическую модель описания движения электрона по поверхности УНТ со стороны высоких частот, можно записать следующим образом:

$$\omega < \omega_l,$$

где  $\omega_l = 2v_F / R_n$  соответствует металлическим нанотрубкам,  $\omega_l = 2v_F / 3R_{cn}$  – полупроводниковым нанотрубкам;  $v_F = a \cdot \gamma_0$  – скорость  $\pi$ -электронов на уровне Ферми;  $R_{cn}$  – радиус нанотрубки.

Далее полуклассическая модель применяется для вычисления аксиального тока в прямой, бесконечно длинной нанотрубке, который возникает под действием электрического поля бегущей волны  $E_z = \text{Re}[E_z^0 \exp\{i(hz - \omega t)\}]$ , где  $h$  – константа распространения.

Найдём малое возмущение  $\delta f$  из уравнения (1.2) путем линейного по полю приближения с учётом того, что  $E_z = F + \text{Re}[\delta f \exp\{i(hz - \omega t)\}]$ :

$$\delta f = -i \frac{\partial F}{\partial p_z} \frac{eE_z^0}{\omega - hv_z + i\nu}.$$

Тогда плотность поверхностного аксиального тока  $j_z = \text{Re}[j_z^0 \exp\{i(hz - \omega t)\}]$  может быть определена в результате интегрирования следующего равенства

$$j_z = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^2} \iint v_z f d^2 \vec{p}. \quad (1.3)$$

Выражение (1.3) можно представить в более компактном виде

$$j_z^0 = \sigma_{zz}(h, \omega) E_z^0,$$

где  $\sigma_{zz}$  – аксиальная проводимость нанотрубки, которая может быть определена следующим образом:

$$\sigma_{zz}(h, \omega) = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^2} \iint \frac{\partial F}{\partial p_z} \frac{v_z d^2 \vec{p}}{\omega - hv_z + i\nu}. \quad (1.4)$$

Интегрирование в равенстве (1.4) выполняется по первой зоне Бриллюэна. При скоростях электронов много меньших скорости света ( $v_e \ll c$ ,  $c$  – скорость света) электрическая проводимость может быть описана соотношением:

$$\sigma_{zz}(\omega) =$$

$$= -\frac{2i w_{cn} e^2}{3\pi \hbar (mb)} \frac{1}{(\omega + i\nu)} \sum_{s=1}^m \int_{-P_0}^{P_0} v_z^2(p_z, S) \frac{\partial F}{\partial E} dP_z, \quad (1.5)$$

где  $p_z$  – проекция импульса электрона проводимости на ось нанотрубки,

$$P_0 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3b\sqrt{n^2 + nm + m^2}}};$$

$\nu = 1 / \tau$  – частота релаксации неравновесных электронов.

Выражения для проводимости углеродных нанотрубок типов zigzag и armchair соответственно имеют вид:

$$\sigma_{zz}(\omega) = -\frac{i w_{cn} e^2}{\sqrt{3} \pi \hbar R (\omega + i\nu)} \sum_{s=1}^m \int_{-p_0}^{p_0} v_z^2(P_z, S) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} dP_z, \quad (1.6)$$

$$\sigma_{zz}(\omega) = -\frac{i w_{cn} e^2}{\pi \hbar R (\omega + i\nu)} \sum_{s=1}^m \int_{-p_0}^{p_0} v_z^2(P_z, S) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} dP_z. \quad (1.7)$$

Очевидно, что радиус  $R_{cn}$  определяет размер нанотрубки ( $R_{cn} \sim mb, m \sim 100$ ).

Допустим, что для обоих нанотрубок известен закон дисперсии электронов в виде зависимости энергии от квазиимпульса  $\varepsilon(\vec{p})$ . Используется приближение  $\pi$ -электронов (без спина) и сильной связи электронов в атомах. Заметим, что структура является гексагональной:

$$\varepsilon(p_z, s) = \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(a p_z) \cos\left(\frac{\pi S}{m}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\pi S}{m}\right)}; \quad (1.8)$$

$$\varepsilon(p_z, s) = \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(ap_\varphi) \cos\left(\frac{\pi p_z}{\sqrt{3}}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\pi p_z}{\sqrt{3}}\right)}, \quad (1.9)$$

где  $p_\varphi = \pi S/R$  – проекция квазиимпульса на ось  $O\varphi$  в цилиндрической системе координат.

Выражения (1.8), (1.9) представляют законы дисперсии для нанотрубок типов zigzag и armchair соответственно. Для углеродных нанотрубок (графен) знаки «плюс» и «минус» определяются аналогично выражению (1.1).

