В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин

УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

ФОРМ-ФАКТОРЫ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ ДВУХ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ С ПОТЕНЦИАЛОМ ОДНОБОЗОННОГО ОБМЕНА

В работе найдены численные решения релятивистских интегральных уравнений квантовой теории поля (КТП), описывающих связанные s-состояния двух скалярных частиц [1, 2], с потенциалом однобозонного обмена [2]. Полученные решения затем используются для нахождения значений упругих форм-факторов [3] и форм-факторов аннигиляции [4] системы двух частиц.

В импульсном представлении (ИП) двухчастичные уравнения КТП для волновых функций связанных s-состояний $\psi_{(j)}(w,\chi)$ имеют следующий вид [5]:

$$\psi_{(j)}(w,\chi) = \frac{2\lambda}{\pi m} G_{(j)}(w,\chi) \int_0^\infty d\chi' V(\chi,\chi') \psi_{(j)}(w,\chi'), \qquad (1)$$

где индекс $j=1,2,3,4$ соответствует четырем вариантам уравнений, полу-ченных в квазипотенциальном подходе КТП: $j=1$ ($j=3$) – уравнение Логунова-Тавхелидзе (модифицированное), $j=2$ ($j=4$) – уравнение Кадышевского (модифицированное). В уравнении (1) величина χ – быстрота, связанная с импульсом p частицы массы m соотношением $p=m\sinh\chi$, величина w связана с энергией системы двух частиц $2E$ соотношением $2E=2m\cos w$, $\lambda>0$ – константа связи, $V(\chi,\chi')$ – реляти-вистский потенциал, $G_{(j)}(w,\chi)$ – функции Грина (ФГ) j-го уравнения, имеющие вид [1, 2]:

$$G_{(1)}(w,\chi)=\left[\cosh^2\chi-\cos^2 w\right]^{-1};\;\; G_{(2)}(w,\chi)=\left[2\cosh\chi\left(\cosh\chi-\cos w\right)\right]^{-1};$$
$$G_{(3)}(w,\chi)=\cosh\chi\left[\cosh^2\chi-\cos^2 w\right]^{-1};\;\; G_{(4)}(w,\chi)=\left[2\left(\cosh\chi-\cos w\right)\right]^{-1}. \tag{2}$$

Парциальный потенциал однобозонного обмена $V(\chi,\chi')$ в сферически-симметричном случае имеет форму

$$V(\chi,\chi')=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\cosh(\chi+\chi')-\cos\alpha}{\cosh(\chi-\chi')-\cos\alpha}\right), \tag{3}$$

где величина α связана с массой μ скалярного обменного бозона соотношением [2]

$$\cos\alpha=1-\mu^2/2m^2. \tag{4}$$

Для определения упругих форм-факторов необходимо знание волновых функций в релятивистском конфигурационном представлении (РКП). Соответствующие (1) уравнения для волновых функций в РКП имеют следующий вид [6]:

$$\psi_{(j)}(w,r)=-\lambda\int_0^\infty dr' G_{(j)}(w,r,r')V(r')\psi_{(j)}(w,r'), \tag{5}$$

где r – модуль радиус-вектора в РКП, а функции $\psi_{(j)}(w,r)$, $G_{(j)}(w,r,r')$, $V(r)$ связаны с соответствующими функциями в ИП следующими преобразованиями:

$$\psi_{(j)}(w,r)=\int_0^\infty dr\sin(\chi mr)\psi_{(j)}(w,\chi), \tag{6}$$

$$G_{(j)}(w,r,r')=\frac{-2}{\pi m}\int_0^\infty d\chi\sin(\chi mr)G_{(j)}(w,\chi)\sin(\chi mr'), \tag{7}$$

$$V(\chi,\chi')=\int_0^\infty dr\sin(\chi mr)V(r)\sin(\chi' mr). \tag{8}$$

Вычисление интегралов для ФГ (7) дает следующие выражения в РКП (мы ввели обозначения $K^{(1)}=K^{(2)}=m\sin 2w$, $K^{(3)}=K^{(4)}=2m\sin w$) [6]:

$$G_{(j)}(w,r,r')=G_{(j)}(w,r-r')-G_{(j)}(w,r+r'), \qquad (9)$$

где

$$G_{(1)}(w,r)=\frac{-1}{K^{(1)}}\frac{\sinh(\pi/2-w)mr}{\sinh\pi mr/2}; \qquad G_{(3)}(w,r)=\frac{-1}{K^{(3)}}\frac{\cosh(\pi/2-w)mr}{\cosh\pi mr/2};$$

$$G_{(2)}(w,r)=\frac{(4m\cos w)^{-1}}{\cosh\pi mr/2}-\frac{1}{K^{(2)}}\frac{\sinh(\pi-w)mr}{\sinh\pi mr}; \quad G_{(4)}(w,r)=\frac{-1}{K^{(4)}}\frac{\sinh(\pi-w)mr}{\sinh\pi mr}.$$

Преобразование, обратное (8), дает потенциал $V(r)$ в РКП [2]

$$V(r)=\frac{\cosh(\pi-\alpha)mr}{r\sinh\pi mr}. \qquad (10)$$

Решения интегральных уравнений в РКП найдены методом составных квадратур Гаусса [7] после замены бесконечного предела интегрирования достаточно большой величиной, а решения уравнений в ИП – методом квадратур Чебышева [7, 8] после приведения полубесконечного интервала интегрирования к интервалу $[-1;1]$ заменой переменной $\chi=-\ln\left[(1-x)/2\right]$. Применение метода квадратур к интегральным уравнениям (1) и (5) даёт однородные системы линейных алгебраических уравнений, которые мы представим в следующей общей для ИП и РКП форме $M\psi=\lambda^{-1}\psi$, где ψ – вектор, составленный из значений волновой функции в узловых точках квадратурной формулы, M – матрица, полученная из ядра интегрального уравнения. Нахождение собственных значений линейной алгебраической системы [7, 8] дает значения константы связи λ для конкретного значения параметра w (или значения энергии $2E=2m\cos w$). Параллельное решение уравнений в ИП и в РКП позволяет контролировать точность получаемых собственных значений. На рисунках 1, 2 приведен спектр собственных значений энергии при $\mu=m=1$ и при $\mu=0.1m=0.1$. Результаты численных расчётов собственных значений для уравнений в РКП и в ИП совпадают с точностью до 10^{-8} и выше для наименьшего собственного значения λ, с точностью до 10^{-6} и выше для второго и третьего по величине собственного значения. По аналогии с квантовой механикой будем называть состояние соответствующее минимальному собственному значению константы связи **основным состоянием** ($n=0$), а следующим по величине значениям – **n-ыми возбужденными состояниями**, (начиная с $n=1$). Результаты численных расчётов для волновых функций для $\mu=m=1$, $2E=1$ приведены на рисунке 3. На рисунке видно, что число нулей волновой функции при $r\neq 0$ равно порядковому номеру возбуждённого состояния (для основного состояния нулей нет).

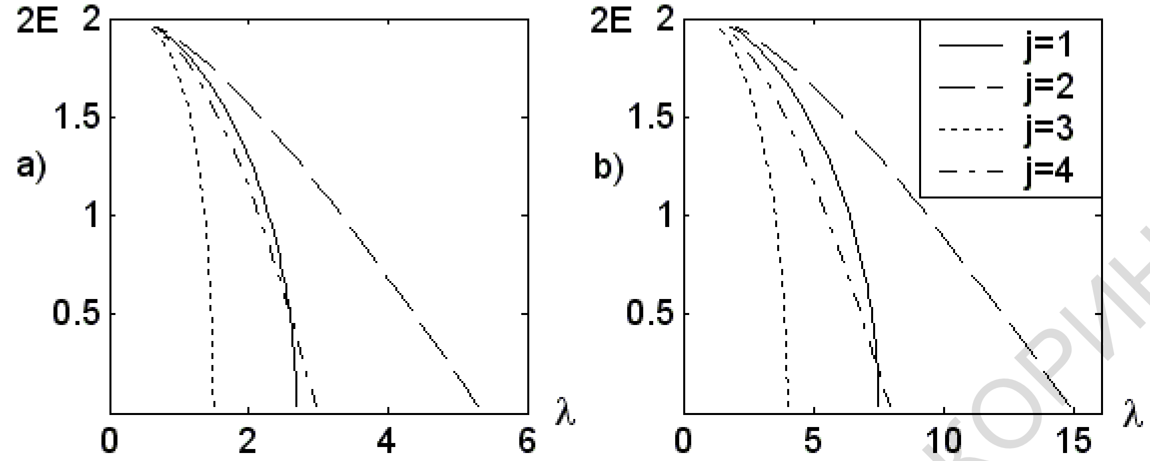

Рисунок 1 – Спектр энергии связанных состояний для $\mu = 0.1m = 0.1$:
a) основные состояния, b) первые возбужденные состояния

