

СЕКЦИЯ «ТЕОРИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ»

Председатель – Тимошин С.И., Максименко Н.В.

В.В. Андреев, В.Ю. Гавриш

**УО «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь**

ВЫЧИСЛЕНИЕ ШИРИН РАСПАД ВЕКТОРНЫХ БОЗОНОВ МЕТОДОМ БАЗИСНЫХ СПИНОРОВ

Введение

Цель данной статьи – продемонстрировать, как с помощью метода базисных спиноров без вычисления шпуров матриц Дирака можно вычислять наблюдаемые величины процессов взаимодействия с участием фермионов. В качестве примера, рассмотрим процессы распада векторных бозонов в лептонную пару. Изучение этих процессов представляет интерес с точки зрения извлечения таких параметров Стандартной Модели (СМ), как угол Вайнберга–Салама, константы взаимодействия и др.

1. Кинематика распада $1 \rightarrow 2$

Для расчетов наблюдаемых рассмотрим процесс распада векторного бозона массы M в пару лептонов $B(p, \sigma) \rightarrow l(k_1, \lambda_{k_1}) + \bar{l}(k_2, \lambda_{k_2})$ в системе покоя мезона. Тогда 4-импульсы бозонов и лептонов запишутся в виде:

$$p^\mu = (M, 0, 0, 0),$$
$$k_1^\mu = (E_1, |\vec{k}| \sin \theta, 0, |\vec{k}| \cos \theta), \quad k_2^\mu = (E_2, -|\vec{k}| \sin \theta, 0, -|\vec{k}| \cos \theta), \quad (1)$$

а вектора поляризации $\varepsilon_\sigma^\mu(p)$ бозона равны

$$\varepsilon_0 = (0, 0, 0, 1), \quad \varepsilon_\pm = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pm i}{\sqrt{2}}, 0) \quad (2)$$

для продольной поляризации ($\sigma = 0$) и поперечной поляризации $\sigma = \pm 1$ векторного бозона соответственно. Из законов сохранения следует, что

$$|\vec{k}|^2 = \frac{(M^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4M^2} - m_2^2, \quad E_{1,2} = \frac{M^2 + m_{1,2}^2 - m_{2,1}^2}{2M}. \quad (3)$$

Наблюдаемая величина – дифференциальная ширина распада бозона $d\Gamma$ имеет вид [1]:

$$d\Gamma_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^\sigma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{|\vec{k}|}{M^2} |T_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^\sigma|^2 \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (4)$$

где $T_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^\sigma$ – матричный элемент, явный вид которого найдем по правилам Фейнмана для СМ.

2. Расчет матричного элемента $B(p, \sigma) \rightarrow l(k_1, \lambda_{k_1}) + \bar{l}(k_2, \lambda_{k_2})$

В низшем порядке теории возмущений диаграмма Фейнмана распада векторного бозона изображена на рисунке 1.

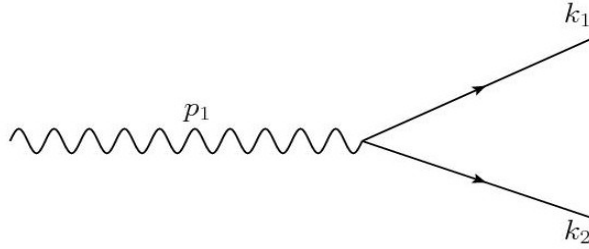


Рисунок 1 – Диаграмма Фейнмана для распада векторного бозона

Исходя из правил Фейнмана [2], запишем общее выражение для амплитуды распада $B(p, \sigma) \rightarrow l(k_1, \lambda_{k_1}) + \bar{l}(k_2, \lambda_{k_2})$

$$T_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^\sigma = -\sqrt{4\pi\alpha} \cdot \bar{u}_{\lambda_{k_1}}(k_1, m_1) \hat{\epsilon}_\sigma \left[\sum_{\rho=-1}^1 g_\rho \omega_\rho \right] v_{\lambda_{k_2}}(k_2, m_2). \quad (5)$$

Константы взаимодействия в (5) зависят от сорта бозона (Z^0, W^\pm) и конечного состояния, $\omega_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$ – проекционный оператор. Вычисление $T_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^\sigma$ проведем с помощью метода базисных спиноров (МБС) [3]. Изложим кратко основные соотношения МБС.