Отдельно рассмотрим хиральные углеродные нанотрубки. Запишем закон дисперсии [3], [4]:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \pm \gamma_0 \left( 3 + 2 \cos(\mathbf{k} \mathbf{a}_1) + 2 \cos(\mathbf{k} \mathbf{a}_2) + 2 \cos(\mathbf{k}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)) \right)^{1/2} = \pm \gamma_0 \left( 1 + 4 \cos\left(\mathbf{k} \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2}\right) \cos\left(\mathbf{k} \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{2}\right) + 4 \cos^2\left(\mathbf{k} \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{2}\right) \right)^{1/2}, \quad (1.10)$$

где  $\mathbf{k}$  – волновой вектор,  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  – вектора трансляций гексагональной решетки.

При переходе в выражении (1.10) от волнового вектора  $\mathbf{k}$  к вектору квазиимпульса  $\mathbf{p}$  можно получить

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \pm \gamma_0 \left( 1 + 4 \cos\left(\mathbf{p} \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2\hbar}\right) \cos\left(\mathbf{p} \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{2\hbar}\right) + 4 \cos^2\left(\mathbf{p} \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{2\hbar}\right) \right)^{1/2}. \quad (1.11)$$

С учетом (1.11) и модуля вектора хиральности

$$|\mathbf{C}_h| = a \sqrt{n^2 + nm + m^2},$$

получим закон дисперсии в цилиндрической системе координат ( $p_x \rightarrow p_\varphi, p_y \rightarrow p_z$ )

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \pm \gamma_0 \left[ 1 + 4 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left( \frac{3\pi q(n+m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n-m)}{4\hbar} p_z \right) \right) \times \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \left( \frac{\pi q(n-m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n+m)}{4\hbar} p_z \right) \right) + 4 \cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left( \frac{\pi q(n-m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n+m)}{4\hbar} p_z \right) \right) \right]^{1/2}. \quad (1.12)$$

Проекция вектора скорости электрона на ось  $z$  есть частная производная дисперсии по соответствующей проекции квазиимпульса [5]

$$v(p_z) = \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial p_z}. \quad (1.13)$$

С учетом соотношения (1.12) и (1.13) получим выражение для проекции вектора скорости электрона

$$v(p_z) = \left[ \pm \sqrt{3} \gamma_0 a \left[ m \sin(\psi_1 - \psi_2) - n \sin(\psi_1 + \psi_2) - (n+m) \sin 2\psi_2 \right] / \left[ \hbar \sqrt{n^2 + nm + m^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times 1 + 4 \cos \psi_1 \cos \psi_2 + 4 \cos^2 \psi_2 \right] \right], \quad (1.14)$$

где

$$\psi_1(p_z) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left( \frac{3\pi q(n+m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n-m)}{4\hbar} p_z \right); \\ \psi_2(p_z) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left( \frac{\pi q(n-m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n+m)}{4\hbar} p_z \right).$$

Подставив в выражение (1.5) соотношение для проекции вектора скорости электрона, получим

$$\sigma_{zz}(\omega) = -\frac{ie^2}{\pi \hbar \sqrt{n^2 + nm + m^2} (\omega + i\nu)} \times \sum_{s=1}^m \int_{-p_0}^{p_0} v_z^2(p_z, s) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} dp_z. \quad (1.15)$$

Будем считать, что носителями тока являются электроны, а не дырки, так как их подвижность  $\mu_n \ll \mu_p$ . Тогда в формулах (1.11), (1.12) и (1.14) следует оставить знак «плюс». Так как нанотрубки типов armchair и zigzag не обладают хиральностью, то при расчетах диссипации

световой энергии следует ограничиваться линейно поляризованным излучением.

Содержащаяся в выражениях (1.6), (1.7) и (1.15) величина  $\partial F/\partial \varepsilon$  определяется по формуле [5]

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \frac{\exp(\varepsilon/k_B T)}{k_B T [1 + \exp(\varepsilon/k_B T)]^2}, \quad (1.16)$$

где  $F(\bar{p}) = [1 + \exp\{\varepsilon(\bar{p})/k_B T\}]^{-1}$  – равновесная функция распределения Ферми;  $T$  – температура;  $k_B$  – постоянная Больцмана.