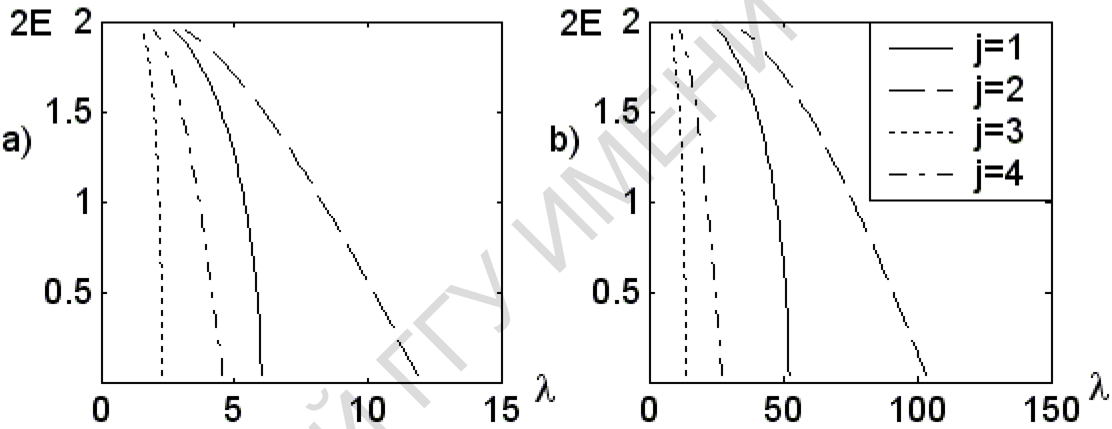

Рисунок 2 – Спектр энергии связанных состояний для $\mu = m = 1$:
a) основные состояния, b) первые возбужденные состояния

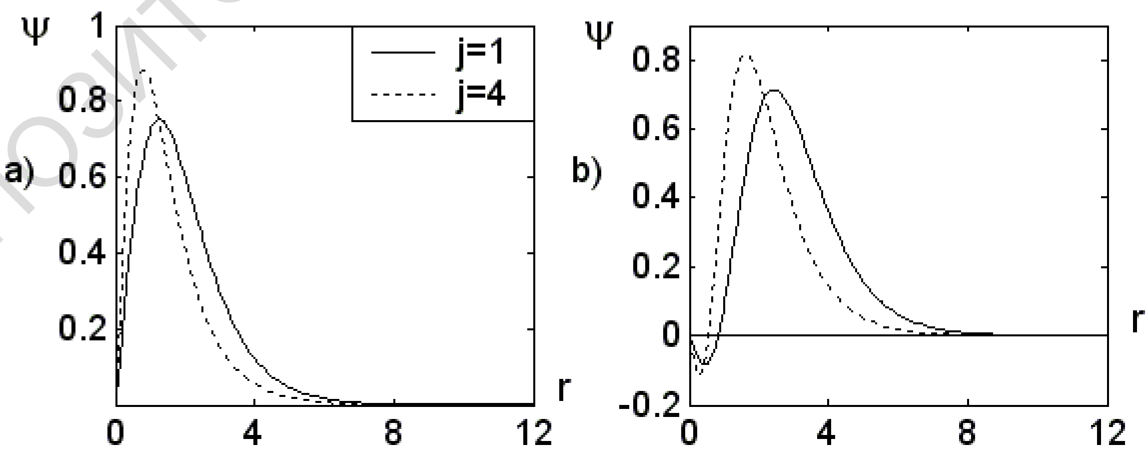

Рисунок 3 – Волновые функции для $\mu = m = 1$, $2E = 1$:
a) основные состояния, b) первые возбужденные состояния

Знание волновых функций в РКП и в ИП и спектра собственных значений энергии позволяет определить такие характеристики связанной системы как форм-факторы упругого рассеяния и аннигиляции.