Спинор Дирака $W_{\lambda_p}^A(p, s_p)$ [4] для массивного фермиона ($A = 1$) и антифермиона ($A = -1$) с 4-импульсом p и произвольным вектором поляризации s_p может быть записан в виде [1]:

$$W_{\lambda_p}^A(p, s_p) = \frac{\left(\not{p} + A m_p \right) \left(1 + \lambda_p \gamma_5 \hat{s}_p \right)}{2\sqrt{b_{-1}(p + m_p s_p)}} u_{-A\lambda_p}(b_{-1}), \quad (6)$$

где $u_\lambda(b_{-1})$ – базисный спинор. Для безмассового базисного спинора справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{b}_{-1} u_\lambda(b_{-1}) &= 0, & \hat{b}_1 u_{-\lambda}(b_{-1}) &= u_\lambda(b_1), \\ \hat{n}_\lambda u_{-\rho}(b_{-1}) &= \delta_{\lambda, \rho} u_\rho(b_{-1}), & \omega_\lambda u_\rho(b_A) &= \delta_{\lambda, \rho} u_\rho(b_A), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\tilde{b}_A = 2b_A = (1, 0, 0, A)$ и $\tilde{n}_\lambda = 2n_\lambda = (0, \lambda, i, 0)$ – вектора изотропной тетрады. Для BDKS-поляризационных состояний конечных фермионов (антифермионов) соотношение (6) примет вид [1]:

$$W_{\lambda_p}^A(p) = \frac{\not{p} + Am_p}{\sqrt{(p \cdot \tilde{b}_{-1})}} u_{-A\lambda_p}(b_{-1}). \quad (8)$$

С помощью уравнений (7) определим действие матрицы Дирака на безмассовый базисный спинор:

$$\gamma^\mu u_\lambda(b_A) = \tilde{b}_A^\mu u_{-\lambda}(b_{-A}) - A \cdot \tilde{n}_{-A \times \lambda}^\mu u_{-\lambda}(b_A). \quad (9)$$

Используя соотношение (9), нетрудно получить действие и двух матриц Дирака на безмассовый базисный спинор:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu u_\lambda(b_A) = (\tilde{b}_A^\mu \cdot \tilde{n}_{-A \times \lambda}^\nu + \tilde{n}_{A \times \lambda}^\mu \cdot \tilde{n}_{-A \times \lambda}^\nu) u_\lambda(b_A) - A(\tilde{b}_A^\mu \cdot \tilde{n}_{-A \times \lambda}^\nu - \tilde{n}_{-A \times \lambda}^\mu \cdot \tilde{b}_A^\nu) u_\lambda(b_{-A}). \quad (10)$$

Важным свойством безмассовых базисных спиноров является соотношение полноты:

$$\sum_{\lambda, A=-1}^1 u_\lambda(b_A) \bar{u}_{-\lambda}(b_{-A}) = 1. \quad (11)$$

Спинорные произведения базисных спиноров задаются соотношениями:

$$\bar{u}_\lambda(b_C) u_\rho(b_A) = \delta_{\lambda, -\rho} \delta_{C, -A}. \quad (12)$$

Соотношения (6), (9) и (12) и составляют основу МБС.

С помощью МБС рассчитаем $T_{\lambda_{k_2}, \lambda_{k_1}}^\sigma$ (см. (5)) в терминах скалярных произведений физических и изотропной тетрады векторов, используя соотношения (8)-(12):

