Министерство образования
Республики Беларусь

Учреждение образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"

А.В. БУЗЛАНОВ, В.С. МОНАХОВ

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Практическое пособие по выполнению лабораторных работ для студентов математических специальностей вузов

Гомель 2006

УДК 512+511(075.8)
ББК 22.14+22.13я73
Б904

Р е ц е н з е н т ы: кафедра алгебры и геометрии учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"; доктор физико-математических наук, профессор *М.В. Селькин*

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"

Бузланов А.В.
Б904 Алгебра и теория чисел: практическое пособие по выполнению лабораторных работ для студентов математических специальностей вузов / А.В. Бузланов, В.С. Монахов; М–во образов. РБ, Гомельский госуд. ун–т им. Ф. Скорины. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2006. – 177 с.

ISBN 985–439–183–3

Пособие включает те разделы курса "Алгебра и теория чисел", которые традиционно изучаются в первом семестре. По каждой из десяти тем перечислены основные вопросы теории, приведены образцы решения типовых задач, предложены 15 вариантов индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов специальности "Математика". Может быть использовано студентами других специальностей, изучающих вопросы алгебры и теории чисел.

УДК 512+511(075.8)
ББК 22.14+22.13я73

ISBN 985–439–183–3

Содержание

Предисловие

Настоящее пособие возникло из опыта работы авторов с первокурсниками в Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины. В 1991-92 гг. авторами были изданы лабораторные работы и тексты лекций по курсу "Алгебра и теория чисел" [3], [16–18], охватывающие те разделы данного курса, которые студентами математического факультета традиционно изучаются в 1 семестре. В течение нескольких лет эти пособия неоднократно перерабатывались и дополнялись, после чего они были взяты за основу при составлении настоящего практикума по "Алгебре и теории чисел".

Весь изучаемый в 1 семестре материал разбит на 10 разделов. Каждый раздел посвящен определенной теме курса "Алгебра и теория чисел". Перечисляются основные вопросы теории, приводятся образцы решения типовых задач. Все это вместе составляет ядро данного раздела курса, знание которого должно обеспечить студенту-первокурснику самостоятельное выполнение индивидуального задания. По каждой теме предложены 15 вариантов индивидуальных заданий, что способствует активизиции самостоятельной работы всех студентов.

Настоящий практикум предназначен прежде всего студентам-математикам. Поскольку изучаемый материал курса "Алгебра и теория чисел" в 1 семестре является базовым для всей математики, то данное учебное пособие может быть с успехом применено при изучении соответствующих разделов курса "Высшая математика" студентами нематематических специальностей.

Авторы

1. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ПЕРЕСТАНОВКИ

1.1. Вопросы теории

1. Декартово (прямое) произведение множеств.
2. Бинарное отношение. Область определения, область значений бинарного отношения.
3. Виды бинарных отношений: рефлексивные, симметричные, антисимметричные, транзитивные.
4. Отношение эквивалентности и разбиение на классы.
5. Порядок на множестве, частично упорядоченное и линейно упорядоченное множества.
6. Наибольший и максимальный элементы частично упорядоченного множества. Наименьший и минимальный элементы частично упорядоченного множества.
7. Точные верхняя и нижняя грани подмножества. Решетка, подрешетка. Свойства решеток. Полная решетка.
8. Отображения, их виды: инъекция, сюръекция, биекция. Равные отображения. Преобразование множества, тождественное преобразование.
9. Отображения конечных множеств.
10. Умножение отображений, ассоциативность.
11. Обратимые отображения.
12. Перестановки, их запись. Умножение перестановок, свойства умножения. Тождественная и обратная перестановки.
13. Цикл, транспозиции, независимые циклы. Разложение перестановки в произведение независимых циклов и в произведение транспозиций.
14. Знак перестановки и формулы для его вычисления. Знак произведения перестановок.
15. Множество четных перестановок и его свойства.

1.2. Примеры решения задач

Пример 1.1. Выпишите все подмножества декартова произведения множеств $X = \{0,1\}$ и $Y = \{1,2\}$.

□ Ясно, что $X \times Y = \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}$ — декартово произведение множеств X и Y. Выпишем все его подмножества.

$F_1 = \emptyset$, $F_2 = \{(0,1)\}$, $F_3 = \{(0,2)\}$, $F_4 = \{(1,1)\}$,
$F_5 = \{(1,2)\}$, $F_6 = \{(0,1),(0,2)\}$,
$F_7 = \{(0,1),(1,1)\}$, $F_8 = \{(0,1),(1,2)\}$,
$F_9 = \{(0,2),(1,1)\}$, $F_{10} = \{(0,2),(1,2)\}$,
$F_{11} = \{(1,1),(1,2)\}$, $F_{12} = \{(0,1),(0,2),(1,1)\}$,
$F_{13} = \{(0,1),(0,2),(1,2)\}$,
$F_{14} = \{(0,2),(1,1),(1,2)\}$,
$F_{15} = \{(0,1),(1,1),(1,2)\}$,
$F_{16} = X \times Y = \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}$.

Любое из шестнадцати подмножеств F_i, $i = 1, ..., 16$, определяет бинарное отношение между X и Y. Найдите область определения и область значения каждого отношения. ⊠

Пример 1.2. Какими свойствами обладают следующие бинарные отношения на $\mathbb{N}$:

$F_1 = \{(x,y) \mid x$ и y взаимно просты $\}$,
$F_2 = \{(x,y) \mid x$ делит $y\}$,
$F_3 = \{(x,y) \mid x = y^2\}$?

□ Подмножество F_1 декартового произведения $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ состоит из всех пар (x,y) натуральных чисел, у которых первое число взаимно просто со вторым. F_1 не будет рефлексивным, так как, например $(4,4) \notin F_1$. Если $(x,y) \in F_1$, то x и y взаимно просты. Поэтому y и x взаимно просты, значит $(y,x) \in F_1$ и F_1 симметрично. Бинарное отношение F_1 не будет транзитивным. Действительно, $(2,3) \in F_1$, $(3,4) \in F_1$, но $(2,4) \notin F_1$.

Ясно, что F_2 рефлексивно и транзитивно. Но F_2 не является симметричным, поскольку $(3,6) \in F_2$, а $(6,3) \notin F_2$.

Отношение F_3 не будет рефлексивным и симметричным. Так как $(2,4) \in F_3$ и $(4,16) \in F_3$, но $(2,16) \notin F_3$, то F_3 не будет и транзитивным. ⊠

Пример 1.3. Зафиксируем натуральное число k. Введем бинарное отношение $\sim$ на $\mathbb{Z}$, считая $x \sim y$ тогда и только тогда, когда равны остатки при делении x и y на k. Отношение $\sim$ будет отношением эквивалентности. Класс эквивалентности $cl(x) = \overline{x}$ состоит из всех целых чисел, которые при делении на k имеют один и тот же остаток. Остатки могут принимать значения $0, 1, \ldots, k-1$. Поэтому фактормножество состоит из k элементов: $\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{k-1}\}$. ⊠

Пример 1.4. Пусть X — произвольное множество и $\mathbf{S}(X)$ — совокупность всех подмножеств из X. Зададим бинарное отношение B на $\mathbf{S}(X)$, считая $X_1 B X_2$ тогда и только тогда, когда $X_1 \subseteq X_2$. Очевидно, это отношение B рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Значит, $\mathbf{S}(X)$ — частично упорядоченное множество. X будет наибольшим, а $\varnothing$ — наименьшим элементом в $\mathbf{S}(X)$. Если $x, y \in X, x \neq y$, то одноэлементные множества $\{x\}$ и $\{y\}$ принадлежат $\mathbf{S}(X)$. Кроме того, $\{x\}$ и $\{y\}$, а также $\{y\}$ и $\{x\}$, не сравнимы. Поэтому $\mathbf{S}(X)$ не будет линейно упорядоченным множеством. ⊠

Пример 1.5. На множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел введем бинарное отношение $\leq$, считая $a \leq b$ тогда и только тогда, когда a делит b. Множество $\mathbb{N}$ становится решеткой, в которой $a \wedge b =$НОД(a,b) — наибольший общий делитель чисел a и b, а $a \vee b =$НОК(a,b) — наименьшее общее кратное. В этой решетке наименьшим элементом будет число 1, а наибольшего элемента нет. ⊠

Пример 1.6. Зафиксируем натуральное число k. Зададим отображения $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, полагая

$\varphi(x) = k$ и
$$\psi(x) = \begin{cases} k - x, & \text{если } x < k, \\ k + x, & \text{если } x \geq k. \end{cases}$$
для каждого $x \in \mathbb{N}$.

Очевидно, $\mathrm{Im}\varphi = \{k\}$, причем отображение φ не является инъективным и сюръективным. Так как
$$\psi(1) = k - 1, \psi(2) = k - 2, \ldots, \psi(k - 1) = 1,$$
$$\psi(k) = 2k, \psi(k + 1) = 2k + 1, \ldots,$$
то
$$\mathrm{Im}\psi = \mathbb{N} \setminus \{k, k + 1, \ldots, 2k - 1\}$$
и ψ не сюръективно. Но ψ инъективно. ⊠

Пример 1.7. Пусть $\varphi(x) = k$ и
$$\psi(x) = \begin{cases} k - x, & \text{если } x < k, \\ k + x, & \text{если } x \geq k, \end{cases}$$
для каждого $x \in \mathbb{N}$. Тогда $\psi\varphi(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(k) = 2k$ для всех $x \in \mathbb{N}$, т.е. $\psi\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — отображение, которое каждый элемент $x \in \mathbb{N}$ переводит в $2k$.

Рассмотрим произведение $\varphi\psi$. Так как $\varphi\psi(x) = \varphi(\psi(x)) = k = \varphi(x)$, то $\varphi\psi :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — отображение, которое совпадает с φ, т.е. $\varphi\psi = \varphi$. В частности, $\psi\varphi \neq \varphi\psi$ и умножение отображений некоммутативно. ⊠

Пример 1.8. Каждое из отображений
$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$
является биективным преобразованием множества $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Составим таблицу умножения этих отображений.

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

Произведение $f_i f_j$ ставится на пересечении строки f_i и столбца f_j. Например,
$$f_2 f_3 : x \overset{f_3}{\mapsto} \frac{1}{x} \overset{f_2}{\mapsto} -\frac{1}{x},$$
поэтому $f_2 f_3 = f_4$.

Из таблицы видно, что умножение коммутативно и f_1 является тождественным преобразованием. Так как $f_i^{-1} = f_i$, то каждое преобразование совпадает со своим обратным преобразованием. ⊠

Пример 1.9. *Аффинным преобразованием прямой* называется отображение
$$\varphi_{a,b} : x \mapsto ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$
множества $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Совокупность всех аффинных преобразований прямой обозначается через $A_1(\mathbb{R})$. В соответствии с правилом умножения отображений аффинные преобразования прямой перемножаются так:
$$\varphi_{a,b}\varphi_{c,d} : x \mapsto cx + d \mapsto a(cx + d) + b = acx + (ad + b)$$
и $\varphi_{a,b}\varphi_{c,d} = \varphi_{ac,ad+b}$. В частности, умножение аффинных преобразований некоммутативно. Тождественным будет преобразование $\varphi_{1,0}$, а обратным для $\varphi_{a,b}$ будет $\varphi_{a^{-1},-a^{-1}b}$.

Несложно проверить, что при $a < b$, $c < d$ аффинное преобразование
$$x \mapsto \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c$$
осуществляет биективное отображение отрезка $[a, b]$ прямой на отрезок $[c, d]$. ⊠

Пример 1.10. Перестановки

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

принадлежащие S_4, перемножаются так:

$$\delta\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $\tau\delta$.

$$\tau\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

В частности, умножение перестановок некоммутативно. ⊠

Пример 1.11. Заметим, что обратную перестановку τ^{-1} получим, переставив в перестановке τ строки местами. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 1.12. Запишите в виде произведения независимых циклов перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

□ Перестановка переводит $1 \mapsto 5 \mapsto 2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$, $4 \mapsto 6 \mapsto 4$, поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (152)(3)(46). \qquad ⊠$$

Пример 1.13. Запишите в виде таблицы перестановку $(135)(2)(467)$.

□ Перестановка переводит $1 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$, $4 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 4$, поэтому

$$(135)(2)(467) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}. \qquad ⊠$$

Пример 1.14. Не прибегая к табличной записи, вычислите β^{-1}, $\beta\tau$, τ^{-2} для перестановок $\beta = (132)(45)$, $\tau = (21)(354)(143)$.

□ Чтобы получить β^{-1}, в перестановке β запишем циклы в обратном порядке: $\beta^{-1} = (54)(231)$. Действительно, $\beta\beta^{-1} = (132)(45)(54)(231) =$

$$= \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} = (1)(2)(3)(4)(5) = \varepsilon.$$

Аналогично, $\beta^{-1}\beta = \varepsilon$. Найдем $\beta\tau =$

$$= (132)(45)(21)(354)(143) = \begin{array}{ccccc} 1 & & 3 & 4 & \\ \downarrow & 2 & \downarrow & \downarrow & 5 \\ 4 & \downarrow & 1 & 3 & \downarrow \\ \downarrow & 1 & \downarrow & \downarrow & 4 \\ 3 & \downarrow & 2 & 5 & \downarrow \\ \downarrow & 3 & \downarrow & \downarrow & 5 \\ 2 & & 1 & 4 & \end{array} =$$

$= (123)(4)(5)$. Теперь

$$\tau^{-2} = (\tau^{-1})^2 = ((341)(453)(12))^2 =$$
$$= (341)(453)(12)(341)(453)(12) =$$

$$
=\begin{array}{ccccc}
 & 2 & & & \\
1 & \downarrow & 3 & 4 & 5\\
\downarrow & 1 & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\
2 & \downarrow & 4 & 5 & 3\\
\downarrow & 3 & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\
1 & \downarrow & 1 & 3 & 4\\
\downarrow & 4 & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\
3 & \downarrow & 2 & 4 & 5\\
 & 1 & & &
\end{array} = (132)(4)(5).
$$

ОТВЕТ: $\beta^{-1} = (54)(231), \beta\tau = (123)(4)(5), \tau^{-2} = (132)(4)(5)$. ⊠

ПРИМЕР 1.15. Найдите перестановку α из равенства

$$(135)(23)\alpha = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

□ Перестановка $(135)(23)$ является произведением зависимых циклов. Перемножим эти циклы и представим в табличной записи:

$$
(135)(23) = \begin{array}{ccccc}
 & 2 & & & \\
1 & \downarrow & 3 & 4 & 5\\
\downarrow & 3 & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\
3 & \downarrow & 2 & 4 & 1\\
 & 5 & & &
\end{array} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}.
$$

Итак, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\alpha = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

Тогда

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\alpha =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

ОТВЕТ: $\alpha = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$. ⊠

ПРИМЕР 1.16. Разложите в произведение транспозиций перестановку

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 6 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

□ Вначале запишем перестановку в виде произведения независимых циклов, а затем каждый цикл представим как произведение транспозиций

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 6 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 3\end{pmatrix} = (1672)(348) =$$

$$= (12)(17)(16)(38)(34).$$ ⊠

ПРИМЕР 1.17. Даны перестановки

$$\alpha = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6\end{pmatrix}, \ \beta = (1254) \in S_6.$$

1. Вычислите $\alpha^{-1}, \beta^{-2}, \alpha\beta$.

2. Разложите $\alpha\beta$ в произведение независимых циклов.

3. Разложите α в произведение транспозиций.

4. Вычислите знак перестановки $(\alpha\beta)^2\alpha\beta^{-1}$.

□ 1. Для нахождения обратной перестановки α^{-1} надо в перестановке α строки поменять местами:

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6\end{pmatrix}.$$

В перестановке β перейдем к табличной записи. Так как $\beta \in S_6$, то

$$\beta = (1254) = (1254)(3)(6) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6\end{pmatrix}.$$

Тогда $\beta^{-2} = \beta^{-1}\beta^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Подробно правило умножения перестановок проиллюстрируем на примере произведения $\alpha\beta$:

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Перестановка $\alpha\beta$ переводит $1 \to 1, 2 \to 4 \to 2, 3 \to 5 \to 3, 6 \to 6$, поэтому

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (1)(24)(35)(6)$$

есть разложение перестановки $\alpha\beta$ в произведение независимых циклов.

3. Чтобы записать разложение перестановки α в произведение транспозиций, запишем ее сначала в виде произведения независимых циклов:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (12)(354)(6).$$

Каждый цикл длины больше 2 разложим в произведение транспозиций по правилу

$$(a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k) = (a_1 a_k)(a_1 a_{k-1}) \ldots (a_1 a_2).$$

Получим $\alpha = (12)(34)(35)$ – искомое разложение.

4. Знак перестановки τ вычисляется по формуле

$$\mathrm{sgn}\tau = (-1)^{n-c},$$

где n – степень перестановки, c – число независимых циклов. Так как $\alpha = (12)(354)(6)$, то $\mathrm{sgn}\alpha = (-1)^{6-3} = -1$, т.е. перестановка α нечетная. Аналогично, поскольку $\beta = (1254)(3)(6)$, то $\mathrm{sgn}\beta = (-1)^{6-3} = -1$. Тогда

$$\mathrm{sgn}((\alpha\beta)^2\alpha\beta^{-1}) = \mathrm{sgn}(\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta^{-1}) =$$

$$= \mathrm{sgn}\alpha \cdot \mathrm{sgn}\beta \cdot \mathrm{sgn}\alpha \cdot \mathrm{sgn}\beta \cdot \mathrm{sgn}\alpha \cdot \mathrm{sgn}\beta^{-1} =$$

$$= (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = 1.$$

Ответ: 1. $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$,

$$\beta^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. $\alpha\beta = (1)(24)(35)(6)$.

3. $\alpha = (12)(34)(35)$.

4. $\mathrm{sgn}((\alpha\beta)^2\alpha\beta^{-1}) = 1$. ⊠

Пример 1.18. При каких i, j, k перестановка $\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 5 & k & 3 & 6 & 1 \\ i & j & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ нечетная?

□ Заметим, что в каждой строке перестановки α все цифры должны быть различными. Поэтому $k = 4$, а для i и j возможны два случая.

1. $i = 2, j = 6$. Тогда $\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (2)(56143)$ и $\mathrm{sgn}\alpha = (-1)^{6-2} = 1$.

2. $i = 6$, $j = 2$. Тогда $\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$ $= (261435)$ и $\mathrm{sgn}\alpha = (-1)^{6-1} = -1$.

ОТВЕТ: $i = 6, j = 2, k = 4$. ⊠

ПРИМЕР 1.19. Перечислите все элементы из S_n и A_n при $n \le 3$.

□ Очевидно, $S_1 = \{\varepsilon\}$, $A_1 = \{\varepsilon\}$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ясно также, что

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} = \{(12), \varepsilon\},$$

а $A_2 = \{\varepsilon\}$.

Пусть $n = 3$ и $X = \{1, 2, 3\}$. Выпишем все перестановки множества X и разложим их в произведение независимых циклов

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132).$$

Итак, $S_3 = \{\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132), \}$, а $A_3 = \{\varepsilon, (123), (132)\}$.

Составим таблицы умножения для S_3 и A_3. На пересечении "строки" δ и "столбца" τ ставим произведение $\delta\tau$.

S_3	ε	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
ε	ε	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	ε	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	ε	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	ε	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	ε
(132)	(132)	(23)	(12)	(13)	ε	(123)

A_3	ε	(123)	(132)
ε	ε	(123)	(132)
(123)	(123)	(132)	ε
(132)	(132)	ε	(123)

Аналогично можно было бы поступить и с S_4. Но $|S_4| = 24$ и при составлении таблицы умножения для S_4 пришлось бы заполнить $24 \cdot 24 = 576$ клеток. ⊠

1.3. Индивидуальные задания

1. Даны перестановки α и β, принадлежащие S_9. Вычислите $\alpha^{-1}, \alpha\beta, \beta\alpha, (\alpha\beta)^2, (\beta\alpha)^{-1}, \beta^{-2}$.

1.1. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 1 & 8 & 5 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

1.2. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 7 & 3 & 5 & 8 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 1 & 6 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.4. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 8 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 9 & 2 & 1 & 6 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

1.5. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 6 & 3 & 7 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 8 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.6. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 3 & 2 & 7 & 5 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.7. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.8. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 7 & 3 & 6 & 1 & 9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.9. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 8 & 1 & 3 & 7 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.10. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 6 & 3 & 5 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.11. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 9 & 6 & 7 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.12. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.13. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 7 & 6 & 5 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 9 & 1 & 3 & 7 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.14. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 8 & 2 & 9 & 5 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 9 & 5 & 4 & 2 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.15. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Запишите перестановки α и β из задания 1 в виде произведения независимых циклов и в виде произведения транспозиций. Найдите четность этих перестановок.

3. Даны перестановки σ и τ, принадлежащие S_8. Запишите перестановки σ и τ в виде таблицы. Вычислите σ^{-1}, τ^{-1}, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, не прибегая к табличной записи. Определите четность перестановок $\sigma^2\tau$, $(\tau\sigma)^2\tau(\tau\sigma)^{-1}$.

3.1. $\sigma = (143)(25)(678)$, $\tau = (214)(345)(56)(13)$.

3.2. $\sigma = (13245)(15)(2468)$, $\tau = (137)(65)(84)$.

3.3. $\sigma = (235)(147)(68)$, $\tau = (3567)(15)(364)$.

3.4. $\sigma = (31)(14)(25681)$, $\tau = (357)(68)(18)$.

3.5. $\sigma = (12356)(478)$, $\tau = (1356)(627)(145)$.

3.6. $\sigma = (32)(257)(4316)$, $\tau = (431)(2687)$.
3.7. $\sigma = (146)(245)(36)$, $\tau = (3564)(127)$.
3.8. $\sigma = (125)(438)(67)$, $\tau = (143)(3526)(125)$.
3.9. $\sigma = (26)(6371)(145)$, $\tau = (25)(437)(68)$.
3.10. $\sigma = (138)(27)(64)$, $\tau = (2584)(142)(658)$.
3.11. $\sigma = (12)(25)(5437)(13)$, $\tau = (14)(357)(62)$.
3.12. $\sigma = (156)(4382)$, $\tau = (172)(28)(7814)$.
3.13. $\sigma = (4513)(278)$, $\tau = (1354)(324)(672)$.
3.14. $\sigma = (157)(645)(213)$, $\tau = (124)(387)(65)$.
3.15. $\sigma = (263)(17)(85)$, $\tau = (145)(3467)(562)$.

4. При каких значениях i, j, k перестановка γ четная? При каких значениях i, j, k перестановка χ нечетная?

4.1. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i & 3 & j & 1 & 6 & k \end{pmatrix}$,
$\chi = \begin{pmatrix} 2 & i & 4 & 3 & k & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & j & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

4.2. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & i & 1 & j & k & 4 & 2 \end{pmatrix}$,
$\chi = \begin{pmatrix} i & 3 & 4 & 5 & j & 6 & 1 \\ 7 & 1 & k & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4.3. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ j & k & 1 & 3 & i & 7 & 5 \end{pmatrix}$,
$\chi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & i & k & 2 & 4 \\ j & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.4. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ i & 7 & 5 & 3 & j & k & 4 \end{pmatrix}$,
$\chi = \begin{pmatrix} 2 & i & j & 6 & 4 & 1 \\ k & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4.5. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ k & i & 1 & 7 & j & 5 & 4 \end{pmatrix}$,
$\chi = \begin{pmatrix} 3 & k & 4 & i & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 & j \end{pmatrix}$.

4.6. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & i & 4 & 3 & j & k & 1 \end{pmatrix}$,
$\chi = \begin{pmatrix} 1 & k & j & 2 & 4 & 7 & 5 \\ i & 1 & 7 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4.7. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & i & 2 & j & 1 & 4 & k \end{pmatrix}$,
$\chi = \begin{pmatrix} 5 & i & 2 & k & 3 & 1 \\ 1 & j & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

4.8. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ i & 3 & j & k & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,
$\chi = \begin{pmatrix} 6 & 2 & k & 1 & i & 3 \\ j & 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4.9. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ j & 3 & 1 & i & k & 2 & 4 \end{pmatrix}$,
$\chi = \begin{pmatrix} 5 & k & j & 1 & 4 & 3 \\ i & 1 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4.10. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & i & j & 2 & k & 1 & 6 \end{pmatrix}$,
$\chi = \begin{pmatrix} 5 & k & 4 & i & 1 & 2 \\ 1 & j & 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

4.11. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ i & 2 & 1 & j & 4 & 5 & k \end{pmatrix}$,
$\chi = \begin{pmatrix} 6 & 2 & j & k & 1 & 3 & 7 \\ i & 5 & 4 & 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.12. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i & 3 & j & k & 4 & 1 \end{pmatrix}$,
$\chi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & i & k & 1 & 7 & 6 \\ j & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

4.13. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ i & 1 & k & 7 & 6 & j & 4 \end{pmatrix}$,

$$\chi = \begin{pmatrix} 5 & i & j & 1 & 3 & 2 \\ k & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.14. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & i & 1 & 3 & k & j & 6 \end{pmatrix}$,

$$\chi = \begin{pmatrix} 6 & i & k & 1 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & j & 3 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.15. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & j & i & 1 & k & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\chi = \begin{pmatrix} 4 & 3 & i & k & 1 & 5 \\ j & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите перестановку τ из равенства $\alpha\tau\beta = \alpha^{-1}$, где α, β — перестановки из задания 1.

6. Найдите перестановку γ из равенства $\sigma\tau^{-1}\gamma = \sigma^{-1}\tau$, где τ, σ — перестановки из задания 3.

2. ГРУППЫ, КОЛЬЦА, ПОЛЯ

2.1. Вопросы теории

1. Бинарная алгебраическая операция.
2. Ассоциативные и коммутативные операции.
3. Нейтральный и симметричный элементы.
4. Полугруппа, моноид и их примеры.
5. Определение группы.
6. Абелева группа. Конечная группа, её порядок. Бесконечная группа.
7. Мультипликативная группа, примеры.
8. Аддитивная группа, примеры.
9. Подгруппы и их примеры.
10. Определение кольца, примеры колец.
11. Аддитивная группа кольца, мультипликативная полугруппа кольца. Кольцо с единицей. Коммутативное кольцо.
12. Свойства колец.
13. Делители нуля.
14. Определение поля, примеры полей.
15. Характеристика поля.
16. Конечные и бесконечные поля и их примеры.

2.2. Примеры решения задач

Пример 2.1. Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$ и S_n — совокупность всех перестановок степени n. Множество S_n с операцией умножения образует конечную группу порядка $n!$ с единичным элементом

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Группу S_n называют *симметрической группой степени* n. При $n \geq 3$ эта группа неабелева.

Четные перестановки образуют конечную группу A_n порядка $n!/2$, которую называют *знакопеременной группой степени* n. При $n \geq 4$ эта группа неабелева. ⊠

Пример 2.2. Четыре функции, определенные на множестве $\mathbb{R}^*$,

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

с операцией умножения образуют группу. Составим таблицу умножения этих функций.

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

Произведение $f_i f_j$ указывается на пересечении строки f_i и столбца f_j. Например,

$$f_2 f_3 : x \overset{f_3}{\mapsto} \frac{1}{x} \overset{f_2}{\mapsto} -\frac{1}{x},$$

поэтому $f_2 f_3 = f_4$.

Из таблицы видно, что умножение определено на множестве $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ и коммутативно. Поскольку умножение отображений ассоциативно, то выполняется второе требование определения группы. Функция f_1 является единичным элементом, а $f_i^{-1} = f_i$, т.е. каждый элемент является обратным для себя. Таким образом, множество $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ с умножением является конечной абелевой группой порядка 4. ⊠

Пример 2.3. Совокупность $A_1(\mathbb{R})$ всех аффинных преобразований прямой, см. пример 1.9, является неабелевой группой с единичным элементом $\varphi_{1,0}$ и обратным элементом $\varphi_{a^{-1},-a^{-1}b}$ для элемента $\varphi_{a,b}$. ⊠

Пример 2.4. Является ли группой множество $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ненулевых действительных чисел с операцией $a \circ b = 2ab$?