Релятивистский упругий форм-фактор системы двух скалярных частиц был получен в работе [3] на основании гамильтониана

$$H(x) = -z_1\varphi_1^{+}(x)\varphi_1(x)A(x) - z_2\varphi_2^{+}(x)\varphi_2(x)A(x), \qquad (11)$$

где $\varphi_{1,2}(x)$, $A(x)$ – бесспиновые поля, $z_{1,2}$ – константы связи. В случае s-волн выражение для упругого форм-фактора $F_{(j)}(\chi_q)$ имеет вид [3]:

$$F_{(j)}(\chi_q) = \frac{4\pi(z_1+z_2)}{m\sinh\chi_q}\int_0^{\infty} dr\,\frac{\sin\chi_q mr}{r}\,|\psi_{(j)}(w,r)|^2, \qquad (12)$$

где χ_q – быстрота относительного движения частиц, находящихся в состо-янии рассеяния. Результаты численных расчетов для форм-факторов (12) при значениях параметров $z_1+z_2=1$, $\mu=m=1$, $2E=1$ приведены на рисунках 4 и 5. На рисунках видно, что форм-факторы, как и волновые функции для первого возбужденного состояния имеют один ноль (при $r\neq 0$), для второго возбужденного состояния – два нуля. Численные расчеты показывают, что для всех рассматриваемых здесь j число нулей форм-фактора как и волновой функции равно порядковому номеру возбуждённого состояния (для основного состояния нулей нет).

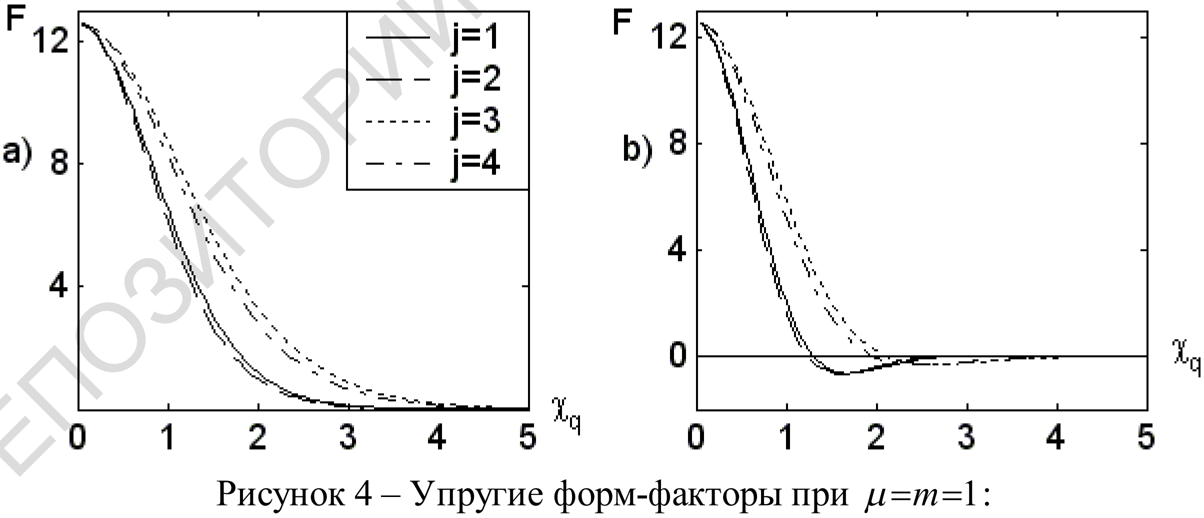

Рисунок 4 – Упругие форм-факторы при $\mu=m=1$:
а) основные состояния, b) первые возбуждённые состояния