Используя теорему о среднем

$$P_0 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3w_{cn}b}},$$

$$\int_{-P_0}^{P_0} f(x) dx \approx f(P_0)(P_0 - (-P_0)) = 2P_0 f(P_0),$$

получим выражения для аксиальных проводимостей углеродных нанотрубок трех типов:

– zigzag:

$$|\sigma_{zz}(\omega)| = \frac{2w_{cn}e^2P_0}{\sqrt{3}\pi^2R_{cn}\sqrt{(\omega^2 + v^2)}k_B T} \times \sum_{s=1}^m \frac{\exp(\varepsilon_0/k_B T)}{[1 + \exp(\varepsilon_0/k_B T)]^2}, \quad (1.17)$$

– armchair:

$$|\sigma_{zz}(\omega)| = \frac{2w_{cn}e^2P_0}{\pi^2R_{cn}\sqrt{(\omega^2 + v^2)}k_B T} \times \sum_{s=1}^m \frac{\exp(\varepsilon_0/k_B T)}{[1 + \exp(\varepsilon_0/k_B T)]^2}, \quad (1.18)$$

– chiral:

$$\sigma_{zz}(\omega) = \frac{2P_0ie^2}{\pi\hbar\sqrt{n^2 + nm + m^2}(\omega + iv)} \times \sum_{s=1}^m v_z^2(p_z, s) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}. \quad (1.19)$$

Ряды, содержащиеся в (1.17)–(1.19), можно просуммировать численно.

Таким образом, полученные выражения дают возможность рассчитать проводимость углеродных поглощающих нанотрубок. Объёмная плотность тепловых источников, содержащая  $|\sigma_{zz}|$ , позволяет определить решение тепловой задачи и в последующем определить амплитудно-фазовые характеристики фотоакустического сигнала, возникающего в массиве углеродных нанотрубок.

## 2 Построение модели возбуждения фотодефлекционного сигнала в слое хиральных и ахиральных углеродных нанотрубок под действием бесселевых световых пучков

Воздействие бесселевого светового пучка приводит к периодическому изменению температурного поля в поглощающем слое углеродных

нанотрубок, окружающей среде и подложке. При этом изменения температур может быть описано на основе системы уравнений теплопроводности

$$\begin{cases} \nabla^2 T_1 - \sigma_1 T_1 = 0, & z < 0, \\ \nabla^2 T - \sigma_s T = -Q^{TE} \exp(1 + \cos \Omega t), & 0 \leq z \leq l, \\ \nabla^2 T_2 - \sigma_2 T_2 = 0, & z > l, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $T_1, T, T_2$  – значения температуры соответственно в окружающей среде, слое углеродных нанотрубок и подложке;  $\sigma_i = (i\Omega/\beta_i)^{1/2}$ ,  $\beta_i$  – коэффициенты температуропроводности в окружающей среде, слое углеродных нанотрубок и подложке,  $\beta_s = k_{cn}/\rho_0 C$ ,  $k_{cn}$  – коэффициент теплопроводности в слое УНТ,  $\rho_0$  – плотность,  $c_v$  – удельная теплоемкость. Согласно [6], двумерный коэффициент квантовой теплопроводности для области температур, ниже температуры Дебая, определяется следующим образом

$$k_{cn} = G_0 N_{phonon} L/L_0,$$

где  $G_0 = \pi^2 k_B^2 T/3h$  – универсальный квант тепла,  $N_{phonon} = 4N(n^2 + nm + m^2)/d_R$  – полное число фононных каналов в УНТ,  $N$  – число шестиугольников в элементарной ячейке нанотрубки,  $d_R$  – наибольший общий делитель для чисел  $(2n + m)$  и  $(2m + n)$ ,  $L$  – длина нанотрубки,  $L_0 = 2\pi R$  – длина поперечной границы нанотрубки, перпендикулярной тепловому потоку.

Объёмная плотность тепловых источников  $Q$ , записанная в системе уравнений (2.1), связана с аксиальной проводимостью слоя УНТ следующим выражением:

$$Q = \sigma_{cn} |E|^2, \quad (2.2)$$

где  $|\sigma_{cn}| = 2\pi|\sigma_{zz}|/\lambda$  – проводимость слоя УНТ.