□ Для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}^*$ элемент $a \circ b = 2ab$ также принадлежит $\mathbb{R}^*$, поэтому операция $\circ$ на множестве $\mathbb{R}^*$ определена. Проверим выполнение других условий в определении группы.

Ассоциативность операции:

$$(a \circ b) \circ c = (2ab) \circ c = 2(2ab)c = 4abc,$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ (2bc) = 2a(2bc) = 4abc,$$

т.е. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ и операция ассоциативна. Ясно, что

$$a \circ b = (2ab) = 2ba = b \circ a$$

и операция коммутативна. Поэтому множество $\mathbb{R}^*$ с операцией $\circ$ является коммутативной полугруппой.

Единичный элемент n должен удовлетворять равенствам:

$$a = a \circ n = 2an, \; a = n \circ a = 2na.$$

Очевидно, этим равенствам удовлетворяет число $\frac{1}{2}$, поэтому $\frac{1}{2}$ — единичный элемент.

Обратный элемент b к элементу a должен удовлетворять равенствам:

$$\frac{1}{2} = a \circ b = 2ab, \; \frac{1}{2} = b \circ a = 2ba.$$

Очевидно этим равенствам удовлетворяет элемент $\frac{1}{4a}$, поэтому $\frac{1}{4a}$ — обратный элемент к элементу a.

Таким образом, множество $\mathbb{R}^*$ с операцией $\circ$ является абелевой группой с единичным элементом $\frac{1}{2}$ и обратным к a элементом $\frac{1}{4a}$.

Ответ: Множество $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ с операцией $a \circ b = 2ab$ является абелевой группой. ⊠

Пример 2.5. Так как $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — аддитивные группы, то $\mathbb{Z}$ — подгруппа групп $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, а $\mathbb{Q}$ — подгруппа группы $\mathbb{R}$.

Поскольку $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\{-1,1\}$ — мультипликативные группы, то $\{-1,1\}$ — подгруппа групп $\mathbb{Q}^*$ и $\mathbb{R}^*$, а $\mathbb{Q}^*$ — подгруппа группы $\mathbb{R}^*$.

Так как S_n и A_n — группы с одной и той же операцией и $A_n \subseteq S_n$, то знакопеременная группа A_n является подгруппой симметрической группы S_n. ⊠

Пример 2.6. Будет ли множество

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

с обычными операциями сложения и умножения действительных чисел кольцом, полем?

□ Покажем прежде всего, что на множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ сложение и умножение определено.

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

для любых чисел $(a + b\sqrt{2}), (c + d\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Проверим выполнение условий определения кольца и поля. Ассоциативность сложения во множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ следует из ассоциативности сложения во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Нулевым элементом во множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ будет число $0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Элементом, противоположным элементу $a + b\sqrt{2}$, во множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ будет элемент $-a - b\sqrt{2}$.

Коммутативность сложения во множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ следует из коммутативности сложения во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Ассоциативность умножения во множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ следует из ассоциативности умножения во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Коммутативность умножения и выполнение законов дистрибутивности также следуют из выполнения соответствующих свойств во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Тем самым доказано, что множество $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ является кольцом.

Единичным элементом во множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ является число $1 + 0\sqrt{2}$ поскольку

$$(a + b\sqrt{2})(1 + 0\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$$

для любого элемента $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Пусть $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})^*$. Это означает, что $a^2 + b^2 \neq 0$, т.е. a и b одновременно не равны нулю. Пусть $x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и является элементом, обратным для элемента $a + b\sqrt{2}$. Тогда

$$(a + b\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = 1 + 0\sqrt{2},$$

$$(a + b\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = 1,$$

откуда

$$x + y\sqrt{2} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{b}{2b^2 - a^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

так как

$$\frac{a}{a^2 - 2b^2}, \quad \frac{b}{2b^2 - a^2} \in \mathbb{Q}, \quad a^2 - 2b^2 \neq 0.$$

Таким образом, каждый ненулевой элемент $a + b\sqrt{2}$ имеет в $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ обратный элемент $\frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{b}{2b^2 - a^2}\sqrt{2}$.

Ответ: Множество $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ является полем. ⊠

2.3. Индивидуальные задания

1. Будет ли множество A с операцией $*$ полугруппой? Существует ли здесь единичный элемент?

1.1. $A = \mathbb{N}$, $a * b = 2(a+b)$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.
1.2. $A = \mathbb{Z}$, $a * b = a - b + 1$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.
1.3. $A = \mathbb{Q}$, $a * b = 2a + b$, $\forall a, b \in \mathbb{Q}$.
1.4. $A = \mathbb{R}$, $a * b = 4ab$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
1.5. $A = \mathbb{N}$, $a * b = a^b$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.
1.6. $A = \mathbb{Z}$, $a * b = a + b - 2$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.
1.7. $A = \mathbb{Q}$, $a * b = 3(a+b)$, $\forall a, b \in \mathbb{Q}$.
1.8. $A = \mathbb{R}$, $a * b = \frac{a+b}{3}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
1.9. $A = \mathbb{N}$, $a * b = \sqrt{ab}$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.
1.10. $A = \mathbb{Z}$, $a * b = -(a+b)$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.
1.11. $A = \mathbb{Q}$, $a * b = (a+b)^2$, $\forall a, b \in \mathbb{Q}$.
1.12. $A = \mathbb{R}$, $a * b = -2ab$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
1.13. $A = \mathbb{N}$, $a * b = a^2 + b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.
1.14. $A = \mathbb{Z}$, $a * b = a + b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.
1.15. $A = \mathbb{Q}$, $a * b = \frac{ab}{2}$, $\forall a, b \in \mathbb{Q}$.

2. Будет ли множество M с указанной операцией $*$ группой? Операция $*$ коммутативна или нет?

2.1. $M = \mathbb{Q}^*$, $a * b = 5ab$, $\forall a, b \in M$.
2.2. $M = \{-1; 1\}$, $a * b = ab$, $\forall a, b \in M$.
2.3. $M = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $a * b = a + b$, $\forall a, b \in M$.
2.4. $M = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $a * b = ab$, $\forall a, b \in M$.
2.5. $M = \{\frac{m}{2^{k-1}} \mid m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, $a * b = a + b$, $\forall a, b \in M$.
2.6. $M = \{\frac{m}{2^{k-1}} \mid m \in \mathbb{Z}^*, k \in \mathbb{N}\}$, $a * b = ab$, $\forall a, b \in M$.
2.7. $M = \{c + d\sqrt{3} \mid c, d \in \mathbb{Z}\}$, $a * b = a + b$, $\forall a, b \in M$.
2.8. $M = \mathbb{Q}^*$, $a * b = 3ab$, $\forall a, b \in M$.
2.9. $M = \{c + d\sqrt{3} \mid c \in \mathbb{Q}^*, d \in \mathbb{Q}\}$, $a * b = ab$, $\forall a, b \in M$.
2.10. $M = \mathbb{Z}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$,

$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$, $\forall (a, b), (c, d) \in M$.
2.11. $M = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$, $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$, $\forall (a, b), (c, d) \in M$.
2.12. $M = \mathbb{Q}^*$, $a * b = -2ab$, $\forall a, b \in M$.
2.13. $M = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $a * b = a + b$, $\forall a, b \in M$.
2.14. $M = \{c - d\sqrt{2} \mid c, d \in \mathbb{Z}\}$, $a * b = a + b$, $\forall a, b \in M$.
2.15. $M = \{c - d\sqrt{2} \mid c \in \mathbb{Q}^*, d \in \mathbb{Q}\}$, $a * b = ab$, $\forall a, b \in M$.

3. Является ли следующее множество аддитивной или мультипликативной группой?

3.1. $M = \{\frac{a}{2^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$.
3.2. $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
3.3. $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a \in \mathbb{Q}^*, b \in \mathbb{Q}\}$.
3.4. $M = \{\frac{a}{3^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$.
3.5. $M = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
3.6. $M = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
3.7. $M = \{\frac{a}{2^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}^*, k \in \mathbb{N}\}$.
3.8. $M = \{a - b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
3.9. $M = \{-\frac{a}{3^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}^*, k \in \mathbb{N}\}$.
3.10. $M = \{-a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
3.11. $M = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
3.12. $M = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
3.13. $M = \{-a + b\sqrt{3} \mid a \in \mathbb{Q}^*, b \in \mathbb{Q}\}$.
3.14. $M = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{R} \backslash \{-\frac{1}{2}\}\}$.
3.15. $M = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{1}{2}\}\}$.

4. Будет ли множество K с указанными операциями сложения и умножения кольцом?

4.1. $K = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.2. $K = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

4.3. $K = \{\frac{a}{2^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.4. $K = \mathbb{R}$, сложение действительных чисел, умножение: $a * b = 2ab$.

4.5. $K = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.6. $K = \{a - b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.7. $K = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, (a, b) + (c, d) = (a, d), (a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

4.8. $K = \{\frac{a}{3^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.9. $K = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}, (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$.

4.10. $K = \{-\frac{a}{4^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.11. $K = \{a - b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.12. $K = \{a - b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.13. $K = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}, (0, a) + (0, b) = (0, a + b), (0, a)(0, b) = (0, ab)$.

4.14. $K = \{\frac{a}{5^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.15. $K = \{-\frac{a}{2^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5. Является ли множество P с указанными операциями полем?

5.1. $P = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), (a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

5.2. $P = \{\frac{a}{2^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.3. $P = \mathbb{R}$, сложение действительных чисел, умножение: $a * b = 2ab$.

5.4. $P = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.5. $P = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}, (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$.

5.6. $P = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}, (0, a) + (0, b) = (0, a + b), (0, a)(0, b) = (0, ab)$.

5.7. $P = \mathbb{Q}$, сложение рациональных чисел, умножение: $a * b = -3ab$.

5.8. $P = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.9. $P = \{\frac{a}{4^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.10. $P = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.11. $P = \{\frac{a}{3^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.12. $P = \{\frac{a}{5^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.13. $P = \{-\frac{a}{2^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.14. $P = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, (a, b) + (c, d) = (a, d), (a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

5.15. $P = \{a - b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

3. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

3.1. Вопросы теории

1. Определение и свойства делимости целых чисел.
2. Теорема о делении с остатком.
3. Наибольший общий делитель (НОД) целых чисел, его свойства.
4. Алгоритм Евклида. Нахождение НОД с помощью алгоритма Евклида.
5. Теорема о линейном выражении НОД через исходные числа.
6. Бинарный алгоритм нахождения НОД.
7. Объединение алгоритма Евклида и бинарного алгоритма.
8. Взаимно простые числа. Критерий взаимной простоты двух целых чисел.
9. Свойства взаимно простых чисел.
10. Простые числа и их свойства.
11. Основная теорема арифметики. Каноническое разложение целого числа.
12. Наименьшее общее кратное (НОК) целых чисел, его свойства. Связь НОД и НОК натуральных чисел.
13. Нахождение НОД и НОК целых чисел с помощью канонических разложений.

3.2. Примеры решения задач

ПРИМЕР 3.1. Разделить ± 257 на ± 23.

$\square$ Так как $253 = 23 \cdot 11 < 257 < 23 \cdot 12 = 276$, то $257 = 23 \cdot 11 + 4$. Здесь 11 — неполное частное, 4 — остаток.

Разделим -257 на 23. Для этого найдем целое q такое, что $23q \leq -257 < 23(q+1)$. Так как $23 \cdot (-12) = -276 \leq -257 < 23(-11)$, то $-257 = 23(-12) + 19$.

Делим на -23. Берем $257 = 23 \cdot 11 + 4$ и записываем в виде $257 = (-23) \cdot (-11) + 4$. Для деления -257 на -23 берем $-257 = 23 \cdot (-12) + 19$ и записываем в виде $-257 = (-23) \cdot 12 + 19$.

ОТВЕТ: $257 = 23 \cdot 11 + 4$, $257 = (-23) \cdot (-11) + 4$, $-257 = 23 \cdot (-12) + 19$, $-257 = (-23) \cdot 12 + 19$. $\boxtimes$

ПРИМЕР 3.2. Докажите, что для любого натурального числа n целое число $a = -n^3 - 17n + 12$ делится на 6.

$\square$ Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ число $a = -6$ делится на 6 и утверждение верно. Предположим, что утверждение верно для любого натурального числа $n \leq k$. Докажем справедливость утверждения при $n = k + 1$. Число $a = -(k+1)^3 - 17(k+1) + 12 = -(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - 17k - 17 + 12 = (-k^3 - 17k + 12) - 3k^2 - 3k - 1 - 17 = (-k^3 - 17k + 12) - 3k(k+1) - 18$. По предположению индукции $(-k^3 - 17k + 12)$ делится на 6. Одно из двух последовательных натуральных чисел $k, k+1$ четно, и поэтому слагаемое $3k(k+1)$ делится на 6. Так как каждое слагаемое в выражении $(-k^3 - 17k + 12) - 3k(k+1) - 18$ делится на 6, то и вся сумма, которая является числом a, делится на 6. Согласно принципу математической индукции число $a = -n^3 - 17n + 12$ делится на 6 для любого натурального числа n. $\boxtimes$

ПРИМЕР 3.3. Вычислите НОД(96, 165) и НОД(2585, 7975). Выразите НОД через исходные числа.

$\square$ Составим алгоритм Евклида для чисел 165 и 96, последовательно выполняя деление с остатком:

$$165 = 96 \cdot 1 + 69,$$
$$96 = 69 \cdot 1 + 27,$$
$$69 = 27 \cdot 2 + 15,$$
$$27 = 15 \cdot 1 + 12,$$

$$15 = 12 \cdot 1 + 3,$$
$$12 = 3 \cdot 4.$$

Последний, отличный от нуля остаток в алгоритме Евклида, является наибольшим общим делителем чисел 165 и 96, т.е. НОД$(96, 165) = 3$.

Чтобы выразить НОД$(96, 165)$ через исходные числа 96 и 165, будем двигаться в алгоритме Евклида снизу вверх, последовательно выражая остатки: НОД$(96, 165) = 3 = 15-12 = 15-(27-15) = 2\cdot 15-27 = 2(69-27\cdot 2)-27 = 2\cdot 69-5\cdot 27 = 2\cdot 69-5(96-69) = 7\cdot 69-5\cdot 96 = 7(165-96)-5\cdot 96 = 7\cdot 165-12\cdot 96$. Поэтому $3 = 96\cdot(-12)+7\cdot 165$.

Производя деление для чисел 2585 и 7975 получаем равенства:

$7975 = 2585 \cdot 3 + 220,$
$2585 = 220 \cdot 11 + 165,$
$220 = 165 \cdot 1 + 55,$
$156 = 55 \cdot 3.$

Последний отличный от нуля остаток равен 55, это и есть наибольший общий делитель чисел 2585 и 7975. Так как $55 = 220-165 = 220-(2585-220\cdot 11) = 220\cdot 12-2585 = (7975-2585\cdot 3)12-2585 = 2585\cdot(-37)+7975\cdot 12$, то $55 = 2585\cdot(-37)+7975\cdot 12$.

Ответ: НОД$(96, 165) = 3 = 96\cdot(-12)+7\cdot 165$.
НОД$(2585, 7975) = 55 = 2585\cdot(-37)+7975\cdot 12$. ⊠

Пример 3.4. Найдите НОК$(2585, 7975)$.

☐ Имеем

$$\text{НОК}(2585, 7975) = \frac{2585\cdot 7975}{\text{НОД}(2585, 7975)} = $$
$$= \frac{2585\cdot 7975}{55} = 374825.$$

Ответ: НОК$(2585, 7975) = 374825$. ⊠

Пример 3.5. Найдите натуральные числа a и b, если НОД$(a, b) = 24$, а НОК$(a, b) = 2496$.

☐ Пусть $a = 24m$, $b = 24n$. Так как НОД$(a, b) = 24$, то m и n — взаимно простые натуральные числа. Пусть для определенности $m < n$. Используя связь НОК и НОД натуральных чисел, имеем $24\cdot 2496 = 24m\cdot 24n$, откуда $m\cdot n = 104 = 2^3\cdot 13$. Поскольку m и n взаимно просты, то возможны два случая:

1) $m = 1, n = 104$. Тогда $a = 24, b = 2496$,

2) $m = 2^3, n = 13$. Тогда $a = 192, b = 312$.

Ответ: $a = 24$, $b = 2496$ или $a = 192$, $b = 312$. ⊠

Пример 3.6. Найдите НОД$(29568, 8580)$ с помощью бинарного алгоритма и с помощью алгоритма Евклида.

☐ Шаг 1. Выделяем наибольшую степень двойки, на которую делятся эти числа $29568 = 2^2\cdot 7392$, $8580 = 2^2\cdot 2145$. Запоминаем 2^2.

Шаг 2. Число 7392 четное. Делим его на максимально возможную степень 2, оставляя второе число 2145 без изменения. $7392 = 2^5\cdot 231$. Теперь надо искать $d = $ НОД$(231, 2145)$.

Шаг 3. Вычитаем из большего числа 2145 меньшее 231. Имеем $2145-231 = 1914$, $d = $ НОД$(231, 1914)$.

Шаг 4. Применяем к 1914 действие шага 2. Получаем $1914 = 2\cdot 957$. Теперь $d = $ НОД$(231, 957)$ и надо возвращаться к действиям шага 2 и шага 3, и т.д.

Все эти вычисления записываются в таблицу.

шаг 1	$29568 = 2^2 \cdot 7392$	$8580 = 2^2 \cdot 2145$
шаг 2	$7392 = 2^5 \cdot 231$	
шаг 3		$2145 - 231 = 1914$
шаг 2		$1914 = 2 \cdot 957$
шаг 3		$957 - 231 = 726$
шаг 2		$726 = 2 \cdot 363$
шаг 3		$363 - 231 = 132$
шаг 2		$132 = 2^2 \cdot 33$
шаг 3	$231 - 33 = 198$	
шаг 2	$198 = 2 \cdot 99$	
шаг 3	$99 - 33 = 66$	
шаг 2	$66 = 2 \cdot 33$	
шаг 3	$33 - 33 = 0$	

Итак, НОД$(29568, 8580) = 2^2 \cdot 33 = 132$.

Вычислим НОД$(29568, 8580)$ с помощью алгоритма Евклида.

$29568 = 8580 \cdot 2 + 3828$
$8580 = 3828 \cdot 2 + 924$
$3828 = 924 \cdot 4 + 132$
$924 = 132 \cdot 7$

Ответ: НОД$(29568, 8580) = 132$. ⊠

Пример 3.7. Найдите НОД$(29568, 8580)$.

□ НОД$(29568, 8580) = 2^2 \cdot$ НОД$(7392, 2145)$.
$7392 = 2145 \cdot 4 - 1188$
$1188 = 4 \cdot 297$
$2145 = 297 \cdot 7 + 66$
$66 = 2 \cdot 33$
$297 = 33 \cdot 9$
Итак, НОД$(7392, 2145) = 33$.

Ответ: НОД$(29568, 8580) = 4 \cdot 33 = 132$. ⊠

Пример 3.8. Являются ли числа 181 и 197 простыми?

□ 181 и 197 не делятся на простые числа $2, 5, 7, 11, 13$. Так как других простых чисел не более 15 нет и $\sqrt{181} < \sqrt{197} < 15$, то числа 181 и 197 простые.

Ответ: являются. ⊠

Пример 3.9. Разложите 2353 на простые множители.

□ Так как $\sqrt{2353} < 50$, то надо испытать все простые числа не более 47. Числа 2, 3, 5, 7, 11 не делят 2353, а 13 делит $2353 = 13 \cdot 181$. В предыдущем примере установлено, что 181 — простое число.

Ответ: $2353 = 13 \cdot 181$. ⊠

3.3. Индивидуальные задания

1. Методом математической индукции докажите, что для любого натурального числа n целое число a делится на целое число b.

1.1. $a = n(n+1)(2n+1)$, $b = 6$.
1.2. $a = 6^{2n} - 1$, $b = 35$.
1.3. $a = n(n^2+5)$, $b = 6$.
1.4. $a = 4^n + 15^n - 1$, $b = 9$.
1.5. $a = n(n^3 + 2n^2 - n + 22)$, $b = 24$.
1.6. $a = 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$, $b = 17$.
1.7. $a = (n+2)(n^2+4n+9)$, $b = 6$.
1.8. $a = 3^{2n+1} + 40n - 67$, $b = 64$.
1.9. $a = (n-1)(n^2+n+12)$, $b = 6$.
1.10. $a = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$, $b = 24$.
1.11. $a = n^3 + 5n + 12$, $b = 6$.
1.12. $a = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, $b = 9$.
1.13. $a = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$, $b = 11$.
1.14. $a = 3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$, $b = 19$.
1.15. $a = 2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$, $b = 25$.

2. Найдите неполное частное и остаток от деления числа a на число b.

2.1. $a = \pm 761$, $b = \pm 13$.

2.2. $a = \pm 652$, $b = \pm 21$.
2.3. $a = \pm 529$, $b = \pm 15$.
2.4. $a = \pm 632$, $b = \pm 18$.
2.5. $a = \pm 437$, $b = \pm 24$.
2.6. $a = \pm 356$, $b = \pm 17$.
2.7. $a = \pm 543$, $b = \pm 19$.
2.8. $a = \pm 458$, $b = \pm 27$.
2.9. $a = \pm 591$, $b = \pm 12$.
2.10. $a = \pm 653$, $b = \pm 14$.
2.11. $a = \pm 729$, $b = \pm 11$.
2.12. $a = \pm 478$, $b = \pm 26$.
2.13. $a = \pm 825$, $b = \pm 13$.
2.14. $a = \pm 751$, $b = \pm 22$.
2.15. $a = \pm 562$, $b = \pm 16$.

3. Известно делимое a и неполное частное b. Найдите делитель и остаток.

3.1. $a = -43251$, $b = 243$.
3.2. $a = 31564$, $b = -263$.
3.3. $a = -40201$, $b = -194$.
3.4. $a = 53262$, $b = -280$.
3.5. $a = -46707$, $b = 525$.
3.6. $a = 61796$, $b = -325$.
3.7. $a = 27829$, $b = -567$.
3.8. $a = -37654$, $b = 236$.
3.9. $a = -46524$, $b = -512$.
3.10. $a = 43264$, $b = -363$.
3.11. $a = -51067$, $b = 198$.
3.12. $a = -35266$, $b = -203$.
3.13. $a = 40053$, $b = -426$.
3.14. $a = -36248$, $b = -159$.
3.15. $a = -56728$, $b = 163$.

4. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД(a, b) и выразите его через исходные числа. Используя связь НОД и НОК двух натуральных чисел, вычислите НОК(a, b).

4.1. $a = 5544$, $b = 7644$.

4.2. $a = 2585$, $b = 7975$.
4.3. $a = 1188$, $b = 3080$.
4.4. $a = 4704$, $b = 9100$.
4.5. $a = 1296$, $b = 6600$.
4.6. $a = 6188$, $b = 4709$.
4.7. $a = 6125$, $b = 1190$.
4.8. $a = 3069$, $b = 1881$.
4.9. $a = 4968$, $b = 6678$.
4.10. $a = 3120$, $b = 2325$.
4.11. $a = 6252$, $b = 777$.
4.12. $a = 2975$, $b = 9996$.
4.13. $a = 1368$, $b = 7056$.
4.14. $a = 1716$, $b = 1540$.
4.15. $a = 5796$, $b = 5187$.

5. Вычислите НОД(a, b) с помощью бинарного алгоритма.

5.1. $a = 46368$, $b = 41496$.
5.2. $a = 27456$, $b = 24640$.
5.3. $a = 43776$, $b = 56448$.
5.4. $a = 47600$, $b = 39984$.
5.5. $a = 50016$, $b = 49728$.
5.6. $a = 49920$, $b = 74400$.
5.7. $a = 39744$, $b = 26712$.
5.8. $a = 49000$, $b = 38080$.
5.9. $a = 49104$, $b = 60192$.
5.10. $a = 49504$, $b = 75344$.
5.11. $a = 82944$, $b = 52800$.
5.12. $a = 75264$, $b = 36400$.
5.13. $a = 76032$, $b = 49280$.
5.14. $a = 82720$, $b = 63800$.
5.15. $a = 44352$, $b = 30576$.

6. Известны НОД(a, b) и НОК(a, b). Найдите натуральные числа a и b.

6.1. НОД$(a, b) = 16$, НОК$(a, b) = 1584$.
6.2. НОД$(a, b) = 15$, НОК$(a, b) = 630$.
6.3. НОД$(a, b) = 22$, НОК$(a, b) = 3630$.

6.4. НОД$(a,b) = 19$, НОК$(a,b) = 5187$.
6.5. НОД$(a,b) = 14$, НОК$(a,b) = 2856$.
6.6. НОД$(a,b) = 15$, НОК$(a,b) = 6900$.
6.7. НОД$(a,b) = 30$, НОК$(a,b) = 15660$.
6.8. НОД$(a,b) = 27$, НОК$(a,b) = 5589$.
6.9. НОД$(a,b) = 36$, НОК$(a,b) = 6480$.
6.10. НОД$(a,b) = 12$, НОК$(a,b) = 1872$.
6.11. НОД$(a,b) = 21$, НОК$(a,b) = 756$.
6.12. НОД$(a,b) = 26$, НОК$(a,b) = 4914$.
6.13. НОД$(a,b) = 35$, НОК$(a,b) = 8925$.
6.14. НОД$(a,b) = 18$, НОК$(a,b) = 4896$.
6.15. НОД$(a,b) = 14$, НОК$(a,b) = 4410$.

7. С помощью канонических разложений найдите НОД(a,b,c) и НОК(b,c).
7.1. $a = 6188$, $b = 88$, $c = -320$.
7.2. $a = 4704$, $b = 96$, $c = -154$.
7.3. $a = 1716$, $b = -204$, $c = 56$.
7.4. $a = -3069$, $b = 112$, $c = 84$.
7.5. $a = 9100$, $b = 92$, $c = -114$.
7.6. $a = 7056$, $b = 190$, $c = -68$.
7.7. $a = -1368$, $b = 99$, $c = 150$.
7.8. $a = -1540$, $b = 105$, $c = 215$.
7.9. $a = 1296$, $b = 230$, $c = -78$.
7.10. $a = 1188$, $b = -132$, $c = -64$.
7.11. $a = -3120$, $b = 85$, $c = 100$.
7.12. $a = 4968$, $b = 104$, $c = -56$.
7.13. $a = -7644$, $b = 196$, $c = -76$.
7.14. $a = 1716$, $b = -72$, $c = 124$.
7.15. $a = 1288$, $b = -144$, $c = -66$.

4. СРАВНЕНИЯ

4.1. Вопросы теории

1. Определение и критерий сравнимости двух целых чисел.
2. Свойства сравнений, не связанные с модулем.
3. Свойства сравнений, связанные с модулем.
4. Классы вычетов, их сложение и умножение. Кольцо классов вычетов.
5. Условие существования обратного элемента в кольце классов вычетов. Поле классов вычетов.
6. Функция Эйлера, ее свойства и вычисление.
7. Теорема Эйлера и теорема Ферма.

4.2. Примеры решения задач

Пример 4.1. Докажите, что $6^{1001} + 1$ и $6^{1000} - 1$ делятся на 7.

□ Так как $6 \equiv -1 \pmod 7$, то $6^{1000} \equiv 1 \pmod 7$ и $6^{1001} \equiv -1 \pmod 7$, т.е. 7 делит $6^{1000} - 1$ и $6^{1001} + 1$. ⊠

Пример 4.2. Покажем, что число n и сумма его цифр имеют одинаковые остатки от деления на 9 и 3.

□ Пусть число n записано цифрами $a_r, a_{r-1}, \ldots, a_1, a_0$, т.е.

$$n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \ldots + a_{r-1} 10^{r-1} + a_r 10^r.$$

Так как $10 \equiv 1 \pmod t$, где $t \in \{3, 9\}$, то $10^k \equiv 1 \pmod t$ для любого целого числа $k \geq 0$. По свойствам сравнений $a_k \equiv a_k \pmod t$ и $a_k 10^k \equiv a_k \pmod t$ для любого $k \geq 0$. Складывая сравнения $a_k 10^k \equiv a_k \pmod t$ для $k = 0, 1, \ldots, r$, получим $n \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_r \pmod t$. ⊠

Пример 4.3. Найдите остаток от деления числа $a = 29^{2020} + 6^{231}$ на 31.

