

# ЯРКОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЛЬЕФНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ПЛОСКОСТИ

С. П. Мезенцев, Г. К. Холопов и Ю. А. Шуба

Рассматривается задача по расчету яркости и освещенности в различных точках плоскости и лежащего на ней выпуклого тела, освещаемых внешними источниками света.

Для оценки контрастных характеристик рельефных объектов, наблюдаемых на отражающей плоскости, представляет интерес распределение яркости по объекту и плоскости, соответствующее определенным

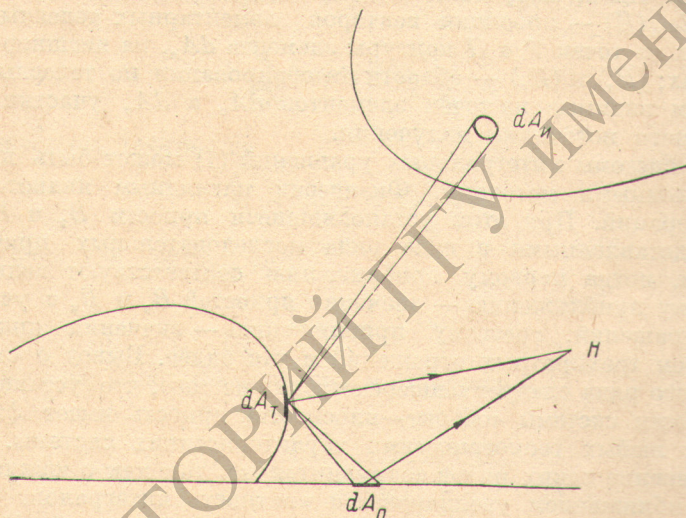


Рис. 1. Система «выпуклое тело—плоскость», освещаемая внешними источниками света.

$T$  — выпуклое тело,  $\Pi$  — плоскость,  $I$  — источники подсветки,  $H$  — направление наблюдения.

условиям освещения системы «объект—плоскость» и условиям наблюдения. Это распределение яркости формируется как прямым световым потоком внешних для данной системы источников излучения, так и световыми потоками обмена излучением между объектом и плоскостью.

Рассмотрим выпуклое тело произвольной формы, лежащее на плоскости (рис. 1). Выделим на поверхности тела элемент  $dA_T$ , включающий точку  $T$ , а на плоскости — элемент  $dA_{\Pi}$ , включающий точку  $\Pi$ . Для рассматриваемой системы яркости указанных элементов в направлении наблюдателя  $H$  определяются выражениями, следующими из [1] (стр. 212)

$$\left. \begin{aligned} B_T(H) &= B'_T(H) + \int_{(\Pi)} B_{\Pi}(T) \beta_T(\Pi, H) df_{\Pi}(\Pi), \\ B_{\Pi}(H) &= B'_{\Pi}(H) + \int_{(T)} B_T(\Pi) \beta_{\Pi}(T, H) df_T(T). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь соответственно  $B_{\pi}(T)$  и  $B_{\pi}(\Pi)$  — установившиеся в результате многократных отражений яркости элемента  $dA_{\pi}$  в направлении к элементу  $dA_{\pi}$  и элемента  $dA_{\pi}$  в направлении к элементу  $dA_{\pi}$ ;  $\beta_{\pi}(T, H)$  и  $\beta_{\pi}(\Pi, H)$  — коэффициенты яркости в направлении к  $H$  элемента  $dA_{\pi}$  при освещении с направления от  $dA_{\pi}$  и элемента  $dA_{\pi}$  при освещении с направления от  $dA_{\pi}$ ;  $df_{\pi}(H)$  и  $df_{\pi}(T)$  — элементарные угловые коэффициенты связи ([1], стр. 62) равномерно диффузно отраженных потоков, равные соответственно  $(1/\pi)d\omega_{\pi}(H)$  и  $(1/\pi)d\omega_{\pi}(T)$ , где  $d\omega_{\pi}(H)$  и  $d\omega_{\pi}(T)$  — проекции векторов элементарных телесных углов ([2], стр. 360), стягивающих из точки  $T$  контуры  $dA_{\pi}$  и из точки  $\Pi$  контуры  $dA_{\pi}$ , на внешние нормали в точках  $T$  и  $\Pi$ ;  $(H)$  и  $(T)$  — области интегрирования по телесным углам, стягивающим видимые из точек  $T$  и  $\Pi$  участки поверхности соответственно плоскости и тела;  $B'_{\pi}(H)$  и  $B'_{\pi}(H)$  — яркости элементов  $dA_{\pi}$  и  $dA_{\pi}$  в направлении к  $H$ , создаваемые прямым потоком от внешних источников излучения,