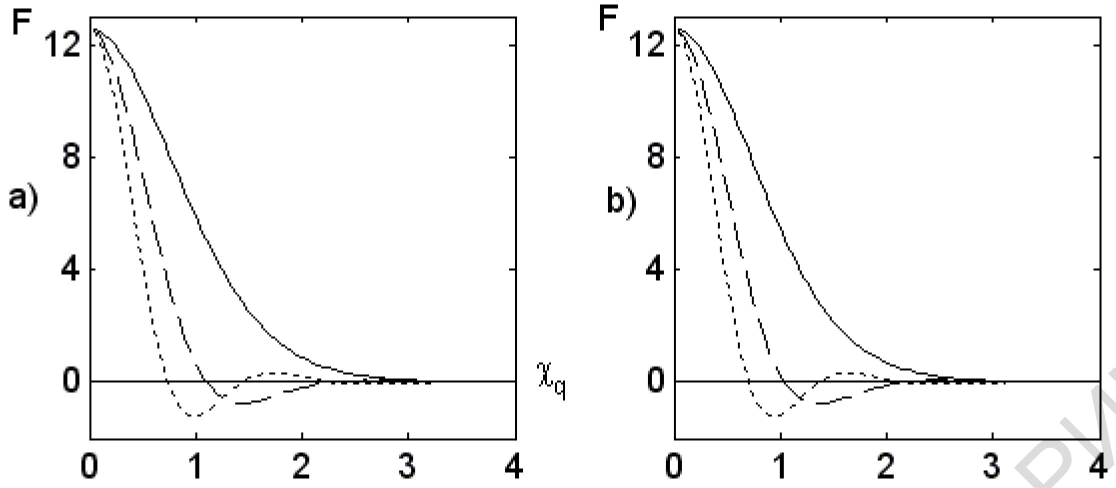

Рисунок 5 – Упругие форм-факторы для $j=1$ (a), $j=2$ (b) при $\mu=0.5m=0.5$: сплошная линия – основные состояния, штриховая линия – первые возбуждённые состояния, пунктирная линия – вторые возбуждённые состояния

Выражение для форм-факторов аннигиляции связанной системы двух скалярных частиц $f_{(j)}(2E)$ имеет вид [4]:

$$f_{(j)}(2E)=\frac{-4\sqrt{2\pi}\lambda S}{2E}\int_0^\infty d\chi\;\chi\psi_{(j)}(w,\chi)\,, \tag{13}$$

где величина S зависит от вида системы частиц [4] (будем полагать $S=1$). На рисунках 6 и 7 приведены результаты численных расчетов для выражений (13) при $\mu=m=1$ и при $\mu=0.1m=0.1$.

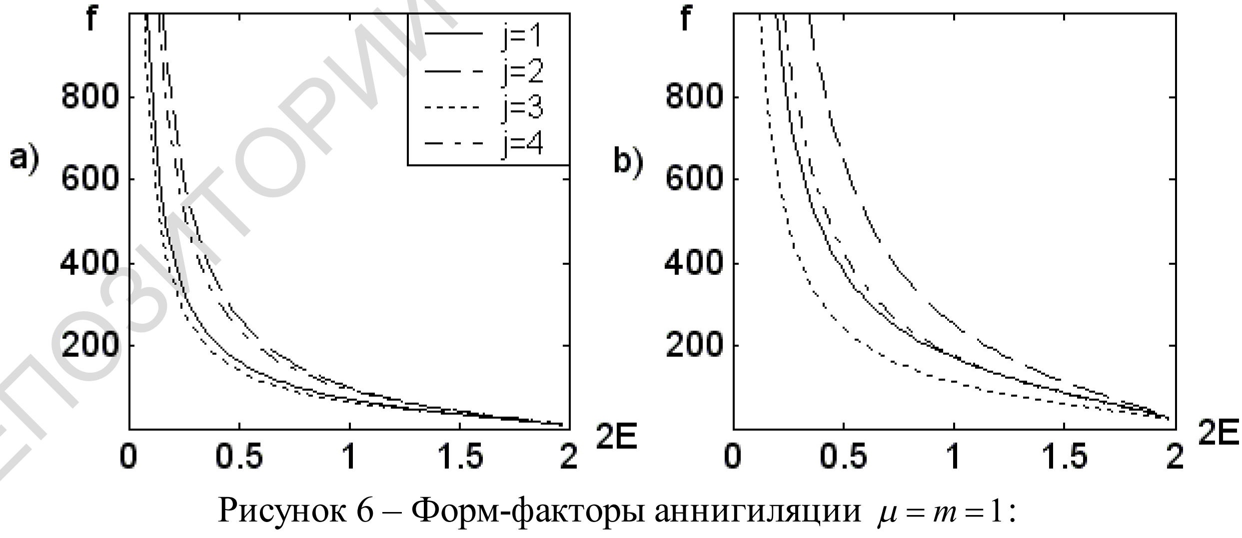

Рисунок 6 – Форм-факторы аннигиляции $\mu=m=1$:
а) основные состояния, b) первые возбуждённые состояния