$\square$ Необходимо найти число r, удовлетворяющее условиям

$$29^{2929} + 6^{231} \equiv r \pmod{31},\ 0 \le r < 31.$$

Воспользуемся свойствами сравнений. Так как $29 \equiv -2 \pmod{31}$, то $29^{2929} \equiv (-2)^{2929} \pmod{31}$. Поскольку $(-2)^5 = -32 \equiv -1 \pmod{31}$, то

$$(-2)^{2929} = ((-2)^5)^{585} \cdot (-2)^4 \equiv (-1)^{585} \cdot (-2)^4 \pmod{31}.$$

Поэтому $(-2)^{2929} \equiv -16 \pmod{31}$ и $29^{2929} \equiv -16 \pmod{31}$. Так как $6^2 = 36 \equiv 5 \pmod{31}$, то

$$6^{231} = (6^2)^{115} \cdot 6 \equiv 5^{115} \cdot 6 \pmod{31}.$$

Поскольку $5^3 = 125 \equiv 1 \pmod{31}$, то

$$5^{115} \cdot 6 = (5^3)^{38} \cdot 5 \cdot 6 \equiv 1^{38} \cdot 30 \pmod{31}.$$

Таким образом, $6^{231} \equiv 30 \pmod{31}$. Теперь, складывая сравнения $29^{2929} \equiv -16 \pmod{31}$ и $6^{231} \equiv 30 \pmod{31}$, получим $29^{2929} + 6^{231} \equiv -16 + 30 \pmod{31}$, откуда $29^{2929} + 6^{231} \equiv 14 \pmod{31}$. Следовательно, остаток при делении числа a на 31 равен 14.

ОТВЕТ: 14. $\boxtimes$

ПРИМЕР 4.4. Вычислите значение функции Эйлера для числа 113400.

$\square$ Воспользуемся утверждением о том, что если $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ — каноническое разложение натурального числа a, то значение функции Эйлера

$$\varphi(a) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \dots (p_n^{\alpha_n} - p_n^{\alpha_n - 1}).$$

Находим каноническое разложение числа 113400: $113400 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Тогда $\varphi(113400) = (2^3 - 2^2)(3^4 - 3^3)(5^2 - 5)(7 - 7^0) = 4 \cdot 54 \cdot 20 \cdot 6 = 25920$.

ОТВЕТ: 25920. $\boxtimes$

ПРИМЕР 4.5. В кольце $\mathbb{Z}_{24}$ перечислите обратимые элементы и делители нуля. Составьте таблицу умножения обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}_{24}$ и для каждого обратимого элемента укажите обратный.

$\square$ Поскольку НОД$(24, x) \neq 1$ для каждого $x \in$

$\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22\}$, то соответствующие классы вычетов $\overline{x}$ будут делителями нуля.

Обратимыми элементами в кольце $\mathbb{Z}_{24}$ будут элементы $\overline{1}$, $\overline{5}$, $\overline{7}$, $\overline{11}$, $\overline{13}$, $\overline{17}$, $\overline{19}$, $\overline{23}$. Число обратимых элементов равно 8 и совпадает со значением функции Эйлера $\varphi(24) = \varphi(2^3 \cdot 3) = \varphi(2^3)\varphi(3) = (2^3 - 2^2)(3 - 1) = 8$.

Составим таблицу умножения обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}_{24}$.

	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$	$\overline{23}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$	$\overline{23}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$	$\overline{23}$	$\overline{19}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{19}$	$\overline{23}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{23}$	$\overline{19}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$	$\overline{23}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$	$\overline{23}$	$\overline{19}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{23}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$
$\overline{23}$	$\overline{23}$	$\overline{19}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$

Из таблицы получаем, что каждый элемент совпадает со своим обратным элементом. $\boxtimes$

ПРИМЕР 4.6. Решите сравнение $7x \equiv 16 \pmod{23}$.

$\square$ Первый способ. Будем изменять коэффициенты, используя свойства сравнений с целью сократить коэффициент при неизвестной. Вычтем из данного сравнения другое сравнение $0 \equiv 23 \pmod{23}$. Получим $7x \equiv -7 \pmod{23}$. Так как 7 и 23 взаимно просты, то можно обе части сравнения поделить на 7. Тогда $x \equiv -1 \pmod{23}$. Прибавим сравнение $0 \equiv 23 \pmod{23}$. Получим $x \equiv 22 \pmod{23}$. Таким образом, решениями данного сравнения будут все числа класса $\overline{22}$.

Второй способ. Так как 7 и 23 взаимно просты, то по теореме Эйлера $7^{\varphi(23)} \equiv 1 \pmod{23}$. Число 23 — простое, поэтому $\varphi(23) = 22$. Следовательно, $7^{22} \equiv 1 \pmod{23}$. Умножим это сравнение на $x \equiv x \pmod{23}$. Получим $7^{22}x \equiv x \pmod{23}$. Но $7^{22}x = 7^{21}7x \equiv 7^{21} \cdot 16 \pmod{23}$.

Следовательно, $x \equiv 7^{21} \cdot 16 \pmod{23}$. Найдем остаток при делении $7^{21} \cdot 16$ на 23. Так как $7^2 = 49 \equiv 3 \pmod{23}$, то $7^{21} = (7^2)^{10} \cdot 7 \equiv 3^{10} \cdot 7 \pmod{23}$. Поскольку $3^3 = 27 \equiv 4 \pmod{23}$, то $3^{10} \cdot 7 = (3^3)^3 \cdot 3 \cdot 7 \equiv 4^3 \cdot 21 \pmod{23}$. Так как $4^3 = 64 \equiv -5 \pmod{23}$ и $21 \equiv -2 \pmod{23}$, то $4^3 \cdot 21 \equiv (-5) \cdot (-2) \pmod{23}$. Итак, $7^{21} \equiv 10 \pmod{23}$. Тогда $7^{21} \cdot 16 \equiv 10 \cdot 16 \pmod{23}$. Поскольку, $160 \equiv 22 \pmod{23}$ то $7^{21} \cdot 16 \equiv 22 \pmod{23}$. Таким образом, $x \equiv 22 \pmod{23}$.

Ответ: $x = 22 + 23t, \quad t \in \mathbb{Z}$. ⊠

Пример 4.7. Решите сравнение $6x \equiv 10 \pmod{14}$.

□ Так как $2 =$ НОД$(6, 14)$ делит 10, то сравнение имеет 2 решения. Разделим сравнение на НОД$(6, 14) = 2$. Получим $3x \equiv 5 \pmod 7$. Так как 3 и 7 взаимно просты, то это сравнение имеет решениями один класс вычетов по модулю 7. Решим это сравнение. Прибавим к данному сравнению другое сравнение $0 \equiv 7 \pmod 7$. Получим $3x \equiv 12 \pmod 7$. Так как 3 и 7 взаимно просты, то можно обе части сравнения поделить на 3. Тогда $x \equiv 4 \pmod 7$. Итак, решениями будут классы $\overline{4}$ и $\overline{4+7} = \overline{11}$.

Ответ: $x = 4 + 14t$, $x = 11 + 14t$, $t \in \mathbb{Z}$, или $x = 4 + 7t$, $t \in \mathbb{Z}$. ⊠

Пример 4.8. Найдите все целочисленные решения уравнения $54x - 42y = -18$.

□ Выразим одну из неизвестных через другую

$$y = \frac{54x + 18}{42}.$$

Чтобы число y было целым,число x должно удовлетворять сравнению $54x + 18 \equiv 0 \pmod{42}$, т.е. $54x \equiv -18 \pmod{42}$. НОД$(54, 42) = 6$ делит (-18), поэтому сравнение имеет 6 решений. Разделим сравнение на 6. Получим $9x \equiv -3 \pmod 7$. Прибавим сравнение $0 \equiv 21 \pmod 7$. Получим $9x \equiv 18 \pmod 7$. Разделим обе части на 9. Тогда $x \equiv 2 \pmod 7$. Решениями будут классы $\overline{2}$, $\overline{9}$, $\overline{16}$, $\overline{23}$, $\overline{30}$, $\overline{37}$. Все числа этих классов можно записать $x = 2 + 7t$, где $t \in \mathbb{Z}$. Найдем вторую неизвестную

$$y = \frac{54(2 + 7t) + 18}{42} = \frac{126 + 378t}{42} = 3 + 9t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = 2 + 7t$, $y = 3 + 9t$, $t \in \mathbb{Z}$. ⊠

Пример 4.9. В кольце $\mathbb{Z}_{12}$ укажите обратимые элементы и найдите им обратные элементы.

□ Элемент $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ имеет в $\mathbb{Z}_m$ обратный элемент тогда и только тогда, когда a и m взаимно просты. По модулю 12 имеется $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = (2^2 - 2)(3 - 3^0) = 4$ класса вычетов, элементы которых взаимно просты с модулем: $\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}$.

Найдем обратные элементы в кольце $\mathbb{Z}_{12}$ для каждого из указанных классов.

$\overline{1} \cdot \overline{x} = \overline{1}$. Очевидно, что $\overline{x} = \overline{1}$, т.е. $(\overline{1})^{-1} = \overline{1}$.

$\overline{5} \cdot \overline{x} = \overline{1}$. По теореме Эйлера $5^{\varphi(12)} \equiv 1 \pmod{12}$. Тогда $5^4 \equiv 1 \pmod{12}$. Это означает, что $\overline{5^4} = \overline{1}$. По определению умножения классов вычетов $\overline{5} \cdot \overline{5^3} = \overline{1}$. Но $\overline{5^3} = \overline{5}$, так как $5^3 = 125 \equiv 5 \pmod{12}$. Следовательно $\overline{x} = \overline{5}$, т.е. $(\overline{5})^{-1} = \overline{5}$.

$\overline{7} \cdot \overline{x} = \overline{1}$. Аналогично предыдущему $7^{\varphi(12)} \equiv 1 \pmod{12}$, откуда $\overline{7^4} = \overline{1}, \overline{7} \cdot \overline{7^3} = \overline{1}$. Так как $\overline{7^3} = \overline{7}$, то $\overline{x} = \overline{7}$.

$\overline{11} \cdot \overline{x} = \overline{1}$. По теореме Эйлера $11^4 \equiv 1 \pmod{12}$, т.е. $\overline{11^4} = \overline{1}$, откуда $\overline{11} \cdot \overline{11^3} = \overline{1}$. Поскольку $\overline{11^3} = \overline{11}$, то $\overline{x} = \overline{11}$.

Ответ: обратимые элементы: $\overline{1}$, $\overline{5}$, $\overline{7}$, $\overline{11}$. Каждый из этих элементов совпадает со своим обратным. ⊠

4.3. Индивидуальные задания

1. Используя свойства сравнений, найдите остаток от деления a на b.

1.1. $a = 178^{274}$, $b = 22$.
1.2. $a = 5^{50} + 13^{100}$, $b = 18$.
1.3. $a = 5^{70} + 27^{50}$, $b = 12$.
1.4. $a = 139^{291}$, $b = 13$.
1.5. $a = 383^{175}$, $b = 11$.
1.6. $a = 178^{152}$, $b = 11$.
1.7. $a = 34^{374}$, $b = 15$.
1.8. $a = 22^{234}$, $b = 14$.
1.9. $a = 15^{80} + 7^{100}$, $b = 13$.
1.10. $a = 293^{75}$, $b = 13$.
1.11. $a = 194^{198}$, $b = 11$.
1.12. $a = 233^{93}$, $b = 16$.
1.13. $a = 127^{153}$, $b = 15$.
1.14. $a = 274^{100}$, $b = 12$.
1.15. $a = 264^{90}$, $b = 17$.

2. Используя свойства сравнений, найдите последнюю цифру числа a из задания 1.

3. Используя свойства сравнений, докажите, что число c делится на число d.

3.1. $c = 27^{30} + 7$, $d = 16$.
3.2. $c = 26^{15} + 1$, $d = 21$.
3.3. $c = 60^{45} + 72^{45}$, $d = 11$.
3.4. $c = 16^{302} + 9^{302} + 1$, $d = 13$.
3.5. $c = 14^{100} + 5$, $d = 9$.
3.6. $c = 3^{803} - 16$, $d = 11$.
3.7. $c = 24^{21} \cdot 21^{12} - 3^{12} \cdot 17^{21}$, $d = 19$.
3.8. $c = 30^{14} + 10$, $d = 13$.
3.9. $c = 10^{51} + 162$, $d = 14$.
3.10. $c = 29^{47} + (-17)^{47} + 1$, $d = 13$.
3.11. $c = 28^{91} + 5$, $d = 11$.
3.12. $c = 3^{126} - 15$, $d = 14$.
3.13. $c = 48^{153} + 24$, $d = 22$.
3.14. $c = 4^{323} + 26$, $d = 15$.
3.15. $c = 518^{20} + 4$, $d = 13$.

4 Вычислить значение функции Эйлера для числа a.

4.1. $a = 142560$.

4.2. $a = 421200$.
4.3. $a = 539000$.
4.4. $a = 476000$.
4.5. $a = 105840$.
4.6. $a = 273000$.
4.7. $a = 853776$.
4.8. $a = 794976$.
4.9. $a = 702702$.
4.10. $a = 343035$.
4.11. $a = 798525$.
4.12. $a = 606375$.
4.13. $a = 268125$.
4.14. $a = 523908$.
4.15. $a = 548856$.

5. В кольце $\mathbb{Z}_m$ укажите обратимые элементы и делители нуля. Для каждого из обратимых элементов найдите обратный элемент.

5.1. $m = 8$.
5.2. $m = 9$.
5.3. $m = 10$.
5.4. $m = 14$.
5.5. $m = 6$.
5.6. $m = 18$.
5.7. $m = 16$.
5.8. $m = 20$.
5.9. $m = 24$.
5.10. $m = 30$.
5.11. $m = 15$.
5.12. $m = 5$.
5.13. $m = 4$.
5.14. $m = 7$.
5.15. $m = 11$.

6. Составьте таблицу умножения обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}_m$.

6.1 $m = 16$.
6.2. $m = 20$.

6.3. $m = 24$.
6.4. $m = 30$.
6.5. $m = 15$.
6.6. $m = 5$.
6.7. $m = 4$.
6.8. $m = 7$.
6.9. $m = 11$.
6.10. $m = 8$.
6.11. $m = 9$.
6.12. $m = 10$.
6.13. $m = 14$.
6.14. $m = 6$.
6.15. $m = 18$.

7. Решите сравнение первой степени.

7.1. $-3x \equiv 13 \pmod 4$.
7.2. $2x \equiv 9 \pmod 7$.
7.3. $5x \equiv 9 \pmod 6$.
7.4. $-6x \equiv 5 \pmod 7$.
7.5. $13x \equiv 20 \pmod 4$.
7.6. $14x \equiv -10 \pmod 3$.
7.7. $15x \equiv 9 \pmod{11}$.
7.8. $-10x \equiv 8 \pmod 3$.
7.9. $16x \equiv -6 \pmod 9$.
7.10. $29x \equiv 3 \pmod{19}$.
7.11. $17x \equiv -20 \pmod 3$.
7.12. $13x \equiv 4 \pmod 8$.
7.13. $14x \equiv 30 \pmod 9$.
7.14. $6x \equiv 22 \pmod{13}$.
7.15. $7x \equiv -12 \pmod{16}$.

8. Найдите все целочисленные решения уравнения.

8.1. $10x - 15y = 25$.
8.2. $14x + 21y = -49$.
8.3. $12x - 8y = -24$.
8.4. $15x - 18y = 21$.
8.5. $22x + 4y = -16$.
8.6. $12x - 20y = -24$.

8.7. $6x + 42y = -12$.
8.8. $26x + 28y = -4$.
8.9. $27x - 12y = -15$.
8.10. $30x + 55y = -10$.
8.11. $8x - 20y = -16$.
8.12. $21x - 36y = 9$.
8.13. $24x + 14y = -18$.
8.14 $15x - 21y = 42$.
8.15 $32x + 44y = -16$.

5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

5.1. Вопросы теории

1. Построение поля комплексных чисел.
2. Алгебраическая форма комплексного числа.
3. Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме.
4. Извлечение квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме.
5. Изображение комплексного числа на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа.
6. Формулы перехода от алгебраической формы к тригонометрической.
7. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.
8. Формула Муавра.
9. Формула корней n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме.
10. Группа корней n-й степени из единицы.

5.2. Примеры решения задач

Пример 5.1. Даны комплексные числа $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -1 - i$. Вычислите $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

□ При сложении комплексных чисел в алгебраической форме складываются их действительные части и коэффициенты при i:

$$z_1 + z_2 = (2-3i) + (-1-i) = (2-1) + (-3-1)i = 1 - 4i.$$

При вычитании комплексных чисел в алгебраической форме вычитаются их действительные части и коэффициенты при i:

$$z_1 - z_2 = (2-3i) - (-1-i) = (2+1) + (-3+1)i = 3 - 2i.$$

Для того, чтобы перемножить два комплексных числа, надо перемножить их как двучлены, а затем заменить i^2 на -1:

$$z_1 \cdot z_2 = (2-3i)(-1-i) = -2 + 3i - 2i + 3i^2 = = (-2-3) + (3-2)i = -5 + i.$$

Для вычисления частного умножим делимое и делитель на число, сопряженное делителю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{-1-i} = \frac{(2-3i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = = \frac{-2+3i+2i-3i^2}{(-1)^2 - i^2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$$

Ответ: $z_1 + z_2 = 1 - 4i$, $z_1 - z_2 = 3 - 2i$, $z_1 \cdot z_2 = -5 + i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$. ⊠

Пример 5.2. Вычислите $\frac{3+2i}{7-2i}$, $\left(\frac{1-2i}{1+2i}\right)^3$.

□ Для вычисления $\frac{3+2i}{7-2i}$ умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{3+2i}{7-2i} \cdot \frac{7+2i}{7+2i} = \frac{(21-4)+(6+14)i}{7^2-(2i)^2} = \frac{17}{53} + \frac{20}{53}i.$$

Для возведения в куб числа $\frac{1-2i}{1+2i}$ вначале вычислим

$$\frac{1-2i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(1-2i)^2}{1^2-(2i)^2} = \frac{1-4i-4}{1+4} = \frac{-3}{5} - \frac{4}{5}i.$$

Теперь имеем

$$\left(\frac{1+2i}{1-2i}\right)^3 = \left(\frac{-3}{5} - \frac{4}{5}i\right)^3 = \frac{-1}{5^3}(3+4i)^3 = = \frac{-1}{125}(27 + 108i - 144 - 64i) = \frac{-1}{125}(-117 + 44i).$$ ⊠

Пример 5.3. Вычислите $\sqrt{6+8i}$.

□ По формуле

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + (\mathrm{sign} b)i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$$

имеем

$$\sqrt{6+8i} = \pm(\sqrt{8} + i\sqrt{2}).$$

Проверка: $\left(\pm(\sqrt{8}+i\sqrt{2})\right)^2 = 8-2+2\sqrt{8}\sqrt{2}i = 6+8i$.

Ответ: $\pm(\sqrt{8}+i\sqrt{2})$. ⊠

Пример 5.4. Вычислите $\sqrt{1-i}$.

□ Пусть $\sqrt{1-i} = x + yi$, где $x, y \in \mathbb{R}$. Возводя обе части равенства в квадрат, получим $1 - i = (x^2 - y^2) + 2xyi$. Из условия равенства комплексных чисел имеем

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ 2xy = -1. \end{cases}$$

Возводя оба уравнения в квадрат и складывая их, получим

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 2,$$

откуда $(x^2+y^2)^2 = 2$ или $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$.

Рассматривая систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2}, \\ x^2 - y^2 = 1, \end{cases}$$

находим $x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Второе уравнение $2xy = -1$ первоначальной системы указывает, что числа x и y имеют разные знаки. Поэтому исходная система имеет два решения:

$$x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\ y_1 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}};$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\ y_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

Таким образом, $\sqrt{1-i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i\right)$.

Ответ: $z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$,
$z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$. ⊠

Пример 5.5. Найдите действительные решения уравнения $(5-8i)x + (7+3i)y = 2 - i$.

□ Преобразуем левую часть уравнения и используем условие равенства комплексных чисел

$$(5x + 7y) + (-8x + 3y)i = 2 - i.$$

Получим систему

$$\begin{cases} 5x + 7y = 2, \\ -8x + 3y = -1, \end{cases}$$

откуда находим $x = \frac{13}{71}$, $y = \frac{11}{71}$.

Ответ: $x = \frac{13}{71}$, $y = \frac{11}{71}$. ⊠

Пример 5.6. В поле $\mathbb{C}$ решите уравнение $x^2 + x + 1$.

□ Уравнение $x^2 + x + 1$ не имеет действительных корней поскольку дискриминант $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$. Но оно имеет комплексные корни:
$x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. ⊠

Пример 5.7. В поле $\mathbb{C}$ решите квадратное уравнение

$$z^2 - (2+4i)z + (-9/2 + 2i) = 0.$$

□ Находим дискриминант $D = v^2 - 4uw = 6 + 8i$. По формуле корней квадратного уравнения получаем

$$z_1 = \frac{2 + 4i + \sqrt{8} + i\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} + (2 + \sqrt{2}/2)i;$$

$$z_2 = \frac{2 + 4i - (\sqrt{8} + i\sqrt{2})}{2} = 1 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}/2)i.$$

Ответ: $\{1 + \sqrt{2} + (2 + \sqrt{2}/2)i, 1 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}/2)i\}$. ⊠

Пример 5.8. Решите уравнение

$$(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0.$$

□ По формуле корней квадратного уравнения находим

$$x_{1,2} = \frac{(5-i) \pm \sqrt{(5-i)^2 - 4(2+i)(2-2i)}}{2(2+i)} = $$
$$= \frac{(5-i) \pm \sqrt{-2i}}{4+2i}.$$

Так как $\sqrt{-2i} = \pm(1-i)$, то

$$x_1 = \frac{(5-i)+(1-i)}{4+2i} = \frac{6-2i}{4+2i} = 1-i,$$

$$x_2 = \frac{(5-i)-(1-i)}{4+2i} = \frac{4}{4+2i} = \frac{2}{2+i} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i.$$

Ответ: $\{1-i; \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\}$. ⊠

Пример 5.9. Представьте в тригонометрической форме числа

$$z_1 = \sqrt{3} - i,\ z_2 = -5, z_3 = -3(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}).$$

□ Изобразим числа z_1, z_2 на плоскости, см. рис. 1. Для числа $z_1 = \sqrt{3} - i$ имеем:

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2,$$

$$\sin\varphi = -\frac{1}{2},\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

Значит $z_1 = \sqrt{3} - i = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$.

Для $z_2 = -5$ имеем $|z_2| = 5$, $\varphi = \pi$ и $z_2 = -5 = 5(\cos\pi + \sin\pi)$.

Комплексное число $z_3 = -3(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5})$ записано не в тригонометрической форме, так как отрицательное число -3 нельзя считать модулем z_3. Кроме того, коэффициент при i равен $-\sin\frac{\pi}{5}$, а в тригонометрической форме мнимая часть должна быть записана так: $i\sin\varphi$. Представим число z_3 в виде $z_3 = 3(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$. Отсюда заключаем, что аргументом комплексного числа z_3 является такой угол φ, для которого $\cos\varphi = -\cos\frac{\pi}{5}$,

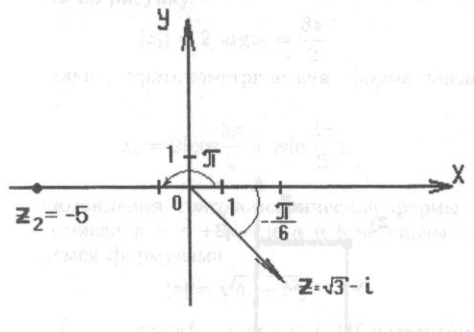


Рис. 1.

а $\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{5}$. Этот угол легко найти: $\varphi = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5}\pi$. Итак, искомое представление в тригонометрической форме есть $z_3 = 3(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5})$.

Ответ: $z_1 = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$;

$z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$; $z_3 = 3(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5})$. ⊠

Пример 5.10. Изобразите на плоскости и запишите в тригонометрической форме числа

$$z_1 = -2i,\ z_2 = -1 + i\sqrt{3},\ z_3 = 1 - i.$$

□ Откладывая действительную часть комплексного числа на оси $0x$, а коэффициент при i — на оси $0y$, получим точки на координатной плоскости, соответствующие числам z_1, z_2, z_3.

Так как точка, соответствующая z_1, лежит на координатной оси Oy, то модуль и аргумент числа z_1 легко

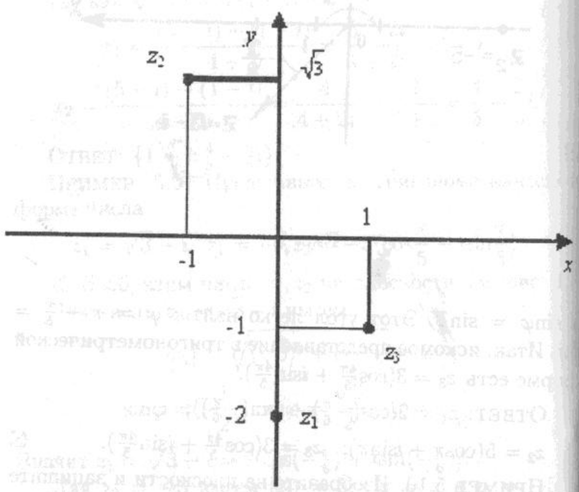


Рис. 2.

определить по рисунку:

$$|z_1| = 2, \arg z_1 = \frac{3\pi}{2}.$$

Следовательно, тригонометрическая форма числа z_1 имеет вид:

$$z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}).$$

Для нахождения тригонометрической формы комплексного числа $z = a + bi$, где a и b не равны нулю, воспользуемся формулами

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, & \text{если } z \in I, IV \text{ четвертям}, \\ \pi + \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, & \text{если } z \in II, III \text{ четвертям}. \end{cases}$$

Определяем $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Так как точка, соответствующая z_2, лежит во II четверти, то

$$\arg z_2 = \pi + \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Получаем следующую тригонометрическую форму

$$z_2 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}).$$

Определяем $|z_3| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Так как точка, соответствующая z_3, лежит в IV четверти, то

$$\arg z_3 = \mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Тригонометрическая форма принимает вид

$$z_3 = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})).$$

Ответ: $z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}), z_2 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}), z_3 = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$. ⊠

Пример 5.11. Изобразите на плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 1 \le |z| \le 3, \\ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

□ Точки, изображающие решения первого неравенства, лежат между окружностями радиусов 1 и 3 с центром в начале координат, включая сами окружности. Точки, изображающие решения второго неравенства, лежат между лучами OA и OB. Искомая область является пересечением этих двух фигур и выделена на рисунке штриховкой, см. рис. 3. ⊠

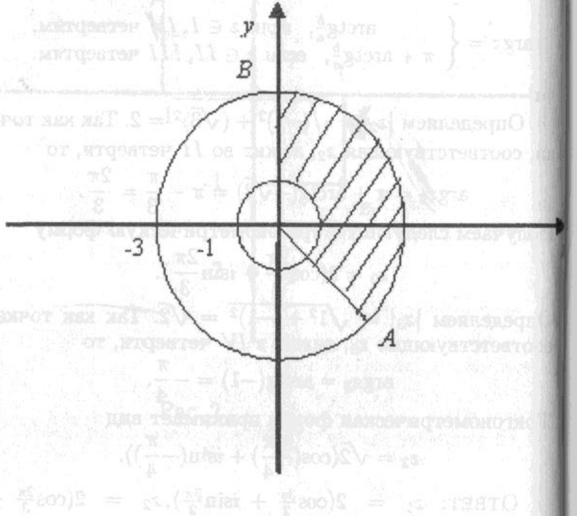


Рис. 3.