Учитывая выражение для интенсивности волны

$$I = 1/2 n\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} |E|^2,$$

выражение для скорости диссипации энергии можно представить в виде

$$Q = 2\alpha_{eff} I_0 e^{-2\alpha_{eff} z} = \frac{2\sigma_{cn}}{c\sqrt{\varepsilon'}\varepsilon_0} I_0 e^{-2\alpha_{eff} z}, \quad (2.3)$$

где  $\alpha_{eff}$  – коэффициент поглощения, который может быть определен следующим образом:

$$\alpha_{eff} = \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon''}{\sqrt{\varepsilon'}} = \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon''}{n}.$$

В свою очередь, проводимость связана с мнимой частью диэлектрической проницаемости формулой

$$\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon'', \quad \varepsilon'' = \sigma_{cn}/\omega\varepsilon_0$$

$$(\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{12} \text{ ф/м}).$$

Скорость диссипации энергии  $TE$ -моды бесселевых световых пучков в слое поглощающих углеродных нанотрубок удобно записать в цилиндрических координатах [7], [8]:

$$Q^{TE} = \frac{2|\sigma_{cn}|I_0}{c\sqrt{\epsilon'\epsilon_0}} \frac{c}{4\pi} k_0 \epsilon_\alpha (n_1^2 + n_2^2) \times \left[ \frac{m^2}{(qr)^2} J_m^2(qr) + J_m'^2(qr) \right] \exp(-\alpha_{eff} z). \quad (2.4)$$

С учетом выражения для скорости диссипации энергии (2.4) перепишем уравнение для временной части, описывающее распределение температуры в исследуемом образце

$$\nabla^2 T - \sigma_S T = -A_0 B^{TE} e^{-\alpha_{eff} z - r^2/w_0^2}, \quad (2.5)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{k_{cn}} \frac{2|\sigma_{cn}|I_0}{c\sqrt{\epsilon'\epsilon_0}} \frac{c}{4\pi} k_0 \epsilon_\alpha (n_1^2 + n_2^2),$$

$$B^{TE} = \frac{m^2}{(qr)^2} J_m^2(qr) + J_m'^2(qr), \quad \sigma_S^2 = i\Omega/\beta_S.$$

Решение уравнения (2.5) ищем в виде

$$T(r, z) = T^u(r, z) + T^o(r, z),$$

где  $T^u(r, z)$  – частное решение уравнения (2.5), а  $T^o(r, z)$  – общее решение соответствующего (2.5) однородного дифференциального уравнения второго порядка. Частное решение уравнения теплопроводности (2.5) ищем в виде

$$T^u(r, z) = \int_0^\infty p C(p) J_0(rp) e^{-\alpha_{eff} z} dp, \quad (2.6)$$

где  $p$  – параметр преобразования Фурье – Бесселя.

Вычислив частные производные первого и второго порядка (2.6) по переменным  $r$  и  $z$  и подставив их в (2.5), получим

$$\int_0^\infty p C(p) (\alpha_{eff}^2 - p^2 - \sigma_S^2) J_0(rp) e^{-\alpha_{eff} z} dp = -A_0 B^{TE} e^{-\alpha_{eff} z - r^2/w_0^2}.$$

Пусть  $\bar{f}(p) = C(p) (\alpha_{eff}^2 - p^2 - \sigma_S^2) e^{-\alpha_{eff} z}$ . Тогда параметр  $C(p)$  может быть определен следующим равенством

$$C(p) = \frac{\bar{f}(p) e^{\alpha_{eff} z}}{(\alpha_{eff}^2 - p^2 - \sigma_S^2)}. \quad (2.7)$$

Согласно (2.7), выражение для  $f(r)$  примет вид

$$f(r) = \int_0^\infty p J_0(rp) \bar{f}(p) dp = -A_0 B^{TE} e^{-\alpha_{eff} z - r^2/w_0^2}.$$

Основываясь на свойствах преобразования Фурье – Бесселя и вычислив получившийся интеграл [см. приложение], несложно записать для  $\bar{f}(p)$

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty r J_0(pr) f(r) dr = -A_0 e^{-\alpha_{eff} z} \int_0^\infty B^{TE} r J_0(pr) dr = -A_0 e^{-\alpha_{eff} z} I, \quad (2.8)$$

$$\text{где } I = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} q w_0 \right)^{2m} \left[ \frac{m^2}{q^2} R_1(p) + \frac{1}{4} q^2 w_0^4 R_2(p) \right],$$

$$a(p) = \frac{1}{4} p^2 w_0^2, \quad b = \frac{1}{4} q^2 w_0^2,$$

$$R_1(p) = \left( \frac{1}{(m+1)!} - \frac{a(p)(m+2)!}{(m+1)!(m+1)!} \right) b^2 + 2 \left( \frac{a(p)}{m!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) b + \frac{(m-1)!}{m!m!} - \frac{a(p)}{m!},$$

$$R_2(p) = \left( \frac{(m+3)!}{(m+2)!(m+2)!} - \frac{a(p)(m+4)!}{(m+2)!(m+2)!} \right) b^2 + 2 \left( \frac{a(p)(m+3)!}{(m+1)!(m+2)!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) b + \frac{1}{(m+1)!} - \frac{a(p)(m+2)!}{(m+1)!(m+1)!}.$$