$$\left. \begin{aligned} B'_{\pi}(H) &= \frac{1}{\pi} \int_{(H_{\pi})} B_{\pi}(T) \beta_{\pi}(H, H) d\omega_{\pi}(H), \\ B'_{\pi}(H) &= \frac{1}{\pi} \int_{(H_{\pi})} B_{\pi}(\Pi) \beta_{\pi}(H, H) d\omega_{\pi}(H), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $B_{\pi}(T)$  и  $B_{\pi}(\Pi)$  — яркости некоторого элемента  $dA_{\pi}$  на поверхности внешнего источника излучения в направлении элементов  $dA_{\pi}$  и  $dA_{\pi}$ ;  $d\omega_{\pi}(H)$  и  $d\omega_{\pi}(H)$  — проекции векторов элементарных телесных углов, стягивающих из точек  $T$  и  $\Pi$  контуры элемента  $dA_{\pi}$ , на внешние нормали в этих точках;  $(H_{\pi})$  и  $(H_{\pi})$  — области интегрирования по телесным углам, стягивающим видимые из точек элементов  $dA_{\pi}$  и  $dA_{\pi}$  участки поверхности внешнего источника излучения.

Решение системы интегральных уравнений (1) может быть выполнено только численными методами. Физически наглядным является метод простых итераций. При этом установившиеся яркости  $B_{\pi}$  и  $B_{\pi}$  оказываются представленными в виде ряда последовательных приближений такого вида, когда первому приближению соответствуют величины  $B'_{\pi}$  и  $B'_{\pi}$ , второму приближению — значения яркостей  $B_{\pi}$  и  $B_{\pi}$  с учетом двукратных отражений, третьему приближению — значения яркостей  $B_{\pi}$  и  $B_{\pi}$  с учетом трехкратных отражений и так далее. Вывод о сходимости итерационного ряда следует непосредственно из того, что установившаяся по поверхности системы «объект—плоскость» яркость имеет физический предел при любых геометрических характеристиках системы. Практически применение таких рядов затруднительно, так как с каждым последующим приближением увеличивается кратность интегралов, входящих в выражения для их членов. Решение системы уравнений (1) в общем виде затруднено тем, что угловые зависимости коэффициентов яркости  $\beta_{\pi}$  и  $\beta_{\pi}$ , как правило, не могут быть заданы аналитически. Поэтому решение рассматриваемой задачи обычно проводится в приближении равномерно диффузного отражения излучения от тела и плоскости, а также независимости их коэффициентов отражения  $\rho_{\pi}$  и  $\rho_{\pi}$  от угла падения [3, 4].

Рассмотрим в этом приближении конкретную задачу расчета распределения яркости по поверхности выпуклого тела и плоскости при их равномерно диффузном полусферическом освещении. Для удобства проведения расчетов и анализа результатов систему уравнений (1) целесообразно переписать применительно к освещенностям соответствующих элементов, принимая равной единице светимость равномерной полусферы

$$\left. \begin{aligned} E_{\pi} &= \frac{1}{\pi} \left[ \omega_{\pi} + \rho_{\pi} \int E_{\pi} d\omega_{\pi}(H) \right], \\ E_{\pi} &= \frac{1}{\pi} \left[ \omega_{\pi} + \rho_{\pi} \int E_{\pi} d\omega_{\pi}(T) \right], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где соответственно  $E_{\pi} = \pi B_{\pi}/\rho_{\pi}$  и  $E_{\pi} = \pi B_{\pi}/\rho_{\pi}$  — освещенности элементов  $dA_{\pi}$  и  $dA_{\pi}$ ;  $\omega_{\pi}$  и  $\omega_{\pi}$  — проекции векторов телесных углов, заполняемых

в точках  $T$  и  $\Pi$  видимыми из них частями светящей полусферы, на внешние нормали в этих точках.