ПРИМЕР 5.12. Вычислите $z_1z_2z_3$, $\frac{z_1z_2}{z_3}$ и z_1^{-1}, где z_1, z_2 и z_3 — комплексные числа из примера 5.9.

□ $z_1z_2z_3 = 2\cdot 5\cdot 3(\cos(-\frac{\pi}{6}+\pi+\frac{4}{5}\pi)+$

$$+i\sin(-\frac{\pi}{6}+\pi+\frac{4}{5}\pi)) = 30(\cos\frac{49}{30}\pi + i\sin\frac{49}{30}\pi);$$

$$\frac{z_1z_2}{z_3} = \frac{2\cdot 5}{3}(\cos(-\frac{\pi}{6}+\pi-\frac{4}{5}\pi) + i\sin(-\frac{\pi}{6}+\pi-\frac{4}{5}\pi)) =$$

$$= \frac{10}{3}(\cos\frac{\pi}{30} + i\sin\frac{\pi}{30});$$

$z_1^{-1} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}).$ ⊠

ПРИМЕР 5.13. Вычислите

$$A = \frac{3(\cos 20^0 - i\sin 20^0)\cdot 2(\cos 230^0 - i\sin 130^0)}{-\sin 210^0 - i\cos 210^0}.$$

□ Используя формулы приведения и свойства тригонометрических функций, преобразуем комплексные числа к тригонометрической форме

$$A = \frac{3(\cos(-20^0) + i\sin(-20^0))\cdot 2(\cos 230^0 + i\sin(360^0 - 130^0))}{-\sin(270^0 - 60^0) - i\cos(270^0 - 60^0)} =$$

$$= \frac{3(\cos(-20^0) + i\sin(-20^0))\cdot 2(\cos 230^0 + i\sin 230^0)}{\cos 60^0 + i\sin 60^0}.$$

Теперь, применяя правила умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме, вычислим

$$A = \frac{3\cdot 2(\cos(-20^0 + 230^0) + i\sin(-20^0 + 230^0))}{\cos 60^0 + i\sin 60^0} =$$

$$= 6(\cos(210^0 - 60^0) + i\sin(210^0 - 60^0)) = 6(\cos 150^0 + i\sin 150^0) =$$

$$= 6(\cos(180^0 - 30^0) + i\sin(180^0 - 30^0)) = 6(-\cos 30^0 + i\sin 30^0) =$$

$$= 6(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = -3\sqrt{3} + 3i.$$

ОТВЕТ: $A = -3\sqrt{3} + 3i$ ⊠

Пример 5.14. Вычислите $(z_1z_3)^{30}$, где z_1 и z_3 — комплексные числа из примера 5.9.

□

$$(z_1z_3)^{30} = (2\cdot 3)^{30}(\cos 30(-\frac{\pi}{6}+\frac{4}{5}\pi) + i\sin 30(-\frac{\pi}{6}+\frac{4}{5}\pi)) =$$
$$= 6^{30}(\cos 19\pi + i\sin 19\pi) = 6^{30}(\cos\pi + i\sin\pi) = -6^{30}. \quad \boxtimes$$

Пример 5.15. Вычислите $\sqrt[3]{-5}$.

□ Число (-5) в тригонометрической форме записывается так: $-5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$. По формуле корня из комплексного числа имеем

$$c_k = \sqrt[3]{-5} = \sqrt[3]{5}(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3});\quad k = 0,1,2.$$

Отсюда

$$c_0 = \sqrt[3]{5}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}(1+i\sqrt{3});$$
$$c_1 = \sqrt[3]{5}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt[3]{5};$$
$$c_2 = \sqrt{5}(\cos\tfrac{5}{3}\pi + i\sin\tfrac{5}{3}) = \tfrac{\sqrt[3]{5}}{2}(1-i\sqrt{3}). \quad \boxtimes$$

Пример 5.16. Вычислите $(-1+i\sqrt{3})^6$, $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$.

□ В примере 5.10 найдена тригонометрическая форма комплексного числа $-1+i\sqrt{3}$, а именно $-1+i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$. Из формулы Муавра

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

при $n = 6$ имеем

$$(-1+i\sqrt{3})^6 = (2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}))^6 =$$
$$= 2^6(\cos\frac{6\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{6\cdot 2\pi}{3}) = 64(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) =$$
$$= 64(\cos 0 + i\sin 0) = 64.$$

Для извлечения корня из комплексного числа используем формулу

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\Big),$$

где $k = \overline{0, n-1}$. Поскольку $n = 4$, то

$$z_k = \sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})} =$$
$$= \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}).$$

Полагая $k = 0,1,2,3$, получим

$$z_0 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{2}}{2};$$
$$z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2};$$
$$z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{2}}{2};$$
$$z_3 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}.$$

$\boxtimes$

Пример 5.17. Вычислите $\sqrt[n]{1}$ при $n \le 4$.

□ При $n = 2$ имеем два корня $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_1 = -1$. Множество $\{-1, 1\}$ с умножением является циклической группой $\langle -1\rangle$ порядка 2.

При $n = 3$ имеем три корня:

$$\varepsilon_0 = 1;\ \varepsilon_1 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Множество

$$\{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\}$$

с умножением является циклической группой $\langle -1/2 + \sqrt{3}i/2\rangle$ порядка 3. Составим таблицу умножения для этих корней.

	1	$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$
1	1	$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

В частности,

$$\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

При $n=4$ имеем четыре корня:

$$\varepsilon_0=1,\ \ \varepsilon_1=\cos\frac{2}{4}\pi+i\sin\frac{2}{4}\pi=i,$$

$$\varepsilon_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1;\ \ \varepsilon_3=\cos\frac{6}{4}\pi+i\sin\frac{6}{4}\pi=-i.$$

Множество $\{i,-1,-i,1\}$ с умножением является циклической группой $\langle i\rangle$ порядка 4. Составим таблицу умножения для этих корней.

	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

В частности, $i^{-1}=-i,\ (-1)^{-1}=-1,\ (-i)^{-1}=i.$ ⊠

Пример 5.18. Укажите примитивные корни четвертой степени из единицы.

□ Примитивными корнями четвертой степени из единицы будут корни $\varepsilon_1=i$ и $\varepsilon_3=-i$. ⊠

5.3. Индивидуальные задания

1. Найдите $z_1+z_2,\ z_1-z_2,\ z_1\cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$.

1.1. $z_1=2+i,\ z_2=-3-2i$.

1.2. $z_1=-1+3i,\ z_2=2-i$.

1.3. $z_1=4-i,\ z_2=1+3i$.

1.4. $z_1=-1+4i,\ z_2=2-3i$.

1.5. $z_1=3-i,\ z_2=-2+3i$.

1.6. $z_1=-4+i,\ z_2=2-i$.

1.7. $z_1=1-3i,\ z_2=-2+i$.

1.8. $z_1=4-3i,\ z_2=-2+5i$.

1.9. $z_1=2-4i,\ z_2=3+i$.

1.10. $z_1=-3+2i,\ z_2=5-i$.

1.11. $z_1=-2-5i,\ z_2=-1+i$.

1.12. $z_1=-4+3i,\ z_2=6-i$.

1.13. $z_1=5-2i,\ z_2=3+4i$.

1.14. $z_1=-1-2i,\ z_2=4+3i$.

1.15. $z_1=6-4i,\ z_2=4+i$.

2. Найдите действительные числа x,y из уравнения $z_1\cdot x+z_2\cdot y=2-5i$, где z_1,z_2 — числа из задания 1.

3. Вычислите $\sqrt{z_1}$ и $\sqrt{z_2}$ в алгебраической форме для чисел z_1 и z_2 из задания 1.

4. Решите уравнения

4.1. $x^2-(2+i)x+7i-1=0,\ x^2-4x+5=0$.

4.2. $x^2-(3-2i)x+5-5i=0,\ x^2-3x+4=0$.

4.3. $x^2-(5-3i)x+2-6i=0,\ 2x^2-3x+5=0$.

4.4. $x^2+(2i-7)x+13-i=0,\ x^2+3x+6=0$.

4.5. $x^2-(1+i)x+6+3i=0,\ 3x^2-2x+3=0$.

4.6. $x^2-5x+4+10i=0,\ -2x^2+x-1=0$.

4.7. $(1-i)x^2+(5-i)x+4+2i=0,\ -x^2+2x-2=0$.

4.8. $(3+i)x^2+(1-i)x-6i=0,\ x^2+x+2=0$.

4.9. $x^2-(7+i)x+16+11i=0,\ 3x^2-2x+4=0$.

4.10. $x^2-(3+2i)x+5i+5=0,\ -2x^2+3x-2=0$.

4.11. $x^2+(5i-1)x-8-i=0,\ 3x^2+5x+3=0$.

4.12. $x^2+(4i-3)x-7-i=0,\ 2x^2-4x+5=0$.

4.13. $x^2-(3-3i)x+6-2i=0,\ x^2-2x+5=0$.

4.14. $x^2 - (5-6i)x + 1 - 13i = 0,\ x^2 + 3x + 5 = 0.$

4.15. $x^2 - 3x + 11 - 3i = 0,\ x^2 + 5x + 7 = 0.$

5. Изобразите на плоскости и запишите в тригонометрической форме числа z_1 и z_2.

5.1. $z_1 = 1 - i,\ z_2 = -2i.$

5.2. $z_1 = 3i,\ z_2 = -1 + i\sqrt{3}.$

5.3. $z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = -3.$

5.4. $z_1 = -\sqrt{3} + i,\ z_2 = -i.$

5.5. $z_1 = \sqrt{12} - 2i,\ z_2 = 2i.$

5.6. $z_1 = -4,\ z_2 = 1 + i.$

5.7. $z_1 = 1,\ z_2 = -\sqrt{12} + 2i.$

5.8. $z_1 = -1 + i,\ z_2 = -i.$

5.9. $z_1 = -1 - i,\ z_2 = 6i.$

5.10. $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = -2.$

5.11. $z_1 = -3i,\ z_2 = -\sqrt{3} - i.$

5.12. $z_1 = -2 - i\sqrt{12},\ z_2 = -1.$

5.13. $z_1 = 2,\ z_2 = -1 - i\sqrt{3}.$

5.14. $z_1 = \sqrt{12} + 2i,\ z_2 = -6i.$

5.15. $z_1 = 5i,\ z_2 = -\sqrt{3} - i.$

6. Вычислите

6.1. $5(\cos 350^0 - i\sin(-10^0)) \cdot 2(\cos 80^0 - i\sin 280^0).$

6.2. $3(\cos 50^0 - i\sin 670^0) \cdot 4(\cos 290^0 + i\sin 70^0).$

6.3. $\frac{2(\cos 220^0 + i\sin 140^0)}{(\sin 40^0 - i\cos 220^0)}.$

6.4. $3(\cos 260^0 - i\sin 130^0) \cdot 4(\sin 50^0 + i\cos(-50^0)).$

6.5. $\frac{2(\cos -(\frac{13\pi}{7}) + i\sin\frac{6\pi}{7})}{6(\cos\frac{8\pi}{7} - i\sin\frac{6\pi}{7})}.$

6.6. $3(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}) \cdot (\cos\frac{7\pi}{4} - i\cos\frac{3\pi}{4}).$

6.7. $\frac{5(\cos 49^0 - i\sin 229^0)}{3(\cos 41^0 - i\cos 49^0}).$

6.8. $3(\cos 340^0 - i\sin 20^0) \cdot 2(-\sin 70^0 - i\sin 160^0).$

6.9. $\frac{2(\cos 430^0 + i\cos 160^0)}{5(\cos 110^0 - i\sin 250^0)}.$

6.10. $5(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}) \cdot 4(\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}).$

6.11. $\frac{6(\cos 42^0 + i\sin 222^0)}{5(\sin 42^0 - i\sin 132^0)}.$

6.12. $(\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) \cdot 3(\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}).$

6.13. $\frac{3(-\sin 20^0 - i\sin 110^0)}{(\cos(-220^0) - i\sin 140^0)}.$

6.14. $7(-\sin 40^0 - i\sin 130^0) \cdot 3(\cos 40^0 - i\sin 320^0).$

6.15. $\frac{3(\cos 190^0 - i\sin 170^0)}{(-\sin 40^0 + i\sin 50^0)}.$

7. Изобразите на плоскости множество комплексных чисел, удовлетворяющих системе неравенств

7.1. $\begin{cases} 2 \le |z| \le 4, \\ \frac{\pi}{2} \le arg\left(\frac{z}{1+i}\right) \le \pi. \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} 1 < \left|\frac{z}{1+i\sqrt{3}}\right| < 2, \\ -\frac{\pi}{4} \le arg z \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} 1 < |z| < 3, \\ \frac{\pi}{4} \le arg\left(\frac{z}{1-i}\right) \le \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

7.4. $\begin{cases} 1 \le \left|\frac{z}{\sqrt{12}-2i}\right| \le 2, \\ -\frac{\pi}{2} \le arg z \le \pi. \end{cases}$

7.5. $\begin{cases} 2 \le |z| + 1 \le 3, \\ \frac{\pi}{3} \le arg\left(\frac{z}{1-i\sqrt{3}}\right) \le \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$

7.6. $\begin{cases} 2 < \left|\frac{z}{-1-i\sqrt{3}}\right| < 3, \\ \frac{\pi}{3} \le arg z - \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

7.7. $\begin{cases} 3 \le |z| \le 5, \\ \frac{\pi}{4} < arg\left(\frac{z}{-1-i}\right) < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

7.8. $\begin{cases} 1 \le \left|\frac{z}{2-i\sqrt{12}}\right| \le 3, \\ -\frac{\pi}{6} < arg z < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

7.9. $\begin{cases} 1 \le \left|\frac{z}{1+\sqrt{3}}\right| \le 3, \\ -\frac{\pi}{4} < arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

7.10. $\begin{cases} 1 < |z| < 5, \\ -\frac{\pi}{4} \le arg\left(\frac{z}{\sqrt{12}-2i}\right) \le \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

7.11. $\begin{cases} 2 < \left|\frac{z}{-1-i\sqrt{3}}\right| < 3, \\ -\frac{\pi}{3} \le arg z \le \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

7.12. $\begin{cases} 2 \le |z| \le 6, \\ \frac{\pi}{2} < arg\left(\frac{z}{1-i\sqrt{3}}\right) < \pi. \end{cases}$

7.13. $\begin{cases} 1 \le \left|\frac{z}{\sqrt{3}-i}\right| \le 4, \\ -\frac{\pi}{4} < arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

7.14. $\begin{cases} 2 < |z| < 3, \\ -\frac{\pi}{4} \le arg\left(\frac{z}{1-i}\right) \le \pi. \end{cases}$

7.15. $\begin{cases} 2 \le \left|\frac{z}{\sqrt{3}-i}\right| \le 4, \\ -\frac{\pi}{3} < arg\left(\frac{z}{2-i\sqrt{12}}\right) < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

8. Вычислите

8.1. $(-1-i\sqrt{3})^{30}$, $\sqrt[5]{-\sqrt{12}+2i}$, $\sqrt[3]{-8}$.

8.2. $(1-i)^{40}$, $\sqrt[4]{-\sqrt{12}-2i}$, $\sqrt[4]{-16}$.

8.3. $(-\sqrt{3}+i)^{36}$, $\sqrt[6]{-2-i\sqrt{12}}$, $\sqrt[4]{i}$.

8.4. $(-1-i)^{24}$, $\sqrt[5]{1-i\sqrt{3}}$, $\sqrt[5]{-1}$.

8.5. $(-1+i\sqrt{3})^{30}$, $\sqrt[4]{-16-16i}$, $\sqrt[4]{-2}$.

8.6. $(-\sqrt{3}-i)^{42}$, $\sqrt[5]{-2+i\sqrt{12}}$, $\sqrt[5]{3i}$.

8.7. $(1-i)^{24}$, $\sqrt[6]{-1-i\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{-2i}$.

8.8. $(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^{36}$, $\sqrt[4]{\sqrt{12}+2i}$, $\sqrt[5]{-4}$.

8.9. $(-\sqrt{12}+2i)^{48}$, $\sqrt[5]{3-i3\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{-81}$.

8.10. $(-4-4i)^{20}$, $\sqrt[6]{-\sqrt{12}+2i}$, $\sqrt[3]{-8i}$.

8.11. $(1-i\sqrt{3})^{54}$, $\sqrt[4]{-5+5i}$, $\sqrt[6]{64}$.

8.12. $(\sqrt{12}+2i)^{48}$, $\sqrt[5]{1-i}$, $\sqrt[4]{-4}$.

8.13. $(-1+i)^{28}$, $\sqrt[6]{\sqrt{3}-i}$, $\sqrt[3]{8i}$.

8.14. $(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}i)^{30}$, $\sqrt[4]{-\sqrt{3}-i}$, $\sqrt[6]{-1}$.

8.15. $(2-i\sqrt{12})^{36}$, $\sqrt[5]{3-3i}$, $\sqrt[4]{-9}$.

6. МАТРИЦЫ

6.1. Вопросы теории

1. Матрицы: основные понятия.
2. Действия над матрицами и их свойства: сложение, умножение на элемент поля, умножение матриц.
3. Полное матричное кольцо.
4. Транспонирование матриц и его свойства.
5. Элементарные преобразования строк матрицы.
6. Ступенчатая матрица.

6.2. Примеры решения задач

Пример 6.1. Перемножить матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot(-1) & 1\cdot 4+2\cdot 0 & 1\cdot 3+2\cdot 2 \\ 0\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & 0\cdot 4+(-1)\cdot 0 & 0\cdot 3+(-1)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что умножение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

не определено. ⊠

Пример 6.2. Вычислить значение многочлена $f(x) = x^2 - 2x + 3$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□ Так как $f(A) = A^2 - 2A + 3E_2$, то

$$f\left(\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix} +$$

$$+3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 6\end{pmatrix}.$$

Ответ: $f\left(\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 6\end{pmatrix}$. ⊠

Пример 6.3. Найти 2×2-матрицу X, удовлетворяющую условию

$$2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

□ Пусть $X = \begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$, тогда

$$2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}2 - x_{11} & 4 - x_{12}\\ 6 - x_{21} & 8 - x_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Две матрицы равны, если равны элементы, стоящие на одинаковых местах. Поэтому последнее равенство матриц приводит к уравнениям $2 - x_{11} = 3$, $4 - x_{12} = 0$, $6 - x_{21} = 0$, $8 - x_{22} = 3$. Откуда $x_{11} = -1$, $x_{12} = 4$, $x_{21} = 6$, $x_{22} = 5$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix}-1 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}$. ⊠

Пример 6.4. Вычислить $2A - BC + 3A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix}-2i & 4\\ i & i-3\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

□ Перемножим матрицы B и C:

$$BC = \begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 3\cdot(-2) + 0\cdot(-1) + 2\cdot 1\\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 0\cdot(-2) + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3-2 & -6+2\\ 2-2 & -1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$2A - BC + 3A^T = 2\begin{pmatrix}-2i & 4\\ i & i-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-2i & i\\ 4 & i-3\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-4i & 8\\ 2i & 2i-6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6i & 3i\\ 12 & 3i-9\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-4i - 1 - 6i & 8 - (-4) + 3i\\ 2i - 0 + 12 & 2i - 6 - 1 + 3i - 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 - 10i & 12 + 3i\\ 12 + 2i & -16 + 5i\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}-1 - 10i & 12 + 3i\\ 12 + 2i & -16 + 5i\end{pmatrix}$. ⊠

Пример 6.5. Решить матричное уравнение

$$-2X - A^T + (B - 3A)^T = A,$$

где $A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

□ Исходное уравнение имеет вид

$$-2X - \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}^T + \left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix},$$

$$-2X - \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4 & 3\\ -5 & -11\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix},$$

$$-2X + \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4 & -5\\ 3 & -11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix},$$

$$-2X+\begin{pmatrix}-5 & -7\\ 4 & -14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix},$$

$$-2X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5 & -7\\ 4 & -14\end{pmatrix},$$

$$-2X=\begin{pmatrix}6 & 6\\ -2 & 17\end{pmatrix},$$

$$X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & 6\\ -2 & 17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 1 & -\frac{17}{2}\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 1 & -\frac{17}{2}\end{pmatrix}$. ⊠

Пример 6.6. Решить систему матричных уравнений

$$\begin{cases} 2X-Y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\\ 3X+2Y=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\end{cases}$$

□ Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым.

$$4X-2Y+3X+2Y=2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$7X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix},$$

откуда

$$X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & 0\\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}.$$

Умножим первое уравнение на (-3) и сложим его со вторым, умноженным на 2.

$$-6X+3Y+6X+4Y=-3\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$7Y=\begin{pmatrix}2 & -7\\ 3 & 2\end{pmatrix}, Y=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & -7\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & -1\\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7}\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & 0\\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & -1\\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7}\end{pmatrix}$. ⊠

Пример 6.7. Найти матрицы $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{C}$, для которых $A^2-4A+5E=O$. Здесь E, O — единичная и нулевая 2×2-матрицы.

□ Согласно условию

$$\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}a^2+b^2 & 2ab\\ 2ab & a^2+b^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4a & 4b\\ 4b & 4a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}a^2+b^2-4a+5 & 2ab-4b\\ 2ab-4b & a^2+b^2-4a+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Из последнего равенства получим систему

$$\begin{cases} a^2+b^2-4a+5=0\\ 2ab-4b=0.\end{cases}$$

Из второго уравнения $b(2a-4)=0$ следует, что либо $b=0$, либо $2a-4=0$. Если $b=0$, то из первого уравнения системы $a^2-4a+5=0$ получим $a_1=2-i$, $a_2=2+i$. Если $2a-4=0$, т.е. $a=2$, то из первого уравнения получаем $b^2=-1$, откуда $b_1=i$, $b_2=-i$.

Ответ:

$$A_1=\begin{pmatrix}2-i & 0\\ 0 & 2-i\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}2+i & 0\\ 0 & 2+i\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}2 & i\\ i & 2\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}2 & -i\\ -i & 2\end{pmatrix}.$$

⊠

Пример 6.8. С помощью элементарных преобразований строк привести к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

□ Умножим первую строку матрицы A на 2 и сложим со второй строкой. Затем первую строку умножим на 3 и сложим с третьей. В итоге получим матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 5 & 11 & -11 \end{pmatrix}.$$

Теперь вторую строку умножим на $(-\frac{5}{3})$ и сложим с третьей

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 6.9. С помощью элементарных преобразований найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ Запишем матрицу $(A \mid E)$, где E — единичная матрица, и преобразуем ее с помощью элементарных преобразований так, чтобы получилась матрица вида $(E \mid B)$. Матрица B будет обратной к матрице A. Выпишем матрицу $(A \mid E)$:

$$(A \mid E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем следующие элементарные преобразования: первую строку матрицы $(A \mid E)$ умножим на (-2) и

прибавим ко второй, затем первую строку прибавим к третьей. В итоге получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь в получившейся матрице вторую строку прибавим к третьей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вторую строку умножим на (-1), а третью — на $(\frac{1}{2})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Третью строку умножим на 2 и прибавим ко второй, а затем третью строку прибавим к первой

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Осталось вторую строку умножить на (-1) и прибавить к первой

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

В итоге получили матрицу вида $(E \mid B)$, поэтому

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку.

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac12&\frac12&-\frac12\\1&0&1\\-\frac12&\frac12&\frac12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}-\frac12&\frac12&-\frac12\\1&0&1\\-\frac12&\frac12&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac12&\frac12&-\frac12\\1&0&1\\-\frac12&\frac12&\frac12\end{pmatrix}$. ⊠

Пример 6.10. С помощью элементарных преобразований найти обратную матрицу для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-2i&4\\i&i-3\end{pmatrix}.$$

□ Запишем матрицу $(A|E)$ и приведем ее с помощью элементарных преобразований строк к матрице $(E|B)$.

$$(A|E)=\begin{pmatrix}-2i&4&1&0\\i&i-3&0&1\end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку на $(\frac12)$ и прибавим ко второй строке.

$$\begin{pmatrix}-2i&4&1&0\\0&i-1&\frac12&1\end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку на $(\frac12 i)$, а вторую на $(-\frac12(i+1))$.

$$\begin{pmatrix}1&2i&\frac12 i&0\\0&1&-\frac14 i-\frac14&-\frac12 i-\frac12\end{pmatrix}.$$

К первой строке прибавим вторую, умноженную на $(-2i)$.

$$\begin{pmatrix}1&0&-\frac12+i&-1+i\\0&1&-\frac14-\frac14 i&-\frac12-\frac12 i\end{pmatrix}.$$

Получим матрицу вида $(E|B)$, поэтому

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac12+i&-1+i\\-\frac14-\frac14 i&-\frac12-\frac12 i\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}-2i&4\\i&i-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac12+i&-1+i\\-\frac14-\frac14 i&-\frac12-\frac12 i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}-\frac12+i&-1+i\\-\frac14-\frac14 i&-\frac12-\frac12 i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2i&4\\i&i-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};$$

Ответ: $\begin{pmatrix}-\frac12+i&-1+i\\-\frac14-\frac14 i&-\frac12-\frac12 i\end{pmatrix}$ ⊠

6.3. Индивидуальные задания

1. Вычислите $AB, BA, B^TA, ABC, CAB, B^TC$.

1.1. $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\\-1&-2\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}i&-2\\1&3i\end{pmatrix}$.

1.2. $A=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-2&0&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-4&-2&2\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}i-1&1\\2&i\end{pmatrix}$.

1.3. $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&-1&4\\2&-2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&2\\1&-4\\-2&-2\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}2i&-3\\0&i+2\end{pmatrix}$.

1.4. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & i+1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$.

1.5. $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}$.

1.6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ -2 & i-1 \end{pmatrix}$.

1.7. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & -9 & -3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ i-1 & 3i \end{pmatrix}$.

1.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & i \\ 2 & 4i \end{pmatrix}$.

1.9. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ i-2 & -1 \end{pmatrix}$.

1.10. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} i+2 & -3 \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

1.11. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} i & i-3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ i & 2i \end{pmatrix}$.

1.13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i+1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.14. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -i-1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ i-2 & 2i \end{pmatrix}$.

2. Вычислите $C^3 - 5C^2 + 2C + 4E_2$ для матрицы C

из задания 1.

3. Решите матричное уравнение
$$5X + 3A - 2C^T = (2A - 3C)^T,$$
где C — матрица из задания 1, матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Решите систему матричных уравнений
$$\begin{cases} X + Y & = \begin{pmatrix} n-8 & 1 \\ 0 & n+3 \end{pmatrix}, \\ 2X + (n-16)Y & = \begin{pmatrix} n+5 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \end{cases}$$
где $n \in \{1, 2, \ldots, 15\}$.

5. Найдите матрицы $A = \begin{pmatrix} z & \omega \\ \omega & z \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{C}$, удо-влетворяющие условию:

5.1. $A^2 + A + E_2 = O$.
5.2. $2A^2 - A + 2E_2 = O$.
5.3. $3A^2 + A + E_2 = O$.
5.4. $A^2 + 2A + 5E_2 = O$.
5.5. $-2A^2 + 3A - 2E_2 = O$.
5.6. $-A^2 + A - 2E_2 = O$.
5.7. $5A^2 + 3A + 2E_2 = O$.
5.8. $A^2 + 3A + 4E_2 = O$.
5.9. $2A^2 - 3A + 5E_2 = O$.
5.10. $3A^2 - 2A + E_2 = O$.
5.11. $4A^2 + 3A + 2E_2 = O$.
5.12. $-2A^2 + 3A - 4E_2 = O$.
5.13. $6A^2 - 2A + E_2 = O$.
5.14 $5A^2 - 2A + 2E_2 = O$.
5.15. $-3A^2 + A - 2E_2 = O$.

6. Приведите матрицы A, B, C из задания 1 к сту-пенчатому виду.

7. Для матрицы F с помощью элементарных преоб-разований строк вычислите обратную матрицу.

7.1. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

7.2. $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

7.3. $F = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

7.4. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

7.5. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -3 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

7.6. $F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

7.7. $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7.8. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

7.9. $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$.