С учетом (2.7) и (2.8) можно представить частное решение уравнения теплопроводности

$$T^u = \int_0^\infty p J_0(pr) \left[ \frac{A_1 [N_1 R_1(p) + N_2 R_2(p)] e^{-\alpha_{eff} z}}{\alpha_{eff}^2 - \sigma_S^2 - p^2} \right] dp, \quad (2.9)$$

$$\text{где } A_1 = \frac{1}{2} A_0 \left( \frac{1}{2} q w_0 \right)^{2m}, \quad N_1 = \frac{m^2}{q^2}, \quad N_2 = \frac{1}{4} q^2 w_0^4.$$

Решение соответствующего (2.5) однородного дифференциального уравнения второго порядка  $\nabla^2 T - \sigma_S T = 0$  ищем в виде

$$T^o(r, z) = \int_0^\infty p J_0(rp) [A(p) e^{\xi_{cn} z} + B(p) e^{-\xi_{cn} z}] dp,$$

$$\text{где } \xi_{cn}^2 = p^2 + \sigma_S^2.$$

Учитывая стандартные граничные условия получены выражения для температур в трехслойной системе «окружающая среда – образец – подложка»

$$\left\{ \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty p J_0(pr) E(p) e^{\xi_1 z} e^{-r^2/w_0^2} dp, \\ T &= \int_0^\infty p J_0(pr) \times \\ &\times [A(p) e^{\xi_{cn} z} + B(p) e^{-\xi_{cn} z} + C(p) e^{-\alpha_{eff} z}] dp, \\ T_2 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty p J_0(pr) D(p) e^{-\xi_2(z-1)} e^{-r^2/w_0^2} dp, \end{aligned} \right.$$

$$\text{где } C(p) = \frac{A_1 [N_1 R_1(p) + N_2 R_2(p) - N_3 R_3(p)]}{\alpha_{eff}^2 - \sigma_S^2 - p^2};$$

$$A(p) = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} \cdot C(p);$$

$$B(p) = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} C(p);$$

$$E(p) = \frac{2k_s \xi_{cn} c_2 - a_2 d_1 - b_2 d_2}{b_1 a_2 - b_2 a_1} C(p);$$

$$D(p) = \frac{d_1 \left( a_1 e^{-l(\alpha_{eff} + \xi_{cn})} + b_1 e^{-l(\alpha_{eff} - \xi_{cn})} \right) - 2k_{cn} \xi_{cn} c_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} C(p);$$

$$a_1 = k_{cn} \xi_{cn} - k_1 \xi_1, \quad a_2 = (k_{cn} \xi_{cn} + k_2 \xi_2) e^{\xi_{cn} l};$$

$$b_1 = k_{cn} \xi_{cn} + k_1 \xi_1, \quad b_2 = (k_{cn} \xi_{cn} - k_2 \xi_2) e^{-\xi_{cn} l};$$

$$c_1 = k_{cn} \alpha_{eff} + k_1 \xi_1, \quad c_2 = (k_{cn} \alpha_{eff} - k_2 \xi_2) e^{-\alpha_{eff} l};$$

$$d_1 = k_{cn} \alpha_{eff} - k_{cn} \xi_{cn}, \quad d_2 = k_{cn} \alpha_{eff} + k_{cn} \xi_{cn};$$

$$\xi_{1,2, cn}^2 = p^2 + \sigma_{1,2, S}^2.$$

Тогда полное решение уравнения теплопроводности можно записать следующим образом

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\infty p J_0(pr) \times$$

$$\times \left[ A(p) e^{\xi_{cn} z} + B(p) e^{-\xi_{cn} z} + C(p) e^{-\alpha_{eff} z} \right] e^{-r^2/w_0^2} dp.$$

С учетом соотношения для скорости диссипации энергии (2.4), и выражения для угла дефлексии пробного лазерного пучка (случай трансверсальной геометрии взаимодействия)

$$\Phi^T = \frac{1}{n_{eff}} \frac{dn_{eff}}{dT} \int \frac{dT(x, y, z, t)}{dx} dy, \quad (2.10)$$

несложно получить величину фотодефлекционного отклика, возникающего вследствие воздействия бesselового светового пучка на слой хиральных или ахиральных углеродных нанотрубок.