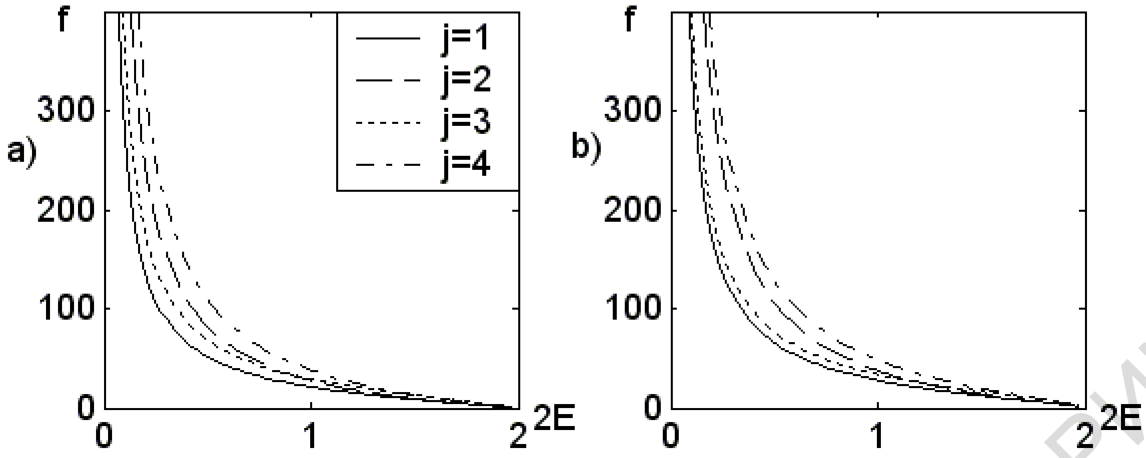

Рисунок 7 – Форм-факторы аннигиляции $\mu = 0.1m = 0.1$:
а) основные состояния, b) первые возбуждённые состояния

При вычислении интегралов в выражениях (12) и (13) были использованы те же квадратурные формулы, что и при решении интегральных уравнений (5) и (1) соответственно.

Таким образом, в работе получены численные решения релятивистских интегральных уравнений в импульсном представлении и в релятивистском конфигурационном представлении, описывающих связанные состояния системы двух скалярных частиц с потенциалом однобозонного обмена. Найден спектр энергии связанных состояний. На основании полученных решений вычислены форм-факторы упругого рассеяния и аннигиляции двухчастичной системы. Обнаружено, что число нулей упругих форм-факторов $F_{(j)}(\chi_q)$ совпадает с числом нулей волновых функций $\psi_{(j)}(w,r)$.

Литература

1. Logunov, A.A. Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory / A.A.Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29. – № 2. –P. 380–399.

2. Кадышевский, В.Г. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2. – № 3. – С. 635–690.

3. Скачков, Н.Б. Описание форм-фактора релятивистской двухчастичной системы в ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля / Н.Б.Скачков, И.Л. Соловцов // ТМФ. – 1980. – Т. 43. – № 3. – С. 330–342.

4. Savrin, V.I. Relativistic potential with QCD large Q^2 behaviour and the decay form factors of mesons / V.I. Savrin, N.B. Skachkov //CERN Preprint – 1980. – TH. 2913. – 11 p.

5. Капшай, В.Н. Об одном классе точных решений квазипотенциальных уравнений / В.Н. Капшай, С.П. Кулешов, Н.Б. Скачков // ТМФ. – 1983. – Т. 55. – № 3. – С. 349–360.

6. Alferova, T.A. Expansion in terms of matrix elements of the Lorentz group unitary irreducible representations and integral equations for scattering states relativistic wave functions / T.A. Alferova, V.N. Kapshai // Nonlinear phenomena in complex systems: Proced. of the Sixth Annual Seminar NPCS'97 / Academy of Sciences of Belarus. Inst. of Phys. – Minsk, 1998. – P. 78–85.

7. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 6-е изд.– М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.

8. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.