$$\begin{aligned} T_{\lambda_{k_2}, \lambda_{k_1}}^\sigma &= \frac{-\sqrt{4\pi\alpha}}{\sqrt{(k_2 \cdot \tilde{b}_{-1})} \sqrt{(k_1 \cdot \tilde{b}_{-1})}} \left[\left\{ ((k_2 \cdot \tilde{b}_{-1})(\varepsilon_\sigma \cdot \tilde{b}_{+1}) + (k_2 \cdot \tilde{n}_{\lambda_{k_2}})(\varepsilon_\sigma \cdot \tilde{n}_{-\lambda_{k_2}}))(k_1 \cdot \tilde{b}_{-1}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left\{ (k_1 \cdot \tilde{n}_{\lambda_{k_2}})(\varepsilon_\sigma \cdot \tilde{b}_{-1}) - (\varepsilon_\sigma \cdot \tilde{n}_{\lambda_{k_2}})(k_2 \cdot \tilde{b}_{-1}) \right\} (k_1 \cdot \tilde{n}_{\lambda_{k_2}}) \right\} g_{-\lambda_{k_2}} \delta_{\lambda_{k_1}, -\lambda_{k_2}} + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (\varepsilon_\sigma \cdot \tilde{b}_{-1})(k_1 \cdot \tilde{n}_{\lambda_{k_2}}) - (\varepsilon_\sigma \cdot \tilde{n}_{\lambda_{k_2}})(k_1 \cdot \tilde{b}_{-1}) \right\} m_2 g_{\lambda_{k_2}} \delta_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} + \left\{ (k_2 \cdot \tilde{n}_{\lambda_{k_2}})(\varepsilon_\sigma \cdot \tilde{b}_{-1}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (k_2 \cdot \tilde{b}_{-1})(\varepsilon_\sigma \cdot \tilde{n}_{\lambda_{k_2}}) \right\} m_1 g_{-\lambda_{k_2}} \delta_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} - (\varepsilon_\sigma \cdot \tilde{b}_{-1}) m_1 m_2 g_{\lambda_{k_2}} \delta_{\lambda_{k_1}, -\lambda_{k_2}} \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Для продольной поляризации выражение (13) с учетом соотношений (2) получим

$$\begin{aligned} T_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^0 &= \frac{-\sqrt{4\pi\alpha}}{\sqrt{E_1 E_2 + k(E_2 - E_1) \cos \theta - k^2 \cos^2 \theta}} \left[\delta_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} \lambda_{k_2} (m_1 g_{-\lambda_{k_2}} - m_2 g_{\lambda_{k_2}}) k \sin \theta - \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\lambda_{k_1}, -\lambda_{k_2}} (g_{-\lambda_{k_2}} (k(E_2 - E_1) \cos \theta + E_1 E_2 - k^2 \cos 2\theta) + m_1 m_2 g_{\lambda_{k_2}}) \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Подобным же образом для поперечных поляризаций:

$$T_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^\sigma = \frac{-\sqrt{2\pi\alpha} \sigma}{\sqrt{E_1 E_2 + k(E_2 - E_1) \cos \theta - k^2 \cos^2 \theta}} \left[\delta_{\lambda_{k_1}, -\lambda_{k_2}} k \left\{ (E_1 + E_2) \lambda_{k_2} + \sigma (E_1 - E_2 - 2k \cos \theta) \right\} g_{-\lambda_{k_2}} \sin \theta - \right. \\ \left. - 2\delta_{\lambda_{k_1}, -\lambda_{k_2}} \delta_{\sigma, -\lambda_{k_2}} (m_1 (E_2 + k \cos \theta) g_{-\lambda_{k_2}} + m_2 (E_1 - k \cos \theta) g_{\lambda_{k_2}}) \right] \quad (15)$$

3. Расчет наблюдаемых процесса $B(p, \sigma) \rightarrow l(k_1, \lambda_{k_1}) + \bar{l}(k_2, \lambda_{k_2})$

Используя метод базисных спиноров, рассчитаем наблюдаемые величины для процесса $Z^0 \rightarrow l \bar{l}$. В этом случае константы связи даются выражениями:

$$g_- = \frac{-\frac{1}{2} + s_W^2}{s_W c_W}, \quad g_+ = \frac{s_W}{c_W}. \quad (16)$$

С учетом соотношения (3) и того, что $m_1 = m_2 = m_l$ имеем

$$E_1 = E_2 = \frac{M_{Z^0}}{2}. \quad (17)$$

Используя (4), (14) и (15), усредняя по спиновым состояниям Z^0 -бозона и суммируя по конечным спиновым состояниям фермионов получим общее выражение для ширины распада:

$$d\Gamma = G_F \frac{[g_{V,l}^2 + g_{A,l}^2] M_{Z^0}^2 + 2[g_{V,l}^2 - 2g_{A,l}^2] m_l^2}{24\sqrt{2} \pi^2} \sqrt{-4m^2 + M^2} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (18)$$