Выражение для усредненной по пространству температуры будет иметь вид

$$\bar{T} = 2\pi \left[ \frac{b_1^0 c_2^0 - b_2^0 c_1^0}{b_1^0 a_2^0 - b_2^0 a_1^0} e^{\sigma_s l} + \frac{a_1^0 c_2^0 - a_2^0 c_1^0}{b_1^0 a_2^0 - b_2^0 a_1^0} e^{-\sigma_s l} + e^{-\alpha_{eff} l} \right] \times$$

$$\times \frac{A_1 [N_1 R_1(0) + N_2 R_2(0)]}{\alpha_{eff}^2 - \sigma_s^2} B^{TE} e^{-r^2/w_0^2},$$

где

$$a_1^0 = k_{cn} \sigma_s - k_1 \sigma_1, \quad a_2^0 = (k_{cn} \sigma_s + k_2 \sigma_2) e^{\sigma_s l};$$

$$b_1^0 = k_{cn} \sigma_s + k_1 \sigma_1, \quad b_2^0 = (k_{cn} \sigma_s - k_2 \sigma_2) e^{-\sigma_s l};$$

$$c_1^0 = k_{cn} \alpha_{eff} + k_1 \sigma_1, \quad c_2^0 = (k_{cn} \alpha_{eff} - k_2 \sigma_2) e^{-\alpha_{eff} l}.$$

Таким образом, амплитуда фотодефлекционного сигнала, определяемая выражением (2.10), сложным образом зависит от диссипативных, геометрических и теплофизических параметров слоя углеродных нанотрубок, окружающей среды и подложки, а также энергетически-временных и поляризационных свойств БСП.

### 3 Результаты и их обсуждение

В связи с громоздкостью выражения (2.10), а также сложной функциональной зависимостью угла фотодефлексии от параметров среды и свойств возбуждающего излучения, был проведен численный и графический анализ.

На рисунке 3.1 представлена зависимость амплитуды фотодефлекционного сигнала, возникающего при воздействии на слой вертикально ориентированных УНТ поляризационных мод БСП. Анализ амплитуды фотодефлекционного сигнала показывает, что величина результирующего отклика осциллирует спадая по экспоненте с увеличением радиальной координаты  $\rho$ . Следует отметить, что амплитуда фотоакустического сигнала для металлических УНТ ( $n - m = 3q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ) оказалась выше, чем у полупроводниковых ( $n - m \neq 3q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ).

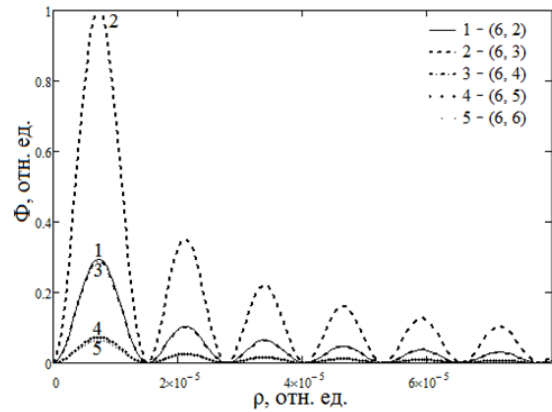


Рисунок 3.1 – Зависимость фотодефлекционного отклика от радиальной координаты  $\rho$  для разных УНТ

Амплитуда фотодефлекционного сигнала является симметричной функцией относительной координаты  $x/w_0$  (рисунок 3.2). Причем максимальное значение амплитуды ФД сигнала для слоя металлических УНТ с параметрами (6,3) приблизительно в 20 раз выше результирующего отклика для полупроводниковых нанотрубок (6,6).

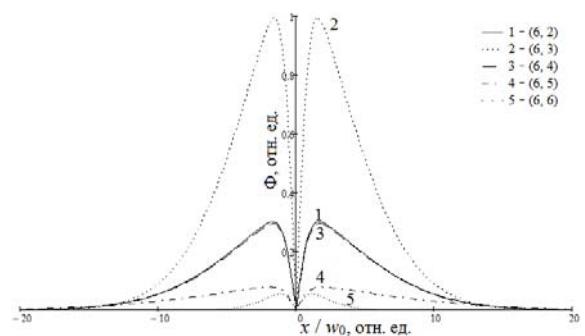


Рисунок 3.2 – Зависимость фотодефлекционного отклика от относительной координаты для разных УНТ

В результате произведенного графического анализа показано, что угол фотодефлексии является симметричной функцией нормированной координаты  $x/w_0$  (рисунок 3.3). При увеличении частоты модуляции  $\Omega$  приблизительно от 50 Гц до 150 Гц величина фотодефлекционного отклика  $\Phi(x/w_0)$  уменьшается. Это может быть связано с

тем, что исследуемый образец не успевает реагировать на изменения его теплофизических свойств из-за термоинерции.