7.10. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

7.11. $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

7.12. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & -8 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.13. $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -4 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

7.14. $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -1 & -9 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

7.15. $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & -9 & -7 \\ -1 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

8. С помощью элементарных преобразований найти матрицу, обратную матрице C из задания 1.

7. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

7.1. Вопросы теории

1. Определитель n-го порядка и его простейшие свойства.
2. Вычисление определителей малых порядков.
3. Свойства определителей.
4. Клеточные матрицы и их определители.
5. Определитель произведения матриц.
6. Минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы.
7. Вычисление определителей разложением по элементам строки и столбца.
8. Обратная матрица и её свойства.
9. Критерий обратимости и способ вычисления обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
10. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк.
11. Группа невырожденных квадратных матриц над полем.

7.2. Примеры решения задач

Пример 7.1. Выберите натуральные числа i, j, k таким образом, чтобы слагаемое $a_{4i}a_{2k}a_{32}a_{j4}$ входило в развернутое выражение определителя четвертого порядка со знаком минус.

☐ В развернутое выражение определителя при $n = 4$ данное слагаемое входит в виде $\operatorname{sgn}\tau\, a_{4i}a_{2k}a_{32}a_{j4}$, где перестановка

$$\tau = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & j \\ i & k & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $j = 1$, а для i и k возможны 2 случая:

1) $i = 1$, $k = 3$. Тогда

$$\tau = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (41)(23), \operatorname{sgn}\tau = (-1)^{4-2} = 1.$$

2) $i = 3$, $k = 1$. Тогда

$$\tau = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (4321), \operatorname{sgn}\tau = (-1)^{4-1} = -1.$$

Таким образом, при $i = 3$, $j = 1$, $k = 1$ слагаемое $a_{4i}a_{2k}a_{32}a_{j4}$ имеет знак минус.

ОТВЕТ: $i = 3$, $j = 1$, $k = 1$. ⊠

ПРИМЕР 7.2. Вычислить определители матриц порядка $n \leq 3$.

□ Очевидно, 1×1-матрица (a) имеет определитель равный a.

Пусть $n = 2$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Применяя формулу определителя получаем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\tau \in S_2} \operatorname{sgn}\tau a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пусть $n = 3$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\},$$

Применяя формулу определителя получаем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\tau \in S_3} \operatorname{sgn}\tau a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{32}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

⊠

ПРИМЕР 7.3. Вычислите определители

$$\begin{vmatrix} i & -1 \\ 2 & i+2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

□ Первый и второй определитель вычислим, используя формулы примера 7.2:

$$\begin{vmatrix} i & -1 \\ 2 & i+2 \end{vmatrix} = i \cdot (i+2) - (-1) \cdot 2 = i^2 + 2i + 2 = 1 + 2i.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 \cdot (-1) -$$

$$-3 \cdot 0 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 = 12 + 4 + 8 + 1 = 25.$$

Определитель вида

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вандермонда*. Можно доказать, что он вычисляется по формуле

$$V = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

Определитель
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
после транспонирования становится определителем Вандермонда, поэтому
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 25 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2^2 & 5^2 & (-1)^2 \end{vmatrix} = (5-2)\cdot(-1-2)\cdot(-1-5) = 54.$$

Ответ: $1+2i$, 25, 54. ⊠

Пример 7.4. Вычислить определитель верхней треугольной матрицы
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

□ В формуле определителя интересны только ненулевые слагаемые. Очевидно, $a_{n\tau(n)}$ может быть отлично от нуля только при $\tau(n) = n$. Элемент $a_{n-1\tau(n-1)} \neq 0$ только при $\tau(n-1) = n-1$. И т.д. Итак, в формуле определителя только одно слагаемое $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ может быть отлично от нуля. Это слагаемое соответствует тождественной перестановке, знак которой равен $(+1)$. Таким образом, определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов
$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Аналогично, определитель нижней треугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
равен произведению диагональных элементов.

В частности, определитель диагональной матрицы равен произведению диагональных элементов, а определитель единичной матрицы равен единичному элементу поля. ⊠

Пример 7.5. Пусть $v \in \mathbb{P}, A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{P})$. Вычислить $\det vA$.

□ Произведением vA является матрица
$$uA = \begin{pmatrix} va_{11} & \dots & va_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ va_{n1} & \dots & va_{nn} \end{pmatrix}.$$
Вынося число v из каждой строки, получаем, что $\det(vA) = v^n \det A$. ⊠

Пример 7.6. Используя свойства определителей, вычислите
$$\begin{vmatrix} 57823 & -23251 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

□ Вторую строку первого определителя умножим на (-1) и прибавим к первой строке.
$$\begin{vmatrix} 57823 & -23251 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1000 & -1000 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix}.$$
Вынесем за знак определителя общий множитель первой строки.
$$\begin{vmatrix} 1000 & -1000 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix}.$$

Теперь первый столбец прибавим к второму.

$$1000\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix} = 1000\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 56823 & 34572 \end{vmatrix} =$$
$$= 1000 \cdot 1 \cdot 34572 = 34572000.$$

Второй определитель вычислим, приведя его к треугольному виду. Вначале поменяем местами первую и вторую строки, а затем получившуюся первую строку умножим на 2 и на (-1) и сложим соответственно со второй и третьей строками.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Поменяем местами второй и третий столбец, а затем вторую и третью строку.

$$-\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} =$$

Ответ: 34572000, -5. ⊠

Пример 7.7. Доказать, что на число 11 делится определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

□ Так как числа 11, 121, 1089 и 605 делятся на 11, то, умножая первый столбец на 1000, второй на 100, третий на 10 и прибавляя все это к четвертому столбцу, получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 121 \\ 1 & 0 & 8 & 1089 \\ 0 & 6 & 0 & 605 \end{pmatrix}$$

По свойству 7 $\det B = \det A$, а по свойству 3 определитель матрицы B делится на 11, так как на 11 делятся все элементы последнего столбца. ⊠

Пример 7.8. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a & 0 \\ b & 0 & -b & 0 \\ 0 & c & 0 & c \\ d & d & -d & -d \end{pmatrix}.$$

□ Переставив 2-й и 3-й столбцы, получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ b & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & c \\ d & -d & d & -d \end{pmatrix}.$$

Так как $\det A = -\det B$, а

$$\det B = \det\begin{pmatrix} a & a \\ b & -b \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} c & c \\ d & -d \end{pmatrix},$$

то $\det A = -4abcd$. ⊠

Пример 7.9. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ a & b & c & d \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

□ Вычислим определитель разложением по элементам второй строки

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ a & b & c & d \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+b\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 5(a+b+c+d)$. ⊠

Пример 7.10. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

□ В матрице A строки пропорциональны. По свойству 6 определителей любой минор r-го порядка, $r \geq 2$, этой матрицы равен нулю. Поэтому ее ранг равен 1. ⊠

Пример 7.11. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

□ С помощью элементарных преобразований приведем матрицу A к ступенчатому виду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $r(A) = 3$. ⊠

Пример 7.12. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ -11 & -9 & -5 & 1 & 0 \\ 11 & 9 & 5 & -1 & 0 \\ -22 & -18 & -10 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ С помощью элементарных преобразований заполним нулями верхний правый угол матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ -11 & -9 & -5 & 1 & 0 \\ 11 & 9 & 5 & -1 & 0 \\ -22 & -18 & -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -17 & -14 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 9 & 5 & -1 & 0 \\ -22 & -18 & -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -17 & -14 & -7 & 0 & 0 \\ 11 & 9 & 5 & -1 & 0 \\ -22 & -18 & -10 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $r(A) = 3$. ⊠

Пример 7.13. Найти обратную к матрице 2-го порядка.

□ Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Найдем все алгебраические дополнения:

$$A_{11} = a_{22}, A_{12} = -a_{21}, A_{21} = -a_{12}, A_{22} = a_{11}.$$

Поэтому присоединенная матрица принимает вид

$$A' = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Если det A$=a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

⊠

Пример 7.14. Найти обратную к матрице

$$A=\begin{pmatrix} i & -2 \\ 1-i & 3i \end{pmatrix}.$$

□ Вычислим определитель матрицы A.

$$\begin{vmatrix} i & -2 \\ 1-i & 3i \end{vmatrix} = i\cdot 3i-(-2\cdot(1-i))=-1-2i.$$

Найдем все алгебраические дополнения:

$$A_{11}=3i, A_{12}=-1+i, A_{21}=2, A_{22}=i.$$

Следовательно,

$$A^{-1}=\frac{1}{-1-2i}\begin{pmatrix} 3i & 2 \\ -1+i & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i & -\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i \\ -\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i & -\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} -\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i & -\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i \\ -\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i & -\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -2 \\ 1-i & 3i \end{pmatrix}=E.$$

Аналогично,

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} i & -2 \\ 1-i & 3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i & -\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i \\ -\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i & -\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i \end{pmatrix}=E.$$

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i & -\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i \\ -\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i & -\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 7.15. Найти обратную к матрице

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

□ Вычислим определитель матрицы A, а затем найдем присоединенную матрицу.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}=8+5+4-2-5-4=6.$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=3, A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=9, A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3, A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-2, A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=2.$$

$$A'=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 9 & -7 & 2 \end{pmatrix},\ \ A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 9 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку.

$$A^{-1}A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 9 & -7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, AA^{-1}=E.

Ответ. $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 9 & -7 & 2 \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 7.16. Найти обратную к матрице

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ Вычислим A^{-1} по формуле обратной матрицы.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

1.1. $m = a_{2i}a_{41}a_{j3}a_{5k}a_{12}a_{64}$.
1.2. $m = a_{j3}a_{14}a_{5i}a_{k1}a_{26}a_{45}$.
1.3. $m = a_{32}a_{i1}a_{46}a_{1j}a_{2k}a_{63}$.
1.4. $m = a_{62}a_{i1}a_{4j}a_{25}a_{5k}a_{34}$.
1.5. $m = a_{4i}a_{j2}a_{36}a_{k5}a_{61}a_{53}$.
1.6. $m = a_{ij}a_{13}a_{4k}a_{62}a_{54}a_{31}$.
1.7. $m = a_{2i}a_{32}a_{j6}a_{k5}a_{51}a_{63}$.
1.8. $m = a_{16}a_{i3}a_{4j}a_{k1}a_{25}a_{32}$.
1.9. $m = a_{44}a_{2j}a_{k3}a_{65}a_{i6}a_{31}$.
1.10. $m = a_{26}a_{3j}a_{1k}a_{55}a_{64}a_{i1}$.
1.11. $m = a_{11}a_{2i}a_{63}a_{4k}a_{j6}a_{34}$.
1.12. $m = a_{i6}a_{2j}a_{5k}a_{13}a_{34}a_{62}$.
1.13. $m = a_{15}a_{i2}a_{j4}a_{51}a_{36}a_{2k}$.
1.14. $m = a_{23}a_{4k}a_{j6}a_{5i}a_{11}a_{34}$.
1.15. $m = a_{42}a_{i5}a_{66}a_{3j}a_{1k}a_{51}$.

2. Вычислите определители матриц A, B, C.

2.1. $A = \begin{pmatrix} 3i & -1 \\ 2 & 3i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{pmatrix}$,
$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2. $A = \begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 23528 & 43621 \\ 24528 & 44621 \end{pmatrix}$,
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3. $A = \begin{pmatrix} 3-i & 2i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10159 & 6523 \\ 11259 & 7623 \end{pmatrix}$,
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2+i \\ 3i & i+1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12353 & 17829 \\ 12363 & 17839 \end{pmatrix}$,
$$C = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.5. $A = \begin{pmatrix} 6-i & 8 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 21351 & -22351 \\ 16273 & -17273 \end{pmatrix}$,
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6. $A = \begin{pmatrix} 4i & 3+2i \\ 5 & -5+i \end{pmatrix}$,
$$B = \begin{pmatrix} -13297 & 26153 \\ -13397 & 26253 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.7. $A = \begin{pmatrix} 8i & 9-i \\ -1 & 3i+2 \end{pmatrix}$,
$$B = \begin{pmatrix} 17324 & -11526 \\ 27324 & -21526 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.8. $A = \begin{pmatrix} -3-i & 2 \\ 1 & 6+i \end{pmatrix}$,
$$B = \begin{pmatrix} 14326 & 15326 \\ -95623 & -96623 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.9. $A = \begin{pmatrix} 4+i & 6-i \\ 9i & 2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -35201 & 26731 \\ 35211 & -26741 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.10. $A = \begin{pmatrix} -7+i & 6i \\ 6-i & 7 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 27802 & 28802 \\ 11935 & 12935 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.11. $A = \begin{pmatrix} 5-2i & -2 \\ -i & 4+3i \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 17932 & 25113 \\ 13932 & 21113 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

2.12. $A = \begin{pmatrix} 6-i & 7+2i \\ 8i & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 33253 & -16821 \\ 31253 & -14821 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

2.13. $A = \begin{pmatrix} -4i & 2+3i \\ -1 & 1+2i \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 71815 & -23526 \\ 71805 & -23516 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

2.14. $A = \begin{pmatrix} 3i-1 & 2 \\ i & 2i+3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 84434 & -84534 \\ 12796 & -12896 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.15. $A = \begin{pmatrix} -4+3i & 2i \\ 5-i & -3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 66437 & 41432 \\ -66337 & -41332 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите определители матриц F и H приведением их к треугольному виду.

3.1. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$,

$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3.2. $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

$H = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.3. $F = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.4. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -3 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.6. $F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.7. $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.8. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.9. $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.10. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.11. $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ -4 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.12. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & -8 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

3.13. $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -4 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.14. $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -1 & -9 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.15. $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & -9 & -7 \\ -1 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислите определитель.

4.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -3 & 9 & -27 & 81 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 16 & -64 & 256 \end{vmatrix}$.

4.2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & -2 & 1 \\ 9 & 16 & 4 & 4 & 1 \\ -27 & 64 & 8 & -8 & 1 \\ 81 & 256 & 16 & 16 & 1 \end{vmatrix}.$

4.3. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 & -81 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \end{vmatrix}.$

4.4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & 2 & -3 \\ 16 & 25 & 4 & 9 \\ -64 & 125 & 8 & -27 \end{vmatrix}.$

4.5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 81 & -729 & 6561 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{vmatrix}.$

4.6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -4 & -2 & 5 \\ 49 & 9 & 16 & 4 & 25 \\ 343 & 27 & -64 & -8 & 125 \\ 2401 & 81 & 256 & 16 & 625 \end{vmatrix}.$

4.7. $\begin{vmatrix} 1 & -8 & 64 & -512 \\ 1 & -6 & 36 & -216 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \end{vmatrix}.$

4.8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & -5 & 4 & 7 \\ 121 & 25 & 16 & 49 \\ 1331 & -125 & 64 & 343 \end{vmatrix}.$

4.9. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 & 81 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 \end{vmatrix}.$

4.10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -5 & 7 & -1 \\ 4 & 16 & 25 & 49 & 1 \\ -8 & 64 & -125 & 343 & -1 \\ 16 & 256 & 625 & 2401 & 1 \end{vmatrix}.$

4.11. $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 144 & 1728 \\ 1 & -9 & 81 & -729 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \end{vmatrix}.$

4.12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & 11 & -8 \\ 16 & 49 & 121 & 64 \\ -64 & 343 & 1331 & -512 \end{vmatrix}.$

4.13. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 16 & -64 & 256 \\ 1 & -6 & 36 & -216 & 1296 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -8 & 64 & -512 & 4096 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 6561 \end{vmatrix}.$

4.14. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 & -4 & 5 \\ 49 & 4 & 1 & 16 & 25 \\ -343 & 8 & 1 & -64 & 125 \\ 2401 & 16 & 1 & 256 & 625 \end{vmatrix}.$

4.15. $\begin{vmatrix} 1 & -6 & 36 & -216 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \\ 1 & -12 & 144 & -1728 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}.$

5. Вычислите определитель матрицы C из задания 2 разложением по элементам второго столбца, а определитель матрицы F из задания 3 по элементам третьей строки.

6. Вычислите определитель.

6.1. $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$. 6.2. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 3 & 1 & x & 2 \\ 5 & 3 & 1 & x \end{vmatrix}$.

6.3. $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$. 6.4. $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 1 \\ x & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & x \end{vmatrix}$.

6.5. $\begin{vmatrix} 3x & -1 & 1 & 1 \\ 2 & x & -2 & 1 \\ 1 & x & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & x \end{vmatrix}$. 6.6. $\begin{vmatrix} -x & -1 & x & 2 \\ 1 & -x & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & x & 3 \end{vmatrix}$.

6.7. $\begin{vmatrix} 1 & x & -x & 4 \\ x & 1 & -1 & 2 \\ 1 & x & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -x & 2 \end{vmatrix}$. 6.8. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & x & -1 \\ x & 1 & 2 & x \\ 0 & x & 3 & 0 \\ 1 & -1 & x & 1 \end{vmatrix}$.

6.9. $\begin{vmatrix} 3x & -1 & 2 & 0 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 3 & x & -2 & x \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$. 6.10. $\begin{vmatrix} -1 & x & 1 & 2 \\ 3 & 1 & x & -1 \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & x & 3 \end{vmatrix}$

6.11. $\begin{vmatrix} -1 & x & -2 & 0 \\ x & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & 3 \end{vmatrix}$. 6.12. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & x & 4 \\ x & 3 & 1 & 0 \\ -1 & x & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & x \end{vmatrix}$.

6.13. $\begin{vmatrix} 2x & -1 & x & 3 \\ 4 & -x & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ x & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. 6.14. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & x \\ 2 & x & -1 & 0 \\ x & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & x & 1 \end{vmatrix}$.

6.15. $\begin{vmatrix} 4x & -2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 2 & 1 \\ x & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & x & 3 \end{vmatrix}$.

7. Вычислите ранг матрицы при $x = 0$ и при $x = 1$.

7.1. $\begin{pmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{pmatrix}$.

7.2. $\begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 3 & 1 & x & 2 \\ 5 & 3 & 1 & x \end{pmatrix}$.

7.3. $\begin{pmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$.

7.4. $\begin{pmatrix} 1 & x & 2 & 1 \\ x & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & x \end{pmatrix}$.

7.5. $\begin{pmatrix} 3x & -1 & 1 & 1 \\ 2 & x & -2 & 1 \\ 1 & x & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & x \end{pmatrix}$.

7.6. $\begin{pmatrix} -x & -1 & x & 2 \\ 1 & -x & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & x & 3 \end{pmatrix}$.

7.7. $\begin{pmatrix} 1 & x & -x & 4 \\ x & 1 & -1 & 2 \\ 1 & x & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -x & 2 \end{pmatrix}$.

7.8. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & x & -1 \\ x & 1 & 2 & x \\ 0 & x & 3 & 0 \\ 1 & -1 & x & 1 \end{pmatrix}$.

7.9. $\begin{pmatrix} 3x & -1 & 2 & 0 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 3 & x & -2 & x \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{pmatrix}$.

7.10. $\begin{pmatrix} -1 & x & 1 & 2 \\ 3 & 1 & x & -1 \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & x & 3 \end{pmatrix}$.

7.11. $\begin{pmatrix} -1 & x & -2 & 0 \\ x & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & 3 \end{pmatrix}$.

7.12. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & x & 4 \\ x & 3 & 1 & 0 \\ -1 & x & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & x \end{pmatrix}$.

7.13. $\begin{pmatrix} 2x & -1 & x & 3 \\ 4 & -x & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ x & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7.14. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & x \\ 2 & x & -1 & 0 \\ x & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$.

7.15. $\begin{pmatrix} 4x & -2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 2 & 1 \\ x & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & x & 3 \end{pmatrix}$.

8. Найдите матрицы, обратные матрицам A и C из задания 2, с помощью алгебраических дополнений.

8. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

8.1. Вопросы теории

1. Основные понятия: система уравнений, коэффициенты системы, свободные коэффициенты, решение системы, совместная и несовместная системы, равносильные системы, матрица системы, расширеная матрица системы.

2. Элементарные преобразования системы линейных уравнений и их свойства.

3. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Случаи, возникающие при решении системы.

4. Крамеровская система линейных уравнений. Правило Крамера.

5. Матричный метод решения системы линейных уравнений.

6. Минор r-го порядка матрицы. Свойства миноров. Определение ранга матрицы.

7. Алгоритм вычисления ранга матрицы.

8. Критерий совместности систем линейных уравнений: теорема Кронекера–Капелли.

9. Однородная система линейных уравнений, ее совместность. Нулевое решение.

10. Существование ненулевых решений однородной системы линейных уравнений.

8.2. Примеры решения задач

Пример 8.1. Решить над полем $\mathbb{Q}$ систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$$

□ Пользуясь элементарными преобразованиями, приведём систему к ступенчатому виду. Для этого первое уравнение умножим на (-1) и прибавим ко второму. Затем первое уравнение умножим на (-3) и прибавим ко третьему. И, наконец, первое уравнение умножим на (-2) и прибавим к четвертому

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2 \\ -x_2 + 10x_3 - 17x_4 = 2 \\ -x_2 + 10x_3 - 17x_4 = 2. \end{cases}$$

Второе уравнение прибавим к третьему и четвертому

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Последние два уравнения превратились в уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0.$$

Этим уравнениям удовлетворяют любые значения неизвестных. Поэтому два последних уравнения можно убрать.

Придадим неизвестным x_3 и x_4 произвольные значения из поля $x_3 = \lambda_3$, $x_4 = \lambda_4$. Тогда из второго уравнения значение x_2 находится однозначно:

$$x_2 = 10\lambda_3 - 17\lambda_4 - 2.$$

Из первого уравнения значение x_1 также находится однозначно

$$x_1 = -2(10\lambda_3 - 17\lambda_4 - 2) + 3\lambda_3 - 5\lambda_4 + 1 = -17\lambda_3 + 29\lambda_4 + 5.$$

Так как последняя система равносильна исходной, то формулы

$$\begin{cases} x_1 = -17\lambda_3 + 29\lambda_4 + 5 \\ x_2 = 10\lambda_3 - 17\lambda_4 - 2 \\ x_3 = \lambda_3 \\ x_4 = \lambda_4 \end{cases} \qquad (8.1)$$

при произвольных λ_3 и λ_4 дают нам все решения заданной системы.

Ответ. Система имеет бесконечно много решений, которые определяются формулами (8.1). ⊠

Пример 8.2. Решить над полем $\mathbb{Q}$ систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$$

□ Так как каждому элементарному преобразованию системы соответствует элементарное преобразование расширенной матрицы этой системы, то вместо системы можно оперировать с расширенной матрицей.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -40 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -47 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{pmatrix}.$$

Здесь произведены следующие элементарные преобразования. Первую строку исходной матрицы умножали на $(-2), (-3), (-2)$ и складывали со второй, третьей и четвертой строками соответственно. В результате получили вторую матрицу. Во второй матрице к второй строке прибавили третью, умноженную на (-1), а затем получившуюся вторую строку умножили на (-1). Пришли к третьей матрице. В третьей матрице вторую строку умножали на 4 и 7 и складывали с третьей строкой и четвертой соответственно. Получили четвертую матрицу. В этой матрице третью строку умножили на (-1) и прибавили к четвертой строке. В итоге получили пятую матрицу.

Таким образом, начальная система равносильна следующей ступенчатой системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -8 \\ -18x_3 + 36x_4 = -40 \\ 18x_4 = -7 \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x_4 = -\frac{7}{18}, x_3 = \frac{13}{9}, x_2 = -\frac{43}{18}, x_1 = \frac{2}{3}.$$

Легко проверить, что эти значения превращают каждое уравнение исходной системы в верное равенство.

Ответ. Система имеет единственное решение $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{43}{18}$, $x_3 = \frac{13}{9}$, $x_4 = -\frac{7}{18}$. ⊠

Пример 8.3. Решить над полем $\mathbb{C}$ систему

$$\begin{cases} x_1 - 2ix_2 - (3 - 2i)x_3 = -1 \\ 2ix_1 - x_2 + 3x_3 = 3i \\ -ix_1 + 3x_2 + ix_3 = -4i. \end{cases}$$

□ Так как каждому элементарному преобразованию системы соответствует элементарное преобразование расширенной матрицы этой системы, то вместо системы можно оперировать с расширенной матрицей.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2i & -3+2i & -1 \\ 2i & -1 & 3 & 3i \\ -i & 3 & i & -4i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2i & -3+2i & -1 \\ 0 & -5 & 7+6i & 5i \\ 0 & 5 & -2-2i & -5i \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2i & -3+2i & -1 \\ 0 & -5 & 7+6i & 5i \\ 0 & 0 & 5+4i & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Здесь произведены следующие элементарные преобразования. Первую строку матрицы $\tilde{A}$ умножали на $(-2i)$, i и складывали со второй и третьей строками соответственно. В результате получили вторую матрицу. Во второй матрице к третьей строке прибавили вторую. В результате получили матрицу B. Таким образом, исходная система равносильна следующей ступенчатой системе

$$\begin{cases} x_1 - 2ix_2 + (-3+2i)x_3 = -1 \\ -5x_2 + (7+6i)x_3 = 5i \\ (5+4i)x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x_3 = 0$, $x_2 = -i$, $x_1 = 1$. Легко проверить, что эти значения неизвестных превращают каждое уравнение исходной системы в верное равенство.

Ответ. Система имеет единственное решение $x_3 = 0$, $x_2 = -i$, $x_1 = 1$. ⊠

Пример 8.4. Решить над полем $\mathbb{R}$ систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

□ Приведём расширенную матрицу этой системы к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 20 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ -3x_2 + 8x_3 - 11x_4 = 9 \\ 10x_3 - 20x_4 = 18 \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Последнее уравнение

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2$$

не может быть удовлетворено никакими значениями неизвестных. Поэтому система несовместна.

Ответ. Система несовместна. ⊠

Пример 8.5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$$

□ Вычислим определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -25.$$

Вычислим определители Δ_i, $i = 1, 2, 3$, где Δ_i — определитель матрицы, у которой в i-м столбце стоят свободные коэффициенты $7, 9, 11$, а остальные столбцы как и у матрицы A.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & -1 & 1 \\ 11 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -25 & -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 25 & 5 \\ -25 & -2 \end{vmatrix} = -75,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 25,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 9 \\ 1 & -4 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -50$$

По формулам Крамера имеем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

Сделаем проверку. Подставим в систему $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 2$. Получим

$$\begin{cases} 3 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 2 = 7 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot(-1) + 2 = 9 \\ 3 - 4\cdot(-1) + 2\cdot 2 = 11. \end{cases}$$

Поскольку каждое уравнение превратилось в истинное равенство, то полученные значения неизвестных являются решением исходной системы.

Ответ. $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. ⊠

Пример 8.6. Совместна ли система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0? \end{cases}$$

□ Ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы находим одновременно, приводя расширенную матрицу системы к ступенчатому виду

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг матрицы системы равен 2, а ранг расширенной матрицы системы равен 3. По теореме Кронекера–Капелли система несовместна.

Ответ: Несовместна. ⊠

Пример 8.7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

□ Ранг матрицы системы равен 3 и равен рангу расширенной матрицы. Кроме того, ранг совпадает с числом неизвестных. Поэтому система совместна и имеет единственное решение. Определитель матрицы третьего порядка из левого верхнего угла не равен нулю

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Поэтому можно ограничиться первыми тремя уравнениями, а четвертое можно отбросить

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему по теореме Крамера или методом Гаусса, получаем $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

ОТВЕТ. Система совместна и имеет единственное решение $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$. ⊠

ПРИМЕР 8.8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

□ Составляем расширенную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычитаем первую строку из двух последних

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Прибавляем к третьей строке вторую, умноженную на 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что ранг получившейся матрицы равен 2. Поэтому ранг расширенной матрицы $\tilde{A}$ равен 2. Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

с помощью проведенных элементарных преобразований превратилась в матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому ранг матрицы A равен 2 и система совместна. Ненулевой минор второго порядка можно составить из коэффициентов при x_2 и x_3 в первых двух уравнениях. Третье уравнение отбросим, а неизвестные x_1 и x_4 считаем свободными. Получаем систему

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - x_1 - x_4 \\ x_2 + 2x_3 = -x_1 - x_4. \end{cases}$$

Отсюда $x_3 = -1$, $x_2 = 2 - x_1 - x_4$.