где векторная и аксиальная константы связи определены посредством

$$g_{V,l} = s_W c_W (g_- + g_+), \quad g_{A,l} = s_W c_W (g_- - g_+), \quad (19)$$

а G_F – константа Ферми, которая связана с постоянной тонкой структуры α соотношением

$$\alpha = G_F \frac{2M_{W^\pm}^2 s_W^2}{\sqrt{2}\pi} = G_F \frac{2M_{Z^0}^2 s_W^2 c_W^2}{\sqrt{2}\pi}. \quad (20)$$

Для распада Z^0 -бозона в пару кварк–антикварк вычисления аналогичны:

$$d\Gamma = G_F \frac{[g_{V,q}^2 + g_{A,q}^2] M_{Z^0}^2 - [4g_{A,q}^2 - 2g_{V,q}^2] m_q^2}{4\sqrt{2} \pi^2} |\vec{k}| \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (21)$$

где константы взаимодействия задаются соотношениями

$$g_{V,q} = s_W c_W \left(-\frac{3}{2} + 2s_W^2\right), \quad g_{A,q} = -\frac{1}{2} s_W c_W \quad (22)$$

для кварков с зарядом $\left|\frac{1}{3}\right|$;

$$g_{V,q} = s_W c_W (-1/2 + 4/3 s_W^2), \quad g_{A,q} = -1/2 s_W c_W \quad (23)$$

для кварков с зарядом $|2/3|$ [2].

Для процесса $W^\pm \rightarrow l^\pm \nu_{l^\pm}$ константы связи даются выражениями:

$$g_+ = 0, \quad g_- = \frac{1}{\sqrt{2} s_W}. \quad (24)$$

С учётом того, что масса нейтрино равна нулю, усредняя по спиновым состояниям W^\pm -бозона и суммируя по конечным спиновым состояниям фермионов, получим общее выражение для ширины распада:

$$d\Gamma = G_F \frac{(2M_{W^\pm}^2 + m_l^2)(m^2 - M_{W^\pm}^2)^2}{48\sqrt{2} M_{W^\pm}^3 \pi^2} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (25)$$

В случае распада бозонов, когда все лептоны безмассовые, имеем

$$|\vec{k}| = \frac{M_{Z^0, W^\pm}}{2}, \quad m_1 = m_2 = 0 \quad (26)$$

и выражения (18) и (25) сводится к

$$d\Gamma = G_F \frac{[g_{V,l}^2 + g_{A,l}^2]}{24\sqrt{2} \pi^2} M_{Z^0}^3 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (27)$$

$$d\Gamma = G_F \frac{[g_{V,q}^2 + g_{A,q}^2]}{8\sqrt{2} \pi^2} M_{Z^0}^3 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (28)$$

и

$$d\Gamma = G_F \frac{M_{W^\pm}^3}{24\sqrt{2} \pi^2} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (29)$$

для Z^0 и W^\pm -бозонов соответственно. Интегрируя данное выражение по телесному углу, получим полную ширину распада Z^0 и W^\pm -бозонов соответственно:

$$\Gamma = G_F \frac{M_{Z^0}^3}{6\sqrt{2}\pi} [g_{V,l}^2 + g_{A,l}^2], \quad (29)$$

$$\Gamma = G_F \frac{M_{Z^0}^3}{3\sqrt{2}\pi} [g_{V,q}^2 + g_{A,q}^2], \quad (30)$$

$$\Gamma = G_F \frac{M_{W^\pm}^3}{6\sqrt{2}\pi}. \quad (31)$$

Полученные выражения (29), (30) совпадают с соответствующими ответами, приведенными в работе [2], что подтверждает правильность методики расчета матричных элементов с помощью МБС.

Литература

1. Hahn, T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with Feyn-Arts 3 / T. Hahn // Comput. Phys. Commun. 2001. – V. 140. – P. 418–431.

2. Borodulin, V.I. CORE: COmpendium of RElations: Version 2.1 / V.I. Borodulin, R.N. Rogalyov, S.R. Slabospitsky // CORE. [Electronic resource]. Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/9507456v1> – Date of access: 04.01.2011.

3. Андреев, В.В. Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В.В. Андреев // Ядерная физика. – 2003. – Т. 66.– № 2. – С. 410–420.

4. Биленький, С.М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С.М. Биленький. – Москва: Энергоатомиздат, 1990. – 327 с.