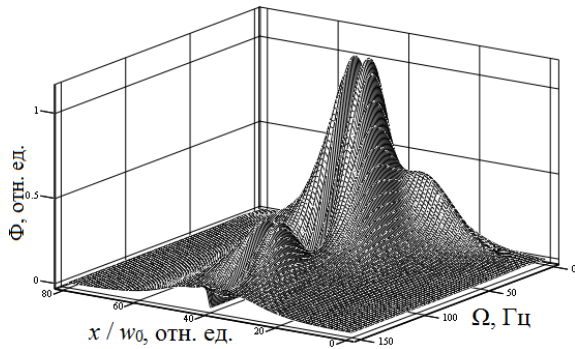
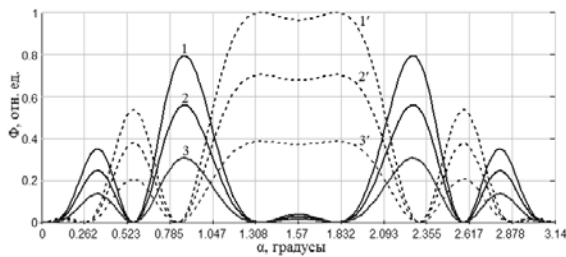


Рисунок 3.3 – Зависимость фотодефлекционного отклика от относительной координаты и частоты модуляции

На рисунке 3.4 представлена зависимость амплитуды фотодефлекционного сигнала от угла конусности  $\alpha$  для слоёв углеродных нанотрубок с различными индексами хиральности. При определенном значении параметра конусности и в зависимости от порядка моды бesselевых световых пучков ( $m = 0, m = 1$ ) может наблюдаться максимум или минимум амплитуды фотодефлекционного отклика, чем обусловлена возможность управления величиной фотодефлекционного сигнала при варьировании угла конусности аксикона.



$m = 0$ : 1 – (2; 1), 2 – (3; 1), 3 – (4; 1);  
 $m = 1$ : 1' – (2; 1), 2' – (3; 1), 3' – (4; 1)

Рисунок 3.4 – Зависимость фотодефлекционного отклика от угла конусности при облучении УНТ различной хиральности ТЕ-модами БСП

### Заключение

Таким образом, в работе построена теоретическая модель описания фотодефлекционного отклика, возбуждаемого в слоях ахиральных и хиральных углеродных нанотрубок, локализованных на подложке, при воздействии БСП.

Установлено, что величина результирующего фотодефлекционного сигнала определяется параметром хиральности однослойных углеродных нанотрубок. Показано, что амплитуда фотодефлекционного отклика существенным образом зависит от угла конусности бesselевого светового пучка; при определённом значении параметра  $\alpha$  может наблюдаться максимум или минимум

амплитудного значения фотодефлекционного отклика – в зависимости от порядка используемой ТЕ-моды БСП.

Продемонстрирована возможность эффективного управления амплитудой фотодефлекционного отклика путем изменения угла конусности БСП, что позволяет воздействовать на скорость диссипации энергии поляризационных мод квазибездифракционного пучка и соответствующее распределение поля температур в исследуемом низкоразмерном образце, локализованном на диэлектрической подложке. Механизм управления может быть реализован на базе электрооптических кристаллов, обладающих эффектом Поккельса или применением оптических схем, включающих элементы, которые позволяют осуществлять перестройку конусности бездифракционного излучения.

### Приложение

Выпишем интеграл

$$I = \int_0^{\infty} r J_0(pr) \left[ \left( \frac{m}{qr} \right)^2 J_m^2(qr) + J_m'^2(qr) \right] e^{-r^2/w_0^2} dr = I_1 + I_2, \quad (П.1)$$

где

$$I_1 = \left( \frac{m}{q} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{r} J_0(pr) J_m^2(qr) e^{-r^2/w_0^2} dr, \quad (П.2)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} r J_0(pr) J_m'^2(qr) e^{-r^2/w_0^2} dr. \quad (П.3)$$

Перейдем в интеграле (П.2) к переменной  $t = r^2$ :

$$I_1 = \left( \frac{m}{q} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{r} J_0(pr) J_m^2(qr) e^{-r^2/w_0^2} dr = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{q} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{t} J_0(p\sqrt{t}) J_m^2(q\sqrt{t}) e^{-t/w_0^2} dt.$$