ОТВЕТ. Система совместна и имеет бесконечно много решений, которые определяются равенствами $x_2 = 2 - x_1 - x_4$, $x_3 = -1$, x_1 и x_4 — любые действительные числа. ⊠

ПРИМЕР 8.9. Решить над полем $\mathbb{C}$ систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - ix_2 + 3x_3 - 2ix_4 = 1 \\ x_1 - ix_2 + 6ix_3 - 2ix_4 = 2 \\ x_1 - ix_2 - 3x_3 - 2ix_4 = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i. \end{cases}$$

□ Составляем расширенную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 & -2i & 1 \\ 1 & -i & 6i & -2i & 2 \\ 1 & -i & -3 & -2i & \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i. \end{pmatrix}.$$

Вычитаем первую строку из двух последних

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 3 & -2i & 1 \\ 0 & 0 & 6i-3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & \frac{2}{5}+\frac{4}{5}i. \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на комплексное число $\frac{1}{i-\frac{1}{2}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 3 & -2i & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i \\ 0 & 0 & -6 & 0 & \frac{2}{5}+\frac{4}{5}i. \end{pmatrix}.$$

Прибавляем к третьей строке вторую

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 3 & -2i & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Ясно, что ранги матрицы системы и расширенной матрицы равны 2, поэтому система совместна. Ненулевой минор второго порядка составим из коэффициентов при x_2 и x_3 в первых двух уравнениях. Третье уравнение уберем. Неизвестные x_2 и x_3 будут главными, а x_1 и x_4 — свободными. Получаем систему

$$\begin{cases} -ix_2 + 3x_3 = 1 - x_1 + 2ix_4 \\ -ix_2 + 6ix_3 = 2 - x_1 + 2ix_4. \end{cases}$$

Отсюда $x_3 = -\frac{1}{15} - \frac{2}{15}i$, $x_2 = -\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i - ix_1 - 2x_4$.

Ответ. Система совместна и имеет бесконечно много решений, которые определяются равенствами $x_2 = -\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i - ix_1 - 2x_4$, $x_3 = -\frac{1}{15} - \frac{2}{15}i$, x_1 и x_4 — любые комплексные числа. ⊠

Пример 8.10. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -3. \end{cases}$$

Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса, по правилу Крамера и матричным методом.

□ Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера–Капелли. Запишем расширенную матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы A равен 3, ранг расширенной матрицы системы $\tilde{A}$ также равен 3. По теореме Кронекера–Капелли данная система линейных уравнений совместна. Поскольку $r(A) = r(\tilde{A}) = 3$ совпадает с числом неизвестных, то система имеет единственное решение.

Для решения системы методом Гаусса воспользуемся полученной ступенчатой матрицей и запишем соответствующую ступенчатую систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ -4x_3 = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим $x_3 = 0$. Подставляя его во второе уравнение, получим $x_2 = 2$. Из первого уравнения вытекает $x_1 = -1$.

Для решения системы по правилу Крамера составим крамеровскую систему. Так как $r(A) = 3$, то в исходной системе выберем три уравнения так, чтобы определитель матрицы системы был отличным от нуля. Например, взяв второе, третье и четвёртое уравнения, получим крамеровскую систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -3, \end{cases} \tag{8.2}$$

поскольку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Вычисляем определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 3 + 18 = 12,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -27 - 3 + 6 = -24,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 1 + 9 = 0.$$

По формулам Крамера получаем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{-12} = -1,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-24}{-12} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{-12} = 0.$$

Поскольку матричный метод применяется для крамеровских систем, то можем воспользоваться предыдущей крамеровской системой (8.2). В матричном виде эта система записывается так $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

В матричной форме решение системы имеет вид $X = A^{-1}B$. Находим

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & -3 & 7 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & -3 & 7 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0$.

ОТВЕТ: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$. ⊠

ПРИМЕР 8.11. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1. \end{cases} \tag{8.3}$$

Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса, по правилу Крамера и матричным методом.

□ Исследуем систему на совместность

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен 2, то по теореме Кронекера–Капелли система совместна. Поскольку найденные ранги меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечно много решений.

Для решения системы (8.3) методом Гаусса используем полученную ступенчатую матрицу. Составим соответствующую ступенчатую систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

В соответствии с числом уравнений ступенчатой системы выбираем две главные неизвестные. В качестве главных неизвестных можно выбирать те, для которых минор 2-го порядка матрицы ступенчатой системы, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, отличен от нуля. В частности, главными неизвестными всегда можно выбирать неизвестные, которые первыми встречаются в уравнениях ступенчатой системы.

Пусть x_1 и x_2 — главные неизвестные, тогда x_3 и x_4 — свободные неизвестные. Пусть $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ — произвольные числа. Тогда

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 - 2\alpha + \beta \\ -x_2 = 7 - 3\alpha - \beta. \end{cases}$$

Находим главные неизвестные

$$\begin{cases} x_2 = -7 + 3\alpha + \beta \\ x_1 = -5 + \alpha + 2\beta. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x_1 = -5 + \alpha + 2\beta$, $x_2 = -7 + 3\alpha + \beta, x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, где α, β — любые числа.

Для решения системы (8.3) по правилу Крамера, необходимо выбрать в исходной системе две главные неизвестные (т.к. ранги равны 2) и составить крамеровскую систему относительно этих неизвестных. В матрице исходной системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

выберем ненулевой минор Δ порядка $2 = r(A)$. Пусть минор

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

составлен из коэффициентов при x_2 и x_4 в первом и втором уравнениях. Тогда x_2 и x_4 — главные неизвестные, а x_1 и x_3 — свободные неизвестные. Оставим в системе уравнения, соответствующие строкам минора Δ, и придадим свободным неизвестным значения $x_1 = \alpha$, $x_3 = \beta$, где α и β – произвольные числа. Тогда система

$$\begin{cases} -x_2 - x_4 = 2 - \alpha - 2\beta \\ x_2 + 3x_4 = 3 + 2\alpha + \beta \end{cases}$$

является крамеровской относительно главных неизвестных x_2 и x_4. Находим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 - \alpha - 2\beta & -1 \\ 3 + 2\alpha + \beta & 3 \end{vmatrix} = 9 - \alpha - 5\beta,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 - \alpha - 2\beta \\ 1 & 3 + 2\alpha + \beta \end{vmatrix} = -5 - \alpha + \beta,$$

откуда

$$x_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta, \; x_4 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta,$$
$$x_1 = \alpha, \; x_3 = \beta,$$

где α и β — любые числа.

ОТВЕТ: $x_1 = \alpha$, $x_2 = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta$, $x_3 = \beta$, $x_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$, где α, β — любые числа.

Поскольку для решения системы (8.3) матричным методом нужно составить крамеровскую систему, то используем крамеровскую систему

$$\begin{cases} -x_2 - x_4 = 2 - \alpha - 2\beta, \\ x_2 + 3x_4 = 3 + 2\alpha + \beta \end{cases}$$

относительно главных неизвестных x_2, x_4. В матричном виде эта система записывается $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2-\alpha-2\beta \\ 3+2\alpha+\beta \end{pmatrix}.$$

Находим

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-\alpha-2\beta \\ 3+2\alpha+\beta \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9-\alpha-5\beta \\ -5-\alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2}\beta \\ \frac{5}{2}+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta \end{pmatrix},$$

откуда

$$x_2 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta,\ x_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta,$$

$$x_1 = \alpha,\ x_3 = \beta,$$

где α, β — любые числа.

ОТВЕТ: $x_1 = \alpha$, $x_2 = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta$, $x_3 = \beta$, $x_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$, где α, β — любые числа. ⊠

ПРИМЕР 8.12. Исследуйте систему на совместность в зависимости от параметра α. В случае совместности найдите решения системы

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ -3x_1 + x_2 - \alpha x_3 = 0. \end{cases}$$

□ Исследуем систему на совместность. Пусть $\tilde{A}$ —

расширенная матрица системы.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & -3+2\alpha & 0 & -4 \\ 0 & 1-3\alpha & 3-\alpha & 3 \end{pmatrix}.$$

Если $-3 + 2\alpha = 0$, т.е. $\alpha = \frac{3}{2}$, то

$$\tilde{A} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

В этом случае ранг матрицы A системы уравнений равен 2, а ранг расширенной матрицы системы $\tilde{A}$ равен 3. По теореме Кронекера–Капелли система несовместна.

Пусть $\alpha \neq \frac{3}{2}$. Тогда

$$\tilde{A} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & -3+2\alpha & 0 & -4 \\ 0 & 1-3\alpha & 3-\alpha & 3 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3-2\alpha} \\ 0 & 1-3\alpha & 3-\alpha & 3 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3-2\alpha} \\ 0 & 0 & 3-\alpha & \frac{5+6\alpha}{3-2\alpha} \end{pmatrix}.$$

Если $\alpha = 3$, то

$$\tilde{A} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{3} \end{pmatrix}.$$

В этом случае ранг матрицы системы равен 2, а ранг расширенной матрицы системы равен 3. По теореме

Кронекера–Капелли система несовместна.

Пусть $\alpha \neq 3$. Тогда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и равен 3. В этом случае система совместна и имеет единственное решение. Запишем ступенчатую систему, соответствующую ступенчатой матрице,

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = \frac{4}{3-2\alpha} \\ (3-\alpha)x_3 = \frac{5+6\alpha}{3-2\alpha}. \end{cases}$$

Из этой системы находим

$$x_3 = \frac{5+6\alpha}{(3-2\alpha)(3-\alpha)}, \; x_2 = \frac{4}{3-2\alpha}$$

$$x_1 = \frac{-2\alpha^2 - 3\alpha + 4}{(3-2\alpha)(3-\alpha)}.$$

ОТВЕТ: если $\alpha \in \{3, \frac{3}{2}\}$, то система несовместна; если $\alpha \notin \{3, \frac{3}{2}\}$, то система имеет единственное решение $x_1 = \frac{-2\alpha^2-3\alpha+4}{(3-2\alpha)(3-\alpha)}$, $x_2 = \frac{4}{3-2\alpha}$, $x_3 = \frac{5+6\alpha}{(3-2\alpha)(3-\alpha)}$. ⊠

ПРИМЕР 8.13. Решить однородную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

□ Вычислим ранг матрицы системы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен 2. Поэтому система имеет ненулевые решения. Третье уравнение отбросим. Неизвестные x_1 и x_4 считаем главными, а x_2 и x_3 — свободными. Положим $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$. Тогда получаем систему

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = \alpha - \beta \\ x_1 + 3x_4 = \alpha - \beta. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x_4 = 0$, $x_1 = \alpha - \beta$.

ОТВЕТ. $x_1 = \alpha - \beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$, $x_4 = 0$, где α и β — произвольные числа. ⊠

8.3. Индивидуальные задания

1. Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса, по правилу Крамера, матричным методом.

1.1. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = -8 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -10 \\ 2x_1 + 5x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 = -2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -8 \\ 5x_2 + x_3 = -6 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -7 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -5 \\ 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 7 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_3 = -10 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5 \\ -5x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

$$1.7.\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ -2x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

$$1.8.\ \begin{cases} -3x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$1.9.\ \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$1.10.\ \begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$$

$$1.11.\ \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 10 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

$$1.12.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$1.13.\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_1 + 4x_2 = 13 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

$$1.14.\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$1.15.\ \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$$

2. Исследуйте системы на совместность. Совместные системы решите методом Гаусса.

$$2.1.\ \begin{cases} 3ix_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - ix_2 + 2x_3 = i - 2 \\ -x_1 + 3x_2 - ix_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ix_1 - x_2 + (1-i)x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + ix_3 = -3 + i \\ (-1+2i)x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$2.2.\ \begin{cases} ix_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + ix_3 = i \\ (2+i)x_1 - 5x_2 + (3+i)x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + ix_3 = -2 - 2i \\ -x_1 + 2ix_2 + 3x_3 = -3 \\ 3x_1 - ix_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$2.3.\ \begin{cases} (2-i)x_1 + x_2 - x_3 = -1 - i \\ x_1 - (2+i)x_3 = 1 - 2i \\ 3x_1 - x_2 + 2ix_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2ix_2 + 3x_3 = 2 \\ -ix_1 + x_2 - (1-i)x_3 = -2i \\ (1-i)x_1 + (1-2i)x_2 + (2+i)x_3 = 5 \end{cases}$$

$$2.4.\ \begin{cases} -x_1 + (1-2i)x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2i \\ -3x_1 + x_2 - 2ix_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-i)x_1 - 2x_2 = -1 - i \\ x_1 - 2x_2 + ix_3 = 0 \\ 3x_1 - ix_2 + 2x_3 = 2 - 3i \end{cases}$$

$$2.5.\ \begin{cases} ix_1 - x_2 + (1-i)x_3 = 1 - i \\ 2x_1 + ix_2 - 3x_3 = i - 3 \\ -3x_1 + x_2 - (2+i)x_3 = -3 - 4i \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2ix_2 + x_3 = -3 \\ -ix_1 + 2x_2 = -3 + i \\ (1+i)x_1 - (2+2i)x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$2.6.\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 - (1+i)x_3 = 2i \\ -x_1 + ix_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + (1-i)x_2 - ix_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3ix_2 - x_3 = -1 \\ -ix_1 + x_2 - 2x_3 = -4 - 2i \\ 3x_1 - ix_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

2.7. $$\begin{cases} -2ix_1 + x_2 - x_3 = -3i \\ x_1 + (1-2i)x_2 + 2x_3 = -1 - i \\ 2x_1 - ix_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2ix_2 + 3x_3 = 1 - i \\ -x_1 + 4ix_2 - 4x_3 = 2 + i \\ 2x_1 + 2ix_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

2.8. $$\begin{cases} 4x_1 - ix_2 + (1-i)x_3 = 2 \\ ix_1 + x_2 = -i \\ (4+i)x_1 + (1-i)x_2 + (1-i)x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-2i)x_1 + x_2 - x_3 = -1 - i \\ x_1 - (1-i)x_2 + 2x_3 = 1 + i \\ -3x_1 + x_2 - (2+i)x_3 = -2i \end{cases}$$

2.9. $$\begin{cases} 2ix_1 - x_2 + (1-i)x_3 = 3 \\ x_1 - (1+2i)x_2 = 2 + 2i \\ -2x_1 + 4x_2 - ix_3 = -6 - 2i \end{cases}$$

$$\begin{cases} ix_1 - (2+i)x_2 - x_3 = -1 \\ 2ix_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4i \\ ix_1 + ix_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

2.10. $$\begin{cases} x_1 - 4ix_2 + (1-i)x_3 = 2 + i \\ -3x_1 + x_2 - ix_3 = 2 + 2i \\ 4x_1 - (1+4i)x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4ix_2 + x_3 = 0 \\ ix_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 + i \\ -2x_1 + (1-2i)x_3 = -3 + 2i \end{cases}$$

2.11. $$\begin{cases} (2+i)x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 - 3i \\ x_1 - 4ix_2 + ix_3 = 2 + i \\ -2x_1 + x_2 - (1-i)x_3 = 3 + 2i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + (3i-1)x_3 = 4 + i \\ -x_1 + 4x_2 - ix_3 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + (4i-1)x_3 = 3 \end{cases}$$

2.12. $$\begin{cases} -x_1 + 2ix_2 - (1+i)x_3 = 2 - i \\ 3x_1 - 4x_2 + ix_3 = 4 \\ 2x_1 + (2i-4)x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (i-1)x_1 + 2x_2 - x_3 = 3i - 2 \\ x_1 - (i+2)x_2 + 2x_3 = 2 - 2i \\ -3x_1 + x_2 - 4ix_3 = -10 \end{cases}$$

2.13. $$\begin{cases} (i+2)x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 - 3i \\ 2x_1 - (2i+1)x_2 = -1 - 2i \\ -3x_1 + 2x_2 - (1-2i)x_3 = 4 + i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2ix_2 + ix_3 = 1 - 2i \\ -x_1 + (4+2i)x_2 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 + ix_3 = 4 \end{cases}$$

2.14. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - (1-i)x_3 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + ix_3 = 3 - i \\ -x_1 - 3x_2 - (1-2i)x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -ix_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 - 4i \\ 2x_1 - (1-i)x_2 + ix_3 = 2 - i \\ x_1 - ix_2 + 4x_3 = 1 + 5i \end{cases}$$

2.15. $$\begin{cases} (3-i)x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 - ix_2 + x_3 = 1 - i \\ -2x_1 + 2x_2 - (1-i)x_3 = 1 + i \end{cases}$$

$$\begin{cases} ix_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 - i \\ (1-i)x_1 + 4x_3 = 2i \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

3. Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса.

3.1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

3.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8 \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 12 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = -5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 16 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = -4 \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = -7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = -8 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 11 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = -8 \end{cases}$

4. Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса, по правилу Крамера, матричным методом.

4.1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_3 = -4 \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 9 \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6 \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 = 10 \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = -4 \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -8 \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 9 \end{cases}$

5. Исследуйте систему на совместность в зависимости от параметра α. В случае совместности найдите решения системы

$$\begin{cases} x_1 + (n-7)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = -1 \\ (n-8)x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1, \end{cases}$$

где $1 \le n \le 15$ — номер варианта.

6. Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Найдите все матрицы B над полем $\mathbb{R}$, перестановочные с матрицей A.

6.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 6.4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6.5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 6.6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

6.7. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 6.8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

6.9. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 6.10. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

6.11. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 6.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

6.13. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 6.14. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

6.15. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. МНОГОЧЛЕНЫ

9.1. Вопросы теории

1. Построение кольца многочленов над полем.
2. Переход к обычной форме записи многочленов. Запись многочлена по убывающим и возрастающим степеням x.
3. Степень многочлена. Степень суммы и произведения многочленов.
4. Определение и свойства делимости многочленов.
5. Теорема о делении с остатком.
6. Наибольший общий делитель (НОД) многочленов и его простейшие свойства.
7. Алгоритм Евклида. Нахождение НОД многочленов с помощью алгоритма Евклида.
8. Теорема о линейном выражении НОД.
9. Взаимно простые многочлены и их свойства.
10. Неприводимые многочлены. Свойства неприводимых многочленов.
11. Аналог основной теоремы арифметики для многочленов.
12. Кратные неприводимые множители многочлена. Каноническое разложение многочлена. Нахождение НОД многочленов с помощью канонических разложений.
13. Производная многочлена. Понижение кратности неприводимого множителя при дифференцировании.
14. Корень многочлена. Теорема Безу. Кратные корни, их связь с кратными неприводимыми множителями многочлена.
15. Понижение кратности корня многочлена при дифференцировании. Критерий отсутствия кратных корней. Число корней многочлена и его степень.
16. Формулы Виета.

17. Схема Горнера.
18. Многочлены над полем комплексных чисел: основная теорема алгебры комплексных чисел и ее следствия.
19. Многочлены над полем действительных чисел: теорема о сопряжённости комплексных корней многочлена с действительными коэффициентами и ее следствие. Неприводимые над $\mathbb{R}$ многочлены.

9.2. Примеры решения задач

Пример 9.1. В кольце $\mathbb{Q}[x]$ разделить многочлен $x^3 - x^2 + x + 1$ на $x^2 - 1$.

□ На первом этапе надо домножить делитель $x^2 - 1$ на x и вычесть из делимого.

$$x^3 - x^2 + x + 1 - x(x^2 - 1) = -x^2 + 2x + 1.$$

Теперь надо повторить этот прием и уничтожить старший член $(-x^2)$. Деление удобно записывать углом

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} x^3 \qquad\; - x & x - 1 \\ \cline{1-1} - x^2 + 2x + 1 & \\ - x^2 \qquad\; + 1 & \\ \cline{1-1} 2x & \end{array}$$

Ответ: $x^3 - x^2 + x + 1 = (x^2 - 1)(x - 1) + 2x$. ⊠

Пример 9.2. В кольце $\mathbb{Z}_5[x]$ найдите неполное частное и остаток при делении многочлена

$$f(x) = \bar{1}x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{1}x + \bar{4}$$

на многочлен

$$g(x) = \bar{1}x^3 + \bar{1}x^2 + \bar{4}x + \bar{4}.$$

□ Разделим $f(x)$ на $g(x)$.

$$\begin{array}{r|l} -\ \overline{1}x^4+\overline{2}x^3+\overline{2}x^2+\overline{1}x+\overline{4} & \overline{1}x^3+\overline{1}x^2+\overline{4}x+\overline{4} \\ \underline{\overline{1}x^4+\overline{1}x^3+\overline{4}x^2+\overline{4}x\quad} & \overline{1}x+\overline{1} \\ -\ \overline{1}x^3+\overline{3}x^2+\overline{2}x+\overline{4} & \\ \underline{\overline{1}x^3+\overline{1}x^2+\overline{4}x+\overline{4}} & \\ \overline{2}x^2+\overline{3}x\quad & \end{array}$$

Итак, $f(x)=g(x)(\overline{1}x+\overline{1})+(\overline{2}x^2+\overline{3}x)$.

Ответ: $q(x)=\overline{1}x+\overline{1}$ — неполное частное, $r(x)=\overline{2}x^2+\overline{3}x$ — остаток. ⊠

Пример 9.3. Найти НОД$^1(x^3-1, x^2+1)$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$.

□ Построим алгоритм Евклида для этих многочленов. Вначале произведем деление.

$$\begin{array}{r|l} -\ x^3\ \ -1 & x^2\ +1 \\ \underline{x^3\ \ +x} & x \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\ x^2\ +1 & -x\ -1 \\ \underline{x^2\ +x} & -x\ +1 \\ -\ -x\ +1 & \\ \underline{-x\ -1} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\ -x\ -1 & 2 \\ \underline{-x\qquad} & -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \\ -\ -1 & \\ \underline{-1} & \\ 0 & \end{array}$$

Теперь запишем равенства.

$$x^3-1=(x^2+1)x+(-x-1),$$

$$x^2+1=(-x-1)(-x+1)+2, \qquad (9.1)$$

$$-x-1=2(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}).$$

Итак, $2\in$ НОД(x^3-1, x^2+1). Ясно, что НОД$^1(x^3-1, x^2+1)=1$.

Ответ: НОД$^1(x^3-1, x^2+1)=1$. ⊠

Пример 9.4. Выразить НОД$^1(x^3-1, x^2+1)$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$ через исходные многочлены.

□ Для многочленов x^3-1 и x^2+1 алгоритм Евклида состоит из трех равенств, см. (9.1). Из второго и первого равенств получаем:

$$2=x^2+1-(-x-1)(-x+1)=$$
$$=x^2+1-((x^3-1)-(x^2+1)x)(-x+1)=$$
$$=(x^3-1)(x-1)+(x^2+1)(1+x(-x+1)).$$

Ответ: $1=(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})(x^3-1)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2)(x^2+1)$. ⊠

Пример 9.5. В кольце $\mathbb{Q}[x]$ найдите НОД$(f(x), g(x))$ и выразите его через исходные многочлены, если $f(x)=3x^4+8x^3+6x^2+3x-2$ и $g(x)=3x^4-x^3-9x^2-3x+2$.

□ Составим алгоритм Евклида многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Разделим многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$.

$$\begin{array}{r|l} -\ 3x^4+8x^3+6x^2+3x-2 & 3x^4-x^3-9x^2-3x+2 \\ \underline{3x^4-x^3-9x^2-3x+2} & 1 \\ 9x^3+15x^2+6x-4 & \end{array}$$

$$f(x)=g(x)\cdot 1+(9x^3+15x^2+6x-4).$$

Разделим $3g(x)$ на $r_1(x)=9x^3+15x^2+6x-4$

$$\begin{array}{r|l} -\ 9x^4-3x^3-27x^2-9x+6 & 9x^3+15x^2+6x-4 \\ \underline{9x^4+15x^3+6x^2-4x\quad} & x-2 \\ -\ -18x^3-33x^2-5x+6 & \\ \underline{-18x^3-30x^2-12x+8} & \\ -3x^2+7x-2 & \end{array}$$

$$3g(x) = r_1(x)(x-2) + (-3x^2 + 7x - 2).$$

Делим $r_1(x)$ на $r_2(x) = -3x^2 + 7x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} -\ 9x^3 + 15x^2 + 6x - 4 & -3x^2 + 7x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{9x^3 - 21x^2 + 6x\phantom{{}-4}} & -3x - 12 \\ -\ 36x^2 \phantom{{}+6x} - 4 & \\ \underline{36x^2 - 84x + 24} & \\ 84x - 28 & \end{array}$$

$$r_1(x) = r_2(x)(-3x - 12) + 28(3x - 1).$$

Делим $r_2(x)$ на $r_3(x) = 3x - 1$.

$$\begin{array}{r|l} -\ -3x^2 + 7x - 2 & 3x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^2 + x\phantom{{}-2}} & -x + 2 \\ -\ 6x - 2 & \\ \underline{6x - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

$$r_2(x) = r_3(x)(-x + 2).$$

Итак, алгоритм Евклида многочленов $f(x)$ и $g(x)$ имеет вид:

$f(x) = g(x) \cdot 1 + r_1(x)$,
$3g(x) = r_1(x)(x-2) + r_2(x)$,
$r_1(x) = r_2(x)(-3x-12) + 28r_3(x)$,
$r_2(x) = r_3(x)(-x+2)$.

Последний ненулевой остаток в алгоритме Евклида является наибольшим общим делителем $f(x)$ и $g(x)$, т.е. $28r_3(x) = 84x - 28 \in$ НОД$(f(x), g(x))$.

Двигаясь в алгоритме Евклида снизу вверх и последовательно заменяя остатки, выразим НОД$(f(x), g(x))$ через исходные многочлены.

$$\begin{aligned} \text{НОД}(f(x), g(x)) \ni 84x - 28 &= r_1(x) + r_2(x)(3x + 12) = \\ &= r_1(x) + (3g(x) - r_1(x)(x-2))(3x+12) = \\ &= g(x)(9x+36) + r_1(x)(-3x^2 - 6x + 25) = \\ &= g(x)(9x+36) + (f(x) - g(x))(-3x^2 - 6x + 25) = \\ &= f(x)(-3x^2 - 6x + 25) + g(x)(3x^2 + 15x + 11). \end{aligned}$$

Ответ: НОД$(f(x), g(x)) \ni 84x - 28 = (-3x^2 - 6x + 25)f(x) + (3x^2 + 15x + 11)g(x)$. ⊠

Пример 9.6. Определить кратные неприводимые множители многочлена

$$f(x) = x^8 - x^6 - 2x^5 + 2x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x].$$

□ Находим производную

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^7 - 6x^5 - 10x^4 + 6x^2 + 2x = \\ &= 2x(4x^6 - 3x^4 - 5x^3 + 3x + 1). \end{aligned}$$

Так как $f(x)$ не делится на x, то НОД$^1(f(x), f'(x)) =$ НОД$^1(f(x), 4x^6 - 3x^4 - 5x^3 + 3x + 1)$. С помощью алгоритма Евклида находим, что НОД$^1(f(x), f'(x)) = x^4 - x^3 - x + 1 = (x^3 - 1)(x - 1) = (x-1)^2(x^2 + x + 1)$. Кратными неприводимыми множителями многочлена $f(x)$ являются $x - 1$ кратности 3 и $x^2 + x + 1$ кратности 2. Разделив $f(x)$ на $(x-1)^3(x^2+x+1)^2$, получим полное разложение $f(x)$ на неприводимые множители: $f = (x-1)^3(x^2+x+1)^2(x+1)$.

Ответ: Неприводимые множители многочлена $f(x)$: $(x-1)$ кратности 3, (x^2+x+1) кратности 2, $(x+1)$ кратности 1. ⊠

Пример 9.7. В кольце $\mathbb{C}[x]$ разделить многочлен

$$f(x) = 2x^5 + (1+2i)x^4 + (2+i)x^2 + (1+4i)x + i$$

на многочлен $g(x) = x + i$.

□ Применим схему Горнера.

