УДК 539.4:621.6

ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Е. А. ГОЛУБЕВА, М. Ю. БОКИЙ, Р. А. АЛЬ-АБСИ
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Республика Беларусь

Широкое применение композиционных материалов в строительстве и других отраслях машиностроения привело к необходимости изучения задач оптимального проектирования конструкций из композиционных материалов, обладающих вязкоупругими свойствами. В связи с этим наследственная теория вязкоупругости привлекает к себе всё большее внимание исследователей.

Интегральные преобразования, такие как преобразования Лапласа и другие, помогают значительно упростить решение различных дифференциальных и интегральных уравнений, которые возникают в прикладных задачах разных областей математики и механики. В данной работе применение преобразования Лапласа и методов его обращения рассматриваются на примере решения задачи вязкоупругости – нахождения напряжения и деформации вязкоупругих материалов. Важнейшими характеристиками вязкоупругих тел являются ползучесть и релаксация. Так, под ползучестью понимается свойство материалов деформироваться во времени в зависимости от постоянного напряжения. Релаксация – перераспределение напряжения в теле в зависимости от деформации. Связь ползучести и релаксации принято описывать соотношением Больцмана – Вольтерра, которое является обобщением закона Гука.

Наиболее часто для предварительных расчетов используется экспоненциальное ядро релаксации

$$R(t)=\frac{\lambda}{\tau}\exp(-t/\tau)$$

и ползучести

$$K(t)=\frac{\lambda}{\tau}\exp\left(-\frac{1-\lambda}{\tau}\right).$$

Описание процессов деформирования, релаксации и ползучести получены в источнике [1]:

$$\tilde{R}(\tau)=\int_0^{\tau}R(s)ds=\frac{A^*}{\beta^*}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta^*}{\lambda^{\alpha}}\right)^n\frac{\gamma(\alpha n,\lambda\tau)}{\tilde{A}(\alpha n)};$$

$$\tilde{K}(\tau)=\int_0^{\tau}K(s)ds=\frac{A^*}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\lambda^{\alpha}}\right)^n\frac{\gamma(\alpha n,\lambda\tau)}{\Gamma(\alpha n)}.$$

В данной работе использовали обобщенные ядра вида [1]

$$R(\tau)=A^*\tau^{\alpha-1}e^{-\lambda\tau}E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta^*\tau^{\alpha};\alpha);$$

$$K(\tau)=A^*\tau^{\alpha-1}e^{-\lambda\tau}E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta\tau^{\alpha};\alpha),$$

в которые входит функция типа Миттаг-Леффлера $E_{\rho}(x,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})}$, где $\Gamma(x)$ – гамма-функция; μ – произвольный параметр A^*, β, λ, α – реологические параметры.

Значения этих ядер определяются из эксперимента и задаются таблицей чисел, которые соответствуют фиксированным значениям времени. При проведении эксперимента определяются данные для построения кривых ползучести или релаксации. Таблица экспериментальных данных может содержать погрешности измерений [2] (таблица 1).

Таблица 1 – **Значения вязкоупругих компонентов, входящих в формулы для описания явлений ползучести и релаксации построенных на основе экспериментальных данных**

t	$K(t)$	$\int_0^t K(t)dt$	$\Gamma(t)$	$\int_0^t \Gamma(t)dt$	$1+\int_0^t K(t)dt$	$1-\int_0^t \Gamma(t)dt$
0,001	20,867	0,2272	3,911	0,1855	1,2272	0,8145
0,01	2,7021	0,2819	1,6526	0,2204	1,2819	0,7796
0,1	0,3559	0,3535	0,1955	0,2619	1,3535	0,7381
1,0	0,0463	0,4478	0,0222	0,3103	1,4478	0,6897
5,0	$0{,}96\cdot10^{-2}$	0,5255	$0{,}41\cdot10^{-2}$	0,3456	1,5255	0,6544
10,0	$0{,}42\cdot10^{-2}$	0,5570	$0{,}17\cdot10^{-2}$	0,3587	1,5570	0,6413
18,0	$0{,}17\cdot10^{-2}$	0,5786	$0{,}65\cdot10^{-3}$	0,3672	1,5786	0,6328
30,0	$0{,}61\cdot10^{-3}$	0,5912	$0{,}22\cdot10^{-3}$	0,3719	1,5912	0,6281
70,0	$0{,}41\cdot10^{-4}$	0,5993	$0{,}14\cdot10^{-4}$	0,3748	1,5993	0,6252
100,0	$0{,}69\cdot10^{-5}$	0,5959	$0{,}22\cdot10^{-5}$	0,3750	1,5999	0,6250
200,0	$0{,}27\cdot10^{-7}$	0,6000	$0{,}79\cdot10^{-8}$	0,3750	1,6000	0,6250
300,0	$0{,}13\cdot10^{-9}$	0,6000	$0{,}36\cdot10^{-10}$	0,3750	1,6000	0,6250

На основе свойств резольвентных операторов для ядер интегральных уравнений предложен метод построения решения задач вязкоупругости путем прямого использования экспериментальных данных, заданных таблично. Приведена таблица значений ядер и резольвент, а также интегралов о них, необходимых для построения численных значений решений краевых задач теории вязкоупругости. Также был разработан алгоритм и создана программа в среде Delphi, используя метод минимизации функции без ограничений прямым поиском по Хуку и Дживсу для экспоненциальной функции (рисунок 1). Значения, полученные в программе, сравнивались со значениями таблицы 1. Тестирование программы осуществлялось в сравнении с результатами других исследователей. Предлагаемые подходы могут быть использованы в строительстве, а также машиностроении и других отраслях промышленности.

Рисунок 1 – График экспоненциальной функции

Список литературы

1 **Можаровский, В. В.** Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск,1988. – 271 с.

2 **Кристенсен, Р.** Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен – М. : Мир, 1974. – 338 с.

УДК 539.3

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ С УЧЁТОМ ПЕРЕКРЁСТНОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

С. А. ДАВЫДОВ, А. В. ЗЕМСКОВ, А. Д. ФЕДОРОВА
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Существует ряд подходов к созданию математических моделей механики сплошных сред. Одним из перспективных направлений, дающих возможность наиболее точно описать поведение среды, является моделирование связанных полей различной природы. Примером такой связанности является модель термоупругости с учётом перекрёстной диффузии. Она позволяет описать взаимное влияние поля перемещений и поля температур, учитывая при этом изменение поля концентраций вещества в упругом теле. Большинство имеющихся моделей термоупругости с учётом диффу-