Для взятия интеграла воспользуемся преобразованием Лапласа [9]

$$\int_0^{\infty} t^{\nu-1} J_{2\mu_1}(2\alpha_1^{1/2} t^{1/2}) \dots J_{2\mu_n}(2\alpha_n^{1/2} t^{1/2}) \exp(-p_0 t) dt = \frac{\Gamma(\nu + M) p_0^{-\nu-M} \alpha_1^{\mu_1} \dots \alpha_n^{\mu_n}}{\Gamma(2\mu_1 + 1) \dots \Gamma(2\mu_n + 1)} \times \Psi_2 \left( \nu + M; 2\mu_1 + 1, \dots, 2\mu_n + 1; -\frac{\alpha_1}{p_0}, \dots, -\frac{\alpha_n}{p_0} \right), \quad (П.4)$$

где  $\text{Re } p > 0, M = \mu_1 + \dots + \mu_n, \text{Re}(M + \nu) > 0,$

$$\Psi_2(\alpha; \gamma_1, \dots, \gamma_n; z_1, \dots, z_n) = \sum \frac{(\alpha)_{m_1 + \dots + m_n} \cdot z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}}{(\gamma)_{m_1} \dots (\gamma)_{m_n} \cdot m_1! \dots m_n!}$$

– вырожденный гипергеометрический ряд многих переменных,  $(\alpha)_m = \Gamma(\alpha + m)/\Gamma(\alpha), \Gamma(n) = (n-1)!$  – гамма-функция.

Учитывая (П.2)–(П.4) и подставляя в (П.1) получим конечное соотношение для искомого интеграла

$$I = \frac{1}{2} b^m \left[ \frac{m^2}{q^2} R_1(p) + w_0^2 b R_2(p) \right],$$

где

$$R_1(p) = \left( \frac{1}{(m+1)!} - \frac{a(p)(m+2)!}{(m+1)!(m+1)!} \right) b^2 + 2 \left( \frac{a(p)}{m!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) b + \frac{(m-1)!}{m!m!} - \frac{a(p)}{m!},$$

$$R_2(p) = \left( \frac{(m+3)!}{(m+2)!(m+2)!} - \frac{a(p)(m+4)!}{(m+2)!(m+2)!} \right) b^2 + 2 \left( \frac{a(p)(m+3)!}{(m+1)!(m+2)!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) b + \frac{1}{(m+1)!} - \frac{a(p)(m+2)!}{(m+1)!(m+1)!}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Максименко, С.А. Электродинамика углеродных нанотрубок / С.А. Максименко, Г.Я. Слепня // Радиотехника и электроника. – 2002. – Т. 47. – С. 261–280.
2. *The band theory of graphite* / P.R. Wallace [et al.] // Physical Review. – 1947. – Vol. 71, № 9. – P. 622–634.
3. Saito, R. Physical properties of carbon nanotubes / R. Saito, M.S. Dresselhaus, G. Dresselhaus. – London: Imperial College Press, 1999. – 251 p.

4. Конобеева, Н.Н. Динамика предельно коротких электромагнитных импульсов в хиральных углеродных нанотрубках в присутствии внешнего поля / Н.Н. Конобеева, М.Б. Белоненко // Журнал технической физики. – 2014. – Т. 84, вып. 12. – С. 13–16.

5. Ландау, Л.Д. Физическая кинетика / Л.Д. Ландау, Е. М Лифшиц. – М.: Наука, 1979. – 528 с.

6. Браже, Р.А. Теплопроводность планарных и нанотубулярных супракристаллических структур при температурах ниже температуры Дебая / Р.А. Браже, В.С. Нефёдов // ФТТ. – 2014. – Т. 56, вып. 3. – С. 602–606.

7. Особенности распределения потоков энергии при распространении квазибездифракционных световых пучков в поглощающих средах / В.Н. Белый [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 3 (12). – С. 7–14.

8. Митюрин, Г.С. Фотодефлекционный сигнал, генерируемый бесселевым световым пучком в плотном слое углеродных нанотрубок / Г.С. Митюрин, Е.В. Черненко, А.Н. Сердюков // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 20–26.

9. Бейтман, Г. Таблицы интегральных преобразований: в 2 т. / Г. Бейтман, А. Эрдейи; пер. Н.Я. Виленкина. – М.: Наука, 1969. – Т. 1: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – 344 с.

Поступила в редакцию 09.11.17.