	2	$1+2i$	0	$2+i$	$1+4i$	i
$-i$	2	1	$-i$	$1+i$	$2+3i$	$3-i$

Так как $g(x) = x + i$, то первый элемент второй строки равен $(-i)$. Во второй клетке стоит коэффициент $b_0 = a_0 = 2$, остальные клетки заполняются по формуле $b_k = a_k + b_{k-1}c$. Остаток $f(c) = 3 - i$, частное $q(x) = 2x^4 + x^3 - ix^2 + (1+i)x + 2 + 3i$.

Ответ: $f(x) = (2x^4 + x^3 - ix^2 + (1+i)x + 2 + 3i)(x + i) + 3 - i$. ⊠

Пример 9.8. Используя схему Горнера, вычислите $f(-5)$, если $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 1$.

□ Так как при делении на $(x+5)$ многочлен $f(x) = (x+5)q(x)+r$, где $q(x)$ — неполное частное, r — остаток, то очевидно, что $f(-5) = r$. Составим схему Горнера деления $f(x)$ на $(x+5)$

	2	0	–3	2	0	–1
–5	2	–10	47	–233	1165	–5826

Ответ: $f(-5) = -5826$. ⊠

Пример 9.9. Разложите многочлен $f(x) = x^4+2x^3+3x^2+5x+1$ по степеням $x-1$.

□ Разделим по схеме Горнера на $x-1$ поочерёдно $f(x)$, первое неполное частное, второе неполное частное и т.д. Получаемые при этом остатки являются коэффициентами искомого разложения

	1	2	3	5	1
1	1	3	6	11	12
1	1	4	10	21	
1	1	5	15		
1	1	6			
1	1				

Искомое разложение многочлена $f(x)$ имеет вид
$f(x) = (x-1)^4 + 6(x-1)^3 + 15(x-1)^2 + 21(x-1) + 12$.

Ответ: $f(x) = (x-1)^4+6(x-1)^3+15(x-1)^2+21(x-1)+12$. ⊠

Пример 9.10. Найти кратность корня $x = 2$ многочлена

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \in \mathbb{R}[x].$$

□ Делим $f(x)$ на $x-2$, затем получившиеся частное делим на $x-2$ и т.д., пока не получится ненулевой остаток. Деление удобно производить по схеме Горнера.

	1	–5	7	–2	4	–8
2	1	–3	1	0	4	0
2	1	–1	–1	–2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	$7 \neq 0$			

Итак, $f(x)$ делится на $(x-2)^3$, но не делится на $(x-2)^4$.

Ответ: $x = 2$ — корень кратности 3. ⊠

Пример 9.11. Определить a и b так, чтобы многочлен $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ имел $x = 1$ корнем кратности ≥ 2.

□ Число 1 будет корнем многочлена $f(x)$ не ниже второй кратности, если значения многочлена $f(x)$ и его производной $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$ при $x = 1$ равны нулю. Приравнивая $f(1)$ и $f'(1)$ к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

Ответ: $a = 3$, $b = -4$. ⊠

Пример 9.12. Определите коэффициенты a и b многочлена $f(x) = (a-2)x^4 + 2(b+1)x^3 - 3x + 1$ так, чтобы $x = -2$ стал двукратным корнем многочлена $f(x)$.

□ Так как $x = -2$ двукратный корень многочлена $f(x)$, то должны выполняться условия:

$$\begin{cases} f(-2) = 0, \\ f'(-2) = 0. \end{cases}$$

Находим $f'(x) = 4(a-2)x^3 + 6(b+1)x^2 - 3$. Тогда

$$\begin{cases} (a-2)16 - 16(b+1) + 6 + 1 = 0, \\ 4(a-2)(-8) + 6(b+1)4 - 3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16a - 16b = 41, \\ -32a + 24b = -85. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 2 и складывая его со вторым, получим

$$\begin{cases} 16a - 16b = 41, \\ \quad\quad -8b = -3, \end{cases}$$

откуда

$$b = \frac{3}{8}, \quad a = \frac{47}{16}.$$

Ответ: $a = \frac{47}{16}$, $b = \frac{3}{8}$. ⊠

Пример 9.13. Найти многочлен над полем $\mathbb{R}$ третьей степени, имеющий двукратным корнем число 3 и простым корнем число (-2).

□ Многочлен $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ имеет корни $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = -2$. По формулам Виета получаем: $a_1 = -(3+3-2) = -4$, $a_2 = 9-6-6 = -3$, $a_3 = 18$.

Ответ: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$. ⊠

Пример 9.14. Разложить над полем $\mathbb{C}$ на неприводимые множители многочлен $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$.

□ Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$x^4 + x^3 - x - 1 = x^3(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^3-1) = \\ = (x+1)(x-1)(x^2+x+1).$$

Решим уравнение $x^2 + x + 1 = 0$.

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $x^4 + x^3 - x - 1 == (x+1)(x-1)(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$. ⊠

Пример 9.15. Разложить над полем $\mathbb{R}$ на неприводимые множители многочлен $x^4 + x^3 - 8x - 8$.

□ Группируя слагаемые, получаем:

$$x^4 + x^3 - 8x - 8 = x^3(x+1) - 8(x+1) = (x+1)(x^3-8) = \\ = (x+1)(x-2)(x^2+2x+4).$$

Многочлен $x^2 + 2x + 4$ имеет отрицательный дискриминант $D = 4 - 16 = -12$, поэтому неприводим над $\mathbb{R}$.

Ответ: $x^4 + x^3 - 8x - 8 = (x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$. ⊠

Пример 9.16. Разложить над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ на неприводимые множители многочлен $f(x) = x^4 + 4$.

□ Вначале над полем комплексных чисел найдем корни многочлена $x^4 + 4$.

$$x_k = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \\ = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$x_0 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i,$$

$$x_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{4})) = \\ = \sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = -1 + i,$$

$$x_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{4})) = \\ = \sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) = -1 - i,$$

$$x_3 = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) + i\sin(2\pi - \frac{\pi}{4})) = \\ = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) = 1 - i.$$

Получаем разложение

$$f(x) = (x - (1+i))(x - (-1+i))(x - (-1-i))(x - (1-i)) = \\ = (x - 1 - i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)(x - 1 + i).$$

Перемножим скобки, отвечающие сопряженным корням:

$$(x - 1 - i)(x - 1 + i) = (x-1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 2,$$

$$(x+1-i)(x+1+i) = (x+1)^2 - i^2 = x^2+2x+2.$$

Над полем $\mathbb{R}$ получаем разложение $f(x) = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.

ОТВЕТ: $f(x) = (x-1-i)(x+1-i)(x+1+i)(x-1+i)$ над полем $\mathbb{C}$.

$f(x) = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$ над полем $\mathbb{R}$. ⊠

ПРИМЕР 9.17. Найдите все корни многочлена $f(x) = 16x^4+8x^3-7x^2+2x+1$.

□ Составим множество возможных рациональных корней p/q многочлена $f(x)$.

$$p \in \{\pm 1\}, q \in \{1,2,4,8,16\},$$

$$\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{16}\right\}.$$

Для нахождения корней используем схему Горнера

	16	8	-7	2	1
1	16	24	17	19	$20 \neq 0$
-1	16	-8	1	1	0
-1	16	-24	25	$-24 \neq 0$	
$\frac{1}{2}$	16	0	1	$\frac{3}{2} \neq 0$	
$-\frac{1}{2}$	16	-16	9	$-\frac{7}{2} \neq 0$	
$\frac{1}{4}$	16	-4	0	$1 \neq 0$	
$-\frac{1}{4}$	16	-12	4	0	

Итак, найдены два корня $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{4}$. По теореме Безу

$$f(x) = (x+1)(x+\frac{1}{4})(16x^2-12x+4).$$

Остальные корни легко найти, решая уравнение

$$16x^2-12x+4=0,$$

$$4x^2-3x+1=0,$$

$$x_3 = \frac{3-i\sqrt{7}}{8}, \quad x_4 = \frac{3+i\sqrt{7}}{8}.$$

ОТВЕТ: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{3-i\sqrt{7}}{8}$, $x_4 = \frac{3+i\sqrt{7}}{8}$. ⊠

ПРИМЕР 9.18. Найдите все корни многочлена $f(x) = 3x^4-5x^3+3x^2+4x-2$, если известен один из корней $x_1 = 1+i$.

□ Так как коэффициенты многочлена $f(x)$ являются действительными числами, то вторым корнем многочлена $f(x)$ будет число, сопряженное x_1, т.е $x_2 = 1-i$. Тогда по теореме Безу многочлен $f(x)$ делится на $(x-x_1)$ и на $(x-x_2)$, т.е. на многочлен

$$(x-x_1)(x-x_2) = (x-1-i)(x-1+i) =$$
$$= (x-1)^2 - i^2 = x^2-2x+1+1 = x^2-2x+2.$$

$$\begin{array}{r|l}
-\,3x^4-5x^3+3x^2+4x-2 & x^2-2x+2 \\ \cline{2-2}
3x^4-6x^3+6x^2 \quad\quad\quad\quad & 3x^2+x-1 \\ \cline{1-1}
-\,x^3-3x^2+4x-2 & \\
x^3-2x^2+2x \quad\; & \\ \cline{1-1}
-\,-x^2+2x-2 & \\
-x^2+2x-2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Решая уравнение $3x^2+x-1=0$, находим остальные корни

$$x_3 = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}, \quad x_4 = \frac{-1+\sqrt{13}}{6},$$

ОТВЕТ: $x_1 = 1+i$, $x_2 = 1-i$, $x_3 = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$, $x_4 = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$. ⊠

ПРИМЕР 9.19. Разложите на неприводимые множители над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ многочлены $f(x) = x^4-3x^3+2x^2+2x-4$ и $g(x) = x^4+3x^2+9$.

☐ Найдём все корни многочлена $f(x)$:

$$x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 1+i, x_4 = 1-i.$$

Так как неприводимыми над полем $\mathbb{C}$ являются только многочлены первой степени, то искомое разложение над полем $\mathbb{C}$ имеет вид

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x-1-i)(x-1+i).$$

Неприводимые многочлены над полем $\mathbb{R}$ должны иметь действительные коэффициенты. Поэтому $(x+1)$ и $(x-2)$ — неприводимые множители $f(x)$ над полем $\mathbb{R}$. Перемножим

$$(x-1-i)(x-1+i) = (x-1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 2.$$

Тогда $f(x) = (x+1)(x-2)(x^2-2x+2)$. Поскольку неприводимыми над полем $\mathbb{R}$ являются многочлены первой степени и второй степени с отрицательным дискриминантом, то полученное разложение и будет искомым над полем $\mathbb{R}$.

Преобразуем многочлен $g(x)$:

$$g(x) = x^4 + 3x^2 + 9 = x^4 + 6x^2 + 9 - 3x^2 =$$
$$= (x^2+3)^2 - (\sqrt{3}x)^2 = (x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3).$$

Так как дискриминанты полученных квадратных трехчленов отрицательны, то $g(x) = (x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3)$ — искомое разложение над полем $\mathbb{R}$.

Разложим каждый из квадратных трехчленов на неприводимые множители над полем $\mathbb{C}$:

$$x^2 - \sqrt{3}x + 3 = (x - \frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x - \frac{\sqrt{3}+3i}{2}),$$

$$x^2 + \sqrt{3}x + 3 = (x - \frac{-\sqrt{3}-3i}{2})(x - \frac{-\sqrt{3}+3i}{2}).$$

Тогда разложение на неприводимые множители над полем $\mathbb{C}$ имеет вид

$$g(x) = (x - \frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x - \frac{\sqrt{3}+3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}+3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}-3i}{2})$$

Ответ: $f(x) = (x+1)(x-2)(x^2-2x+2)$, $g(x) = (x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3)$ — над полем $\mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)(x-2)(x-1-i)(x-1+i)$, $g(x) = (x - \frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x - \frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}+3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}-3i}{2})$ — над полем $\mathbb{C}$. ☒

9.3. Индивидуальные задания

1. В кольце $\mathbb{Z}_4[x]$ найдите неполное частное и остаток при делении $f(x)$ на $g(x)$.

1.1. $f(x) = \bar{2}x^4 + \bar{1}x^3 + \bar{3}x + \bar{2}$, $g(x) = \bar{1}x^2 + \bar{1}x + \bar{1}$.
1.2 $f(x) = \bar{1}x^4 + \bar{1}x^3 + \bar{3}x + \bar{3}$, $g(x) = \bar{1}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}$.
1.3. $f(x) = \bar{1}x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{1}x + \bar{3}$, $g(x) = \bar{1}x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$.
1.4. $f(x) = \bar{3}x^4 + \bar{1}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}$, $g(x) = \bar{1}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$.
1.5. $f(x) = \bar{2}x^4 + \bar{1}x^2 + \bar{3}x + \bar{3}$, $g(x) = \bar{1}x^3 + \bar{2}x + \bar{1}$.
1.6. $f(x) = \bar{2}x^4 + \bar{1}x^2 + \bar{2}x + \bar{3}$, $g(x) = \bar{1}x^2 + \bar{2}$.
1.7. $f(x) = \bar{1}x^4 + \bar{2}x + \bar{1}$, $g(x) = \bar{1}x^3 + \bar{1}$.
1.8. $f(x) = \bar{2}x^5 + \bar{1}x^3 + \bar{1}x + \bar{1}$, $g(x) = \bar{1}x^3 + \bar{1}x + \bar{1}$.
1.9. $f(x) = \bar{1}x^5 + \bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{1}$, $g(x) = \bar{1}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}$.
1.10. $f(x) = \bar{2}x^5 + \bar{3}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x$, $g(x) = \bar{1}x^3 + \bar{2}x + \bar{1}$.
1.11. $f(x) = \bar{2}x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{3}$, $g(x) = \bar{1}x^3 + \bar{1}x + \bar{2}$.
1.12. $f(x) = \bar{3}x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{1}x + \bar{3}$, $g(x) = \bar{1}x^2 + \bar{3}x + \bar{3}$.
1.13. $f(x) = \bar{2}x^4 + \bar{1}x^2 + \bar{2}x + \bar{3}$, $g(x) = \bar{1}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{3}$.
1.14. $f(x) = \bar{1}x^5 + \bar{1}x^3 + \bar{3}x + \bar{2}$, $g(x) = \bar{1}x^3 + \bar{1}x$.
1.15. $f(x) = \bar{1}x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{1}x^3 + \bar{2}$, $g(x) = \bar{1}x^3 + \bar{3}$.

2. Используя алгоритм Евклида, найдите НОД$(f(x), g(x))$ и выразите его через исходные многочлены.

2.1. $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$,
$g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$.
2.2. $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$,
$g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$.
2.3. $f(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35$,
$g(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25$.

2.4. $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$,
$g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$.
2.5. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$,
$g(x) = x^2 - x + 1$.
2.6. $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$,
$g(x) = x^2 - x - 1$.
2.7. $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$,
$g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$.
2.8. $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12$,
$g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$.
2.9. $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1$,
$g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$.
2.10. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$,
$g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$.
2.11. $f(x) = x^6 - x^4 + 4x^3 - 3x + 2$,
$g(x) = x^3 + 2$.
2.12. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2$,
$g(x) = x^5 - 1$.
2.13. $f(x) = x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 7$,
$g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.
2.14. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$,
$g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$.
2.15. $f(x) = x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 5x + 3$,
$g(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$.

3. Используя схему Горнера, вычислите $f(x_0)$.

3.1. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$, $x_0 = 1 + i$.
3.2. $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$, $x_0 = -3 + i$.
3.3. $f(x) = 4x^3 + x^2$, $x_0 = -1 - i$.
3.4. $f(x) = x^3 - x^2 - x$, $x_0 = 1 - 2i$.
3.5. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $x_0 = i$.
3.6. $f(x) = 5x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 3x + 7$, $x_0 = 3i$.
3.7. $f(x) = x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7$, $x_0 = -2 - i$.
3.8. $f(x) = x^5 + (1-2i)x^4 - (3+i)x^2 + 7$, $x_0 = -1 + 2i$.
3.9. $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i$, $x_0 = i$.
3.10. $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$, $x_0 = 1 + 2i$.
3.11. $f(x) = 2x^5 + 4x^3 - 5x + 2$, $x_0 = 2i$.

3.12. $f(x) = 4x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 5x$, $x_0 = 2 + i$.
3.13. $f(x) = 3x^4 - ix^3 + (1 - 2i)x^2 + 2x - 1$, $x_0 = 3i$.
3.14. $f(x) = 5x^4 + 2ix^3 + 5x - i$, $x_0 = 1 + i$.
3.15. $f(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 1$, $x_0 = i$.

4. Используя схему Горнера, разложите многочлен $f(x)$ из задания 2 по степеням $(x + 1)$.

5. Определите коэффициенты a, b, c так, чтобы многочлен $f(x)$ имел $x = 1$ корнем кратности три.

5.1. $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2x + 1$.
5.2. $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2cx + 2$.
5.3. $f(x) = 2ax^3 - bx^2 + cx - 1$.
5.4. $f(x) = x^4 - ax^3 + 2bx + c$.
5.5. $f(x) = -ax^4 + 2bx^3 - cx^2 + 2x$.
5.6. $f(x) = ax^4 + 2bx^3 + 3cx - 3$.
5.7. $f(x) = 2ax^3 - bx^2 + cx - 4$.
5.8. $f(x) = -2ax^4 + 3bx^2 - 2cx + 3$.
5.9. $f(x) = ax^4 - 2bx^2 + cx - 2$.
5.10. $f(x) = ax^3 - 3bx^2 + 2cx - 4$.
5.11. $f(x) = 3ax^3 + 2bx^2 - 4cx - 1$.
5.12. $f(x) = -2ax^4 + bx^3 - 2cx - 6$.
5.13. $f(x) = ax^4 - 4bx^2 + cx - 2$.
5.14. $f(x) = 4ax^3 - 2bx^2 + 3cx - 4$.
5.15. $f(x) = -2ax^3 + 2bx^2 - 6cx + 1$.

6. Найдите все корни многочлена $f(x)$ в поле $\mathbb{C}$.

6.1. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x^2 - 9x + 9$.
6.2. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 15x - 50$.
6.3. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$.
6.4. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 3x - 12$.
6.5. $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 16x - 24$.
6.6. $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.
6.7. $f(x) = 3x^4 - 17x^3 + 19x^2 + 2x + 8$.
6.8. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 14x + 5$.
6.9. $f(x) = -2x^4 + x^3 - x + 2$.
6.10. $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 + 22x - 10$.
6.11. $f(x) = -3x^4 + 5x^3 + 33x^2 - 23x + 12$.
6.12. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 3x - 18$.

6.13. $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 28x^2 - 37x + 20.$
6.14. $f(x) = -3x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 20x + 16.$
6.15. $f(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 15x + 25.$

7. Найдите все корни многочлена $f(x)$ в поле $\mathbb{C}$, если известен один из корней x_1.

7.1. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 6x + 13, \quad x_1 = 3 - 2i.$
7.2. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 29x^2 - 50x + 52, \quad x_1 = 1 + i\sqrt{3}.$
7.3. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 65, \quad x_1 = 3 + 2i.$
7.4. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5, \quad x_1 = i.$
7.5. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 8x + 20, \quad x_1 = -2i.$
7.6. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 32, \quad x_1 = 2i.$
7.7. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 50x + 50, \quad x_1 = 2 - i.$
7.8. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2, \quad x_1 = 1 + i.$
7.9. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 30x + 50, \quad x_1 = 1 + 3i.$
7.10. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 16x + 20, \quad x_1 = -2 + i.$
7.11. $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 10, \quad x_1 = -1 + i.$
7.12. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 17x^2 + 16x + 52, \quad x_1 = -2 + 3i.$
7.13. $f(x) = x^4 + 11x^2 + 10x + 50, \quad x_1 = -1 + 2i.$
7.14. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 10x^2 - 6x + 65, \quad x_1 = -2 + 3i.$
7.15. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5, \quad x_1 = 2 - i.$

8. Разложите многочлены $f(x)$ и $g(x)$ на неприводимые множители над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

8.1. $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2,$
$g(x) = x^6 + 27.$
8.2. $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12,$
$g(x) = x^4 + 16.$
8.3. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2,$
$g(x) = x^4 + 81.$
8.4. $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1,$
$g(x) = x^4 - 2x^2 + 16.$
8.5. $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1,$
$g(x) = 16x^4 + 1.$
8.6. $f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x - 4,$
$g(x) = x^6 - 27.$
8.7. $f(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 6x - 9,$

$g(x) = x^4 - 2x^2 + 4.$
8.8. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 45x + 54,$
$g(x) = x^6 - 1.$
8.9. $f(x) = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 23x + 10,$
$g(x) = x^4 + 4x^2 + 9.$
8.10. $f(x) = x^5 + 5x^4 - 6x^3 - x^2 - 5x + 6,$
$g(x) = 81x^4 + 1.$
8.11. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5,$
$g(x) = x^4 - x^2 + 1.$
8.12. $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x + 16,$
$g(x) = 16x^4 + 4x^2 + 1.$
8.13. $f(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1,$
$g(x) = x^4 + 1.$
8.14. $f(x) = x^5 + x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x - 6,$
$g(x) = x^4 - x^2 + 9.$
8.15. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9,$
$g(x) = x^8 - 1.$

10. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

10.1. Вопросы теории

1. Интерполяция многочлена. Задача интерполяции.

2. Интерполяционная формула Лагранжа.

3. Формально алгебраический и функциональный взгляды на многочлены над конечными и бесконечными полями.

4. Рациональные дроби над полем, их равенство, сложение и умножение. Поле рациональных дробей.

5. Правильная рациональная дробь. Разложение рациональной дроби в сумму многочлена и правильной дроби.

6. Сумма, разность и произведение правильных рациональных дробей. Кольцо правильных рациональных дробей.

7. Простейшая дробь. Простейшие дроби над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

8. Разложение рациональной дроби в сумму многочлена и простейших дробей.

9. Разложение правильной рациональной дроби, знаменатель которой есть произведение двух взаимно простых многочленов.

10. Разложение правильной рациональной дроби в сумму правильных рациональных дробей, знаменатель каждой из которых есть степень неприводимого многочлена.

11. Разложение в сумму простейших дробей правильной рациональной дроби, у которой знаменатель есть степень неприводимого многочлена.

10.2. Примеры решения задач

Пример 10.1. В кольце $\mathbb{Q}[x]$ найти многочлен $f(x)$ степени ≤ 3, если $f(-1) = 1$, $f(0) = 5$, $f(1) = 3$, $f(2) = 2$.

□ Составим таблицу.

	a_1	a_2	a_3	a_4
x	-1	0	1	2
$f(x)$	1	5	3	2
	b_1	b_2	b_3	b_4

Вначале найдем $\varphi_j(x)$.

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} =$$

$$= \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)} = \frac{x(x^2-3x+2)}{-6} =$$

$$= \frac{x^3-3x^2+2x}{-6};$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)} =$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)} = \frac{(x^2-1)(x-2)}{2} =$$

$$= \frac{x^3-2x^2-x+2}{2};$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)} =$$

$$= \frac{(x+1)x(x-2)}{2\cdot 1\cdot(-1)} = \frac{x^3-x^2-2x}{-2};$$

$$\varphi_4(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)} =$$

$$= \frac{(x+1)x(x-1)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{x^3-x}{6}.$$

Теперь получаем

$$f(x) = b_1\varphi_1(x)+b_2\varphi_2(x)+b_3\varphi_3(x)+b_4\varphi_4(x) =$$
$$= 1\cdot\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}+5\frac{x^3-2x^2-x+2}{2}+$$
$$+3\frac{x^3-x^2-2x}{-2}+2\frac{x^3-x}{6} =$$
$$= x^3\left(-\frac{1}{6}+\frac{5}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right)+x^2\left(\frac{1}{2}-5+\frac{3}{2}\right)+x\left(-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+3-\frac{1}{3}\right)+5 =$$
$$= \frac{7}{6}x^3-3x^2-\frac{1}{6}x+5.$$

Проверка: $f(-1)=1$, $f(0)=5$, $f(1)=3$, $f(2)=2$. ⊠

Ответ: $f(x)=\frac{7}{6}x^3-3x^2-\frac{1}{6}x+5$.

Пример 10.2. В кольце $\mathbb{C}[x]$ найдите многочлен $f(x)$ степени меньшей или равной 3, для которого $f(-1)=1+2i$, $f(0)=1$, $f(i)=2-3i$, $f(1)=1$.

□ Запишем таблицу значений многочлена

k	1	2	3	4
a_k	-1	0	i	1
$b_k=f(a_k)$	$1+2i$	1	$2-3i$	1

Воспользуемся интерполяционной формулой Лагранжа. Находим

$$\varphi_1(x) = \frac{x(x-i)(x-1)}{(-1)(-1-i)(-2)} = \frac{x^3-(1+i)x^2+ix}{2(-1-i)},$$
$$\varphi_2(x) = \frac{(x+1)(x-i)(x-1)}{1(-i)(-1)} = \frac{x^3-ix^2-x+i}{i},$$
$$\varphi_3(x) = \frac{(x+1)x(x-1)}{(i+1)i(i-1)} = \frac{x^3-x}{-2i},$$

$$\varphi_4(x) = \frac{(x+1)x(x-i)}{2(1-i)1} = \frac{x^3+(1-i)x^2-ix}{2(1-i)}.$$

Теперь

$$f(x) = b_1\varphi_1(x)+b_2\varphi_2(x)+b_3\varphi_3(x)+b_4\varphi_4(x) =$$
$$= (1+2i)\frac{x^3-(1+i)x^2+ix}{2(-1-i)}+1\cdot\frac{x^3-ix^2-x+i}{i}+$$
$$+(2-3i)\frac{x^3-x}{-2i}+1\cdot\frac{x^3+(1-i)x^2-ix}{2(1-i)} =$$
$$= \frac{(-3-i)}{4}(x^3-(1+i)x^2+ix)-i(x^3-ix^2-x+i)+$$
$$+\frac{(3+2i)}{2}(x^3-x)+\frac{(1+i)}{4}(x^3+(1-i)x^2-ix) =$$
$$= x^3\left(\frac{-3-i}{4}-i+\frac{3+2i}{2}+\frac{1+i}{4}\right)+x^2\left(\frac{2+4i}{4}-1+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+x\left(\frac{1-3i}{4}+i-\frac{3+2i}{2}+\frac{1-i}{4}\right)+1 =$$
$$= x^3+ix^2-(1+i)x+1.$$

Итак, $f(x)=x^3+ix^2-(1+i)x+1$.

Проверка. $f(-1)=-1+i+1+i+1=1+2i$, $f(0)=1$, $f(i)=-i-i-i+i+1+1=2-3i$, $f(1)=1+i-1-i+1=1$.

Ответ: $f(x)=x^3+ix^2-(1+i)x+1$. ⊠

Пример 10.3. Разложить над $\mathbb{R}$ рациональную дробь

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+2x+1}.$$

□ Исходная рациональная дробь неправильная. Разложим ее в сумму многочлена и правильной дроби.

$$\begin{array}{rrr|l} x^3 & & +x\ +1 & x^2+2x+1 \\ \cline{4-4} x^3 & +2x^2 & +x & x-2 \\ \hline & -2x^2 & +1 & \\ & -2x^2 & -4x\ -2 & \\ \hline & & 4x\ +3 & \end{array}$$

Итак,

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+2x+1} = x-2+\frac{4x+3}{x^2+2x+1}.$$

Правильную рациональную дробь

$$\frac{4x+3}{(x+1)^2}$$

разложим в сумму простейших:

$$\frac{4x+3}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+(A+B)}{(x+1)^2}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного:

$$\begin{cases} 4 = A \\ 3 = A+B, \end{cases}$$

откуда $A = 4$, $B = -1$.

Ответ:

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+2x+1} = (x-2)+\frac{4}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

⊠

Пример 10.4. Разложить над $\mathbb{R}$ рациональную дробь

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}.$$

□ Многочлен x^2+x+1 имеет отрицательный дискриминант, поэтому неприводим над $\mathbb{R}$. Имеем:

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$$

Приравниваем числители

$2x-1 = A(x+1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x+1)^2$.

Пусть $x=-1$. Тогда $-3 = B$, т.е. $B=-3$. Пусть $x = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$2(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})-1 = (C(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})+D)(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2});$$

$$-2+i\sqrt{3} = C(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^2+D(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) =$$

$$= C(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})+D(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\begin{cases} -2 = -\frac{1}{2}(C+D) \\ \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}(-C+D), \end{cases}$$

$$\begin{cases} C+D = 4 \\ -C+D = 2, \end{cases}$$

$D=3$, $C=1$. Пусть $x=0$. Тогда $-1 = A-3+3$ и $A=-1$.

Ответ:

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{-1}{x+1}+\frac{-3}{(x+1)^2}+\frac{x+3}{x^2+x+1}.$$

⊠

Пример 10.5. Разложите рациональную дробь

$$F(x) = \frac{x^4+x^3-3x^2-2x}{x^3-3x-2}$$

в сумму многочлена и простейших дробей над полем $\mathbb{R}$.

□ Представим дробь $F(x)$ в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Для этого разделим числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3-3x^2-2x & x^3-3x-2 \\ \cline{2-2} \underline{x^4-3x^2-2x} & x+1 \\ \phantom{x^4+{}}x^3 & \\ -\underline{\phantom{x^4+{}}x^3-3x-2} & \\ 3x+2 & \end{array}$$

Следовательно,

$$F(x) = x + 1 + \frac{3x+2}{x^3-3x-2}.$$

Разложим над полем $\mathbb{R}$ многочлен x^3-3x-2 на неприводимые множители: $x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$. Представим правильную рациональную дробь в виде суммы простейших дробей

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} =$$
$$= \frac{A(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)}.$$

Тогда

$$3x+2 = A(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)^2.$$

Придавая значения $x=1$, $x=2$, $x=0$, получаем $A=\frac{1}{3}$, $C=\frac{8}{9}$, $B=-\frac{8}{9}$.

Ответ:

$$F(x) = x+1+\frac{(\frac{1}{3})}{(x+1)^2}+\frac{(-\frac{8}{9})}{x+1}+\frac{(\frac{8}{9})}{x-2}.$$

$\boxtimes$

Пример 10.6. Разложите рациональную дробь

$$G(x)=\frac{x^2-2x}{(x^2+1)^2(x-1)}$$

в сумму простейших дробей над полем $\mathbb{R}$.

$\square$ Представим исходную дробь в следующем виде

$$\frac{x^2-2x}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{E}{x-1} =$$

$$= \frac{(Ax+B)(x-1)+(Cx+D)(x^2+1)(x-1)+E(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2(x-1)}.$$

Тогда

$$x^2-2x = Ax^2-Ax+Bx-B+(Cx+D)(x^3-x^2+x-1)+Ex^4+$$
$$+2Ex^2+E = (C+E)x^4+(-C+D)x^3+(A+C-D+2E)x^2+$$
$$+(-A+B-C+D)x+(-B-D+E).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$\begin{cases} C+E=0 \\ -C+D=0 \\ A+C-D+2E=1 \\ -A+B-C+D=-2 \\ -B-D+E=0. \end{cases}$$

Решая систему, получим $A=\frac{3}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{4}$, $D=\frac{1}{4}$, $E=-\frac{1}{4}$.

Ответ:

$$G(x) = \frac{3x-1}{2(x^2+1)^2}+\frac{x+1}{4(x^2+1)}-\frac{1}{4(x-1)}.$$

$\boxtimes$

Пример 10.7. Разложите рациональную дробь

$$F(x)=\frac{3x-1}{(x^2+1)^2}$$

в сумму простейших дробей над полем $\mathbb{C}$.

$\square$ Разложим знаменатель дроби в произведение неприводимых многочленов над полем $\mathbb{C}$:

$$(x^2+1)^2 = ((x+i)(x-i))^2 = (x+i)^2(x-i)^2.$$

Тогда

$$\frac{3x-1}{(x+i)^2(x-i)^2} = \frac{A}{(x+i)^2}+\frac{B}{x+i}+\frac{C}{(x-i)^2}+\frac{D}{(x-i)}=$$

$$= \frac{A(x-i)^2 + B(x+i)(x-i)^2 + C(x+i)^2 + D(x-i)(x+i)^2}{(x+i)^2(x-i)^2},$$

откуда

$3x-1 = A(x-i)^2+B(x+i)(x-i)^2+C(x+i)^2+D(x-i)(x+i)^2$.

Полагая $x=i$, $x=-i$, $x=0$, $x=1$, получим:

$$3i-1=-4C, \quad C=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i,$$

$$-3i-1=-4A, \quad A=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i,$$

$$-1=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i-Bi-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i+Di, \quad B-D=-\frac{1}{2}i,$$

$$2=(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i)(-2i)+2B(1-i)+(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i)2i+2D(1+i),$$

$$B(1-i)+D(1+i)=-\frac{1}{2}.$$

Решая систему

$$\begin{cases} B-D=-\frac{1}{2}i \\ B(1-i)+D(1+i)=-\frac{1}{2}, \end{cases}$$

находим $B=-\frac{1}{4}i$, $D=\frac{1}{4}i$.

Ответ:

$$F(x)=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i}{(x+i)^2}+\frac{(-\frac{1}{4}i)}{x+i}+\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i}{(x-i)^2}+\frac{(\frac{1}{4}i)}{x-i}.$$

⊠

10.3. Индивидуальные задания

1. В кольце $\mathbb{R}[x]$ найдите многочлен $f(x)$ наименьшей степени по данной таблице его значений.

1.1.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	5	7	15

1.2.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	5	25	79

1.3.

x	-2	1	2	4
$f(x)$	-6	3	8	48

1.4.

x	-1	1	2	4
$f(x)$	10	6	4	-30

1.5.

x	-3	-1	1	2
$f(x)$	-30	0	2	-5

1.6.

x	-4	-3	-1	1
$f(x)$	-3	7	3	7

1.7.

x	-2	0	1	2
$f(x)$	4	1	1	6

1.8.

x	-1	1	2	4
$f(x)$	2	0	$\frac{1}{2}$	27

1.9.

x	-1	0	1	4
$f(x)$	3	4	5	13

1.10.

x	-1	0	1	5
$f(x)$	1	2	3	31

1.11.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	-8	9	14	13

1.12.

x	-3	-1	0	1
$f(x)$	34	0	-4	-2

1.13.

x	-2	0	1	2
$f(x)$	-18	3	0	-8

1.14.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	2	8

1.15.

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-7	2	2	5

2. В кольце $\mathbb{C}[x]$ найдите многочлен $g(x)$ наименьшей степени по данной таблице его значений.

2.1.

x	1	i	-1
$f(x)$	$3i$	$-2+i$	$2+i$

2.2.

x	-2	-1	i
$f(x)$	$-6-i$	$-2-i$	1

2.3.

x	-1	$-i$	1
$f(x)$	$3+i$	$1+i$	$-1+i$

2.4.

x	$-i$	i	0
$f(x)$	2	0	-1

2.5.

x	-2	-1	i
$f(x)$	$-8-2i$	$-i$	$4-i$

2.6.

x	-1	$2i$	1
$f(x)$	$3-3i$	$-6-i$	$5-3i$

2.7.

x	0	1	i
$f(x)$	$-1+i$	-2	$1+i$

2.8.

x	$-i$	0	i
$f(x)$	3	2	$1+2i$

2.9.

x	-1	i	$-i$
$f(x)$	$-4+i$	i	$-3i$

2.10.

x	-2	0	i
$f(x)$	$-1-2i$	1	$1-i$

2.11.

x	0	1	2
$f(x)$	$-2i$	$-2-i$	-8

2.12.

x	1	i	2
$f(x)$	$-1+i$	$-3+i$	-1

2.13.

x	-1	0	i
$f(x)$	$-2i$	$-1-2i$	$-2-2i$

2.14.

x	$-i$	0	1
$f(x)$	$4+2i$	2	$-1+i$

2.15.

x	-1	1	i
$f(x)$	$1+2i$	1	$-2+i$

3. Разложите рациональную дробь $F(x)$ в сумму простейших дробей над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

3.1. $F(x) = \dfrac{2x-3}{(x-1)^2(x+2)^2}$. 3.2. $F(x) = \dfrac{3x-1}{(x+2)^2(x-3)^2}$.

3.3. $F(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)^3(x+2)}$. 3.4. $F(x) = \dfrac{3x-2}{(x+3)^3(x-1)}$.

3.5. $F(x) = \dfrac{x-5}{(x-3)^2(x+2)^2}$. 3.6. $F(x) = \dfrac{-3x+2}{(x-5)^2(x+1)^2}$.

3.7. $F(x) = \dfrac{5x-4}{(x-4)^3(x-1)}$. 3.8. $F(x) = \dfrac{-4x+3}{(x+4)(x+1)^3}$.

3.9. $F(x) = \dfrac{x-1}{(x-3)^2(x+4)^2}$. 3.10. $F(x) = \dfrac{3x-5}{(x-2)^2(x+1)^2}$.

3.11. $F(x) = \dfrac{2x-4}{(x+5)(x-1)^3}$. 3.12. $F(x) = \dfrac{-3x+5}{(x-5)^2x^2}$.

3.13. $F(x) = \dfrac{2x-4}{(x+2)^3x}$. 3.14. $F(x) = \dfrac{-x+3}{(x-1)^2(x+2)^2}$.

3.15. $F(x) = \frac{x+1}{x^3(x-2)}$.

4. Разложите рациональную дробь $K(x)$ в сумму простейших дробей над полем $\mathbb{R}$.

4.1. $K(x) = \dfrac{2x^2-x}{(x^2-x+2)^2}$. 4.2. $K(x) = \dfrac{2x^2-1}{(x^2+x+2)^2}$.

4.3. $K(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+2)^2}$. 4.4. $K(x) = \dfrac{x^2-1}{(x^2+3x+4)^2}$.

4.5. $K(x) = \dfrac{4x^2-5x+2}{(x^2+1)^2}$. 4.6. $K(x) = \dfrac{3x^2-x}{(x^2+4)^2}$.

4.7. $K(x) = \dfrac{2x^2-2}{(x^2+3)^2}$. 4.8. $K(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{(x^2-x+3)^2}$.

4.9. $K(x) = \dfrac{5x^2-6x+1}{(x^2+3)^2}$. 4.10. $K(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x^2+5)^2}$.

4.11. $K(x) = \dfrac{5x^2 - 4x}{(x^2 + 3x + 5)^2}$. 4.12. $K(x) = \dfrac{6x^2 - 1}{(x^2 + 2x + 2)^2}$.

4.13. $K(x) = \dfrac{x^2 - 2}{(x^2 + 2)^2}$. 4.14. $K(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{(x^2 - x + 2)^2}$.

4.15. $K(x) = \frac{-x^2+3}{(x^2+1)^2}$.

5. Разложите рациональные дроби $F(x)$ и $G(x)$ в сумму многочлена и простейших дробей над полем $\mathbb{R}$, над полем $\mathbb{C}$.

5.1. $F(x) = \frac{2x^4-3x^3-2x^2+4x-5}{x^3-2x^2-x+2}$,
$G(x) = \frac{2x^4+11x^2-x+1}{x^4+4x^2}$.

5.2. $F(x) = \frac{3x^4+4x^3-x^2-35x-6}{x^3+x^2-x-10}$,
$G(x) = \frac{x^4+3x^3-2x^2-2x+3}{x^4-2x^2+1}$.

5.3. $F(x) = \frac{-x^4-2x^3+2x^2+7x+6}{x^3+2x^2-x-2}$,
$G(x) = \frac{-2x^4+x^3-x^2+2x+3}{x^4+x^3-x-1}$.

5.4. $F(x) = \frac{-2x^4-x^3+6x^2-2x-1}{x^3+x^2-x-1}$,
$G(x) = \frac{x^4+4x^3-7x^2-25x-21}{x^4+3x^3-x^2-13x-10}$.

5.5. $F(x) = \frac{-3x^4-2x^2-23x-3}{x^3+x+10}$,
$G(x) = \frac{-3x^4-x^3+9x^2+3x+2}{x^4+x^3-3x^2-5x-2}$.

5.6. $F(x) = \frac{-x^4+8x^3-24x^2+42x-31}{x^3-2x^2+2x-1}$,
$G(x) = \frac{2x^4-x^3+2x^2+x}{x^4-2x^3+2x-1}$.

5.7. $F(x) = \frac{-2x^4+8x^3-7x^2+1}{x^3-4x^2+6x-3}$,
$G(x) = \frac{x^4-x^3+x^2-4}{x^4-4x^3+3x^2+4x-4}$.

5.8. $F(x) = \frac{3x^4+13x^3+2x^2-11x-12}{x^3+4x^2-x-4}$,
$G(x) = \frac{x^4-5x^3+2x^2-x-1}{x^4-5x^3+10x^2-9x+3}$.

5.9. $F(x) = \frac{3x^4-11x^3+16x^2-9x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$,
$G(x) = \frac{-2x^4+2x^3-x+5}{x^4-x^3-x^2-x-2}$.

5.10. $F(x) = \frac{-x^4+2x^3+2x-4}{x^3-2x^2+x-2}$,
$G(x) = \frac{x^4-x^3+x^2-2x+2}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}$.

5.11. $F(x) = \frac{-x^4+2x^3+x^2+5x+1}{x^3-1}$,
$G(x) = \frac{2x^4+x^3-x^2-x-2}{x^4+2x^3-2x-1}$.

5.12. $F(x) = \frac{x^4+4x^3+8x^2+9x+2}{x^3+3x^2+4x+4}$,
$G(x) = \frac{-2x^4-x^3-6x^2-4x-8}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}$.

5.13. $F(x) = \frac{2x^4-9x^3+14x^2-x-3}{x^3-5x^2+8x-4}$,
$G(x) = \frac{x^4-x^2+x-4}{x^4+2x^3+x^2-4}$.

5.14. $F(x) = \frac{x^4+5x^3+11x^2+4x+1}{x^3+5x^2+9x+5}$,
$G(x) = \frac{x^4+x^2-4x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}$.

5.15. $F(x) = \frac{2x^4-3x^3+10x^2-12x+3}{x^3-x^2+4x-4}$,
$G(x) = \frac{2x^4+3x^3-3x^2-2x}{x^4+x^3-3x^2-x+2}$.

ОТВЕТЫ

1.

1.1. $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$,

$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 8 & 2 & 4 & 5 & 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$,

$\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 7 & 2 & 8 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

$(\alpha\beta)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 3 & 2 & 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$,

$(\beta\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 6 & 1 & 7 & 9 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

$\beta^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 1 & 3 & 9 & 8 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

2.2. $\alpha = (137289)(46)(5) = (19)(18)(12)(17)(13)(46)$.
Перестановка α четная.
$\beta = (16892)(374)(5) = (12)(19)(18)(16)(34)(37)$.
Перестановка β четная.

3.3. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 2 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 7 & 5 & 1 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$,

$\sigma^{-1} = (86)(741)(532)$, $\tau^{-1} = (463)(51)(7653)$,
$\sigma\tau = (18675423)$, $\tau\sigma = (15276843)$.
Перестановка $\sigma^2\tau$ четная.
Перестановка $(\tau\sigma)^2\tau(\tau\sigma)^{-1}$ нечетная.

4.4. Перестановка γ четная в трех случаях:
$i = 1, j = 2, k = 6$; $i = 2, j = 6, k = 1$;
$i = 6, j = 1, k = 2$.
Перестановка χ нечетная при $i = 3, j = 5, k = 6$.

5.5. $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 3 & 8 & 5 & 2 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

6.6. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

2.

1.7. Операция $a * b = 3(a + b)$ не ассоциативна, поэтому множество $\mathbb{Q}$ с этой операцией не является полугруппой.

2.8. Множество $\mathbb{Q}^*$ с операцией $a * b = 3ab, \forall a, b \in \mathbb{Q}^*$ является абелевой группой с нейтральным элементом $\frac{1}{3}$ и симметричным к a элементом $\frac{1}{9a}$.

3.9. Множество M не будет аддитивной группой, так как в M нет нулевого элемента.

Множество M не будет мультипликативной группой, так как в M не для всех элементов существуют обратные элементы. Например, элемент $\frac{4}{3} \in M$, но он не имеет обратного.

4.10. Множество

$$K = \{ -\frac{a}{4^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \}$$

с операциями сложения и умножения действительных чисел является кольцом.

5.11. Множество

$$P = \{ \frac{a}{3^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \}$$

с операциями сложения и умножения действительных чисел полем не является.

3.

2.12. При $a = 478$, $b = 26$ неполное частное $q = 18$, остаток $r = 10$.

При $a = 478$, $b = -26$ неполное частное $q = -18$, остаток $r = 10$.

Если $a = -478, b = 26$, то $q = -19$, $r = 16$.

Если же $a = -478$, $b = -26$, то $q = 19$, $r = 16$.

3.13. Делитель равен (-94), остаток 9, т. е.

$$40053 = (-94) \cdot (-426) + 9.$$

4.14. НОД$(1716, 1540) = 44 = 9 \cdot 1716 - 10 \cdot 1540$,
НОК$(1716, 1540) = 60060$.
5.15. НОД$(44352, 30576) = 336$.
6.1. Либо $a = 16$, $b = 1584$, либо $a = 144$, $b = 176$.
7.2. НОД$(4704, 96, -154) = 2$, НОК$(b, c) = 7392$.

4.

1.3. 10.
2.4. 9.
4.5. $\varphi(105840) = 24192$.
5.6. Обратимые элементы: $\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}$.
Делители нуля: $\overline{2}$ и $\overline{9}$, $\overline{3}$ и $\overline{6}$.
Обратные элементы: для $\overline{1}$ — элемент $\overline{1}$, для $\overline{5}$ — элемент $\overline{11}$, для $\overline{7}$ — элемент $\overline{13}$, для $\overline{11}$ — элемент $\overline{5}$, для $\overline{13}$ — элемент $\overline{7}$, для $\overline{17}$ — элемент $\overline{17}$.
6.7. Обратимые элементы: $\overline{1}, \overline{3}$.

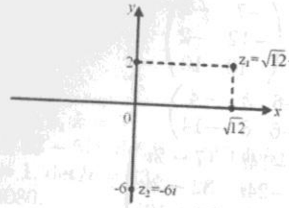
$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$

7.8. $x = 1 + 3t,\ t \in \mathbb{Z}$.
8.9. $x = 3 + 4t,\ y = 8 + 9t,\ t \in \mathbb{Z}$.

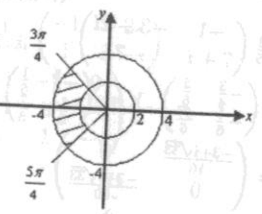
5.

1.10. $z_1 + z_2 = 2 + i$, $z_1 - z_2 = -8 + 3i$, $z_1 \cdot z_2 = -13 + 13i$,
$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{17}{26} + \frac{7}{26}i.$$
2.11. $x = \frac{3}{7}$, $y = -\frac{20}{7}$.
3.12. $\sqrt{-4 + 3i} = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i)$,
$$\sqrt{6 - i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{37} - 6}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{37} + 6}{2}}i\right).$$
4.13. Решения первого уравнения:

$x_1 = 1 + i,\ x_2 = 2 - 4i$.
Решения второго уравнения: $x_1 = 1 - 2i,\ x_2 = 1 + 2i$.
5.14. $z_1 = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$, $z_2 = 6(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$.



6.15. $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.
7.1.



8.2. $(-1 - i\sqrt{3})^{30} = 2^{30}$.
$\sqrt[5]{-\sqrt{12} + 2i} = \sqrt[5]{4}(\cos\frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{5})$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
$z_0 = \sqrt[5]{4}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $z_1 = \sqrt[5]{4}(\cos\frac{17\pi}{30} + i\sin\frac{17\pi}{30})$,
$z_2 = \sqrt[5]{4}(\cos\frac{29\pi}{30} + i\sin\frac{29\pi}{30})$,
$z_3 = \sqrt[5]{4}(\cos\frac{41\pi}{30} + i\sin\frac{41\pi}{30})$,
$z_4 = \sqrt[5]{4}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$.
$\sqrt[3]{-8} = 2(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3})$, $k = 0, 1, 2$.

$z_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_1 = -2$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

6.

1.3. $AB = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -12 & -2 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$.

$B^T A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -4 \\ -6 & 8 & -14 \end{pmatrix}$.

$ABC = \begin{pmatrix} -14i & 17-2i \\ -24i & 32-2i \\ -20i & 50+10i \end{pmatrix}$.

Произведения BA, CAB и $B^T C$ — не определены.

2.4. $C^3 - 5C^2 + 2C + 4E_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2-10i \\ 6+4i & 14+2i \end{pmatrix}$.

3.5. $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3-2i \\ 7+i & -7 \end{pmatrix}$.

4.6. $X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{47}{6} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$.

5.7. $A_1 = \begin{pmatrix} \frac{-3+i\sqrt{33}}{10} & 0 \\ 0 & \frac{-3+i\sqrt{33}}{10} \end{pmatrix}$,

$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{-3-i\sqrt{33}}{10} & 0 \\ 0 & \frac{-3-i\sqrt{33}}{10} \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{i\sqrt{31}}{10} \\ \frac{i\sqrt{31}}{10} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{i\sqrt{31}}{10} \\ -\frac{i\sqrt{31}}{10} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$.

6.8. $A \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. $B \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$C \to \begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & 6i \end{pmatrix}$.

7.9. $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{5}{2} & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -7 & -4 & -5 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8.10. $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i & \frac{3}{4} - \frac{3}{4}i \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i & \frac{3}{4} - \frac{1}{4}i \end{pmatrix}$.

7.

1.11. $i = 2$, $j = 5$, $k = 5$.

2.12. $\det A = 22 - 57i$. $\det B = 32864000$. $\det C = 141$.

3.13. $\det F = 1$. $\det H = 831$.

4.14. -8398080.

5.15. $\det C = 3$. $\det F = 1$.

6.1. $5x^4 - 4x^3 - 37x^2 + 45x - 3$.

7.2. При $x = 0$ ранг матрицы равен 4. При $x = 1$ ранг матрицы равен 4.

8.3. $A^{-1} = \frac{1}{-3+3i}\begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 1 & 3-i \end{pmatrix}$.

$C^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

8.

1.4. Система совместна и имеет единственное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$.

2.5. 1) Система совместна и имеет единственное решение: $x_1 = i$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

2) Система несовместна.

3.6. Система совместна и имеет бесконечно много решений в поле $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{17}{2} - 3\alpha + 5\beta, x_2 = -\frac{9}{2} + \alpha - 2\beta, x_3 = \alpha, x_4 = \beta,$$

где α, β — любые действительные числа.

4.7. Система совместна и имеет бесконечно много действительных решений:

$$x_1 = \frac{39}{2} + 11\alpha, x_2 = 11 + 6\alpha, x_3 = \alpha,$$

где α — любое действительное число.

5.8. Если $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, то система несовместна.

Если $\alpha \notin \{0; 1\}$, то система совместна и имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{\alpha+1}{\alpha}, x_2 = -\frac{2}{\alpha-1}, x_3 = \frac{\alpha+1}{\alpha(\alpha-1)}.$$

6.9. $B = \begin{pmatrix} 3\alpha+\beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, где α, β — любые действительные числа.

9.

1.10. $q(x) = \overline{2}x^2 + \overline{3}$ — неполное частное, $r(x) = \overline{1}x + \overline{1}$ — остаток.

2.11. НОД$(f(x), g(x)) \ni -6 = f(x)(x^2 - 2x + 4) + g(x)(-x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 8x - 7)$.

3.12. $f(2+i) = -135 + 95i$.

4.13. $f(x) = (x+1)^5 + (x+1)^4 - 17(x+1)^3 + 24(x+1)^2 - 6(x+1) + 4$.

5.14. $a = 1$, $b = 6$, $c = 4$.

6.15. $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, $x_3 = \frac{-1-i\sqrt{19}}{2}$, $x_4 = \frac{-1+i\sqrt{19}}{2}$.

7.1. $x_1 = 3 - 2i$, $x_2 = 3 + 2i$, $x_3 = -i$, $x_4 = i$.

8.2. Разложение на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$:

$f(x) = (x-1)(x+3)(x^2+4)$,

$g(x) = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$.

Разложение на неприводимые множители над полем $\mathbb{C}$:

$f(x) = (x-1)(x+3)(x-2i)(x+2i)$,

$g(x) = (x-\sqrt{2}-i\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+i\sqrt{2})(x+\sqrt{2}-i\sqrt{2})(x+\sqrt{2}+i\sqrt{2})$

10.

1.3. $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$.

2.4. $f(x) = -2x^2 + ix - 1$.

3.5. Разложение над полем $\mathbb{R}$ и над полем $\mathbb{C}$:
$F(x) = -\frac{2}{25(x-3)^2} + \frac{9}{125(x-3)} - \frac{7}{25(x+2)^2} - \frac{9}{125(x+2)}$.

4.6. $K(x) = \frac{3}{x^2+4} - \frac{x+12}{(x^2+4)^2}$.

5.7. Разложение над полем $\mathbb{R}$:
$F(X) = -2x + \frac{5x-1}{x^2-3x+3}$,
$G(x) = 1 - \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{18(x+1)} + \frac{8}{3(x-2)^2} + \frac{40}{9(x-2)}$.
Разложение над полем $\mathbb{C}$:
$F(X) = -2x + \frac{\frac{5}{2} - \frac{13\sqrt{3}}{6}i}{x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \frac{\frac{5}{2} + \frac{13\sqrt{3}}{6}i}{x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$,
$G(x) = 1 - \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{18(x+1)} + \frac{8}{3(x-2)^2} + \frac{40}{9(x-2)}$.

Литература

1. Бэйкер А. Введение в теорию чисел. Мн.: Вышэйш. шк. 1995.
2. Боревич З.И. Определители и матрицы. М.: Наука. 1988.
3. Бузланов А.В., Монахов В.С. Лабораторные работы по курсу "Алгебра и теория чисел". Гомель. 1991. – 96 с.
4. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и геометрии. Мн.: Университетское. 1999. – 301 с.
5. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс. 2002. — 544 с.
6. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука. 1972.
7. Глухов М.М. Алгебра и аналитическая геометрия. М.: Гелиос АРВ. 2005. – 392 с.
8. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра. Том I. М.: Гелиос АРВ. 2003. – 336 с.; Том II. – 414 с.
9. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. М.: Физматлит. 2000.
10. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа. 1979. – 560 с.
11. Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. М.: Просвещение. 1993.
12. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука. 1975.
13. Лельчук М.П., Полевченко И.И., Радьков А.М., Чеботаревский Б.Д. Практические занятия по алгебре и теории чисел. Мн.: Выш. шк. 1986. – 302 с.
14. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Мн.: Аламфея. 2001. – 401 с.

15. Михалев А.В., Михалев А.А. Начала алгебры, часть 1. М.: Интернет-университет информационных технологий. 2005– 258 с.
16. Монахов В.С. Определители и системы линейных уравнений. Тексты лекций по курсу "Алгебра и теория чисел". Гомель. 1991. – 56 с.
17. Монахов В.С. Числа и многочлены. Тексты лекций по курсу "Алгебра и теория чисел". Гомель. 1992. – 82 с.
18. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Мн.: Выш. шк. 2006.
19. Радьков А.М., Чеботаревский Б.Д. Алгебра и теория чисел. Мн.: Выш. шк. 1992. – 236 с.
20. Сборник задач по алгебре/ Под ред. Кострикина А.И. М.: Физматлит. 2001.
21. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука. 1984.
22. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука. 1977.
23. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. Мн. Выш. шк. 1982. – 224 с.
24. Шнеперман Л.Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях. В 2 ч.: Ч 1. Мн. Выш. шк. 1986; Ч. 2. Мн. Выш. шк. 1987. – 256 с.

Учебное издание

Бузланов Александр Васильевич
Монахов Виктор Степанович

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Практическое пособие по выполнению лабораторных работ для студентов математических специальностей вузов

В авторской редакции

Лицензия № 02330/0133208 от 30.04.04.

Подписано в печать 12.07.06. Формат 60 × 84 1/16. Бумага писчая № 1. Гарнитура Таймс. Усл. п. л. 10,3. Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 150 экз. Заказ № 39.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"

Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.

246019, г. Гомель, ул. Советская, 104