Решение системы уравнений (3) может быть записано в виде следующих рядов:

$$\left. \begin{aligned} E_T &= f_{T1} + \rho_{\Pi} \{f_{T2} + \rho_T [f_{T3} + \rho_{\Pi} (f_{T4} + \dots)]\}, \\ E_{\Pi} &= f_{\Pi 1} + \rho_T \{f_{\Pi 2} + \rho_{\Pi} [f_{\Pi 3} + \rho_T (f_{\Pi 4} + \dots)]\}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Коэффициенты рядов  $f_{Ti}$  и  $f_{\Pi j}$  удовлетворяют условию нормировки вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{Ti} = \sum_{j=1}^{\infty} f_{\Pi j} = 1, \quad (5)$$

так как при  $\rho_T = \rho_{\Pi} = 1$  система уравнений (3) имеет тривиальное решение  $E_T = E_{\Pi} = 1$  (поглощение излучения на элементах такой отражающей системы отсутствует).

Из того обстоятельства, что бесконечные ряды (5) угловых коэффициентов сходятся к единице, следует, что с возрастанием количества учитываемых отражений, начиная с некоторых  $i = N_i$ ,  $j = N_j$ , члены этих рядов быстро убывают. Известно, например, что при многократных отражениях внутри сферической полости убывание членов соответствующего ряда происходит по геометрической прогрессии с некоторым показателем  $k$  (начиная с первого члена [5]). Используя допущение, что такое убывание имеет место и в рассматриваемом случае, т. е.  $N_i = N_j = 1$ , получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{Ti} = \frac{f_{T1}}{1 - k_T} = 1, \quad (6)$$

откуда показатель прогрессии

$$k_T = 1 - f_{T1} = 1 - \frac{\omega_T}{\pi}. \quad (7)$$

Аналогично для другого ряда

$$k_{\Pi} = 1 - f_{\Pi 1} = 1 - \frac{\omega_{\Pi}}{\pi}. \quad (7')$$

Суммирование рядов (4) приводит к результатам

$$E_T = \frac{\omega_T}{\pi} \frac{1 + \rho_{\Pi} \left(1 - \frac{\omega_{\Pi}}{\pi}\right)}{1 - \rho_T \rho_{\Pi} \left(1 - \frac{\omega_{\Pi}}{\pi}\right)^2} \quad (8)$$

и

$$E_{\Pi} = \frac{\omega_{\Pi}}{\pi} \frac{1 + \rho_T \left(1 - \frac{\omega_T}{\pi}\right)}{1 - \rho_T \rho_{\Pi} \left(1 - \frac{\omega_{\Pi}}{\pi}\right)^2}. \quad (8')$$

Подстановка решений (8) и (8') в исходное интегральное уравнение (3) приводит к следующим выражениям:

$$E_T = \frac{\omega_T}{\pi} + \rho_{\Pi} \int_{(\Pi)} \frac{\frac{\omega_{\Pi}}{\pi} \left[1 + \rho_T \left(1 - \frac{\omega_{\Pi}}{\pi}\right)\right] \frac{d\omega_{\Pi}(\Pi)}{\pi}}{1 - \rho_T \rho_{\Pi} \left(1 - \frac{\omega_{\Pi}}{\pi}\right)^2} \quad (9)$$

и

$$E_{\Pi} = \frac{\omega_{\Pi}}{\pi} + \rho_T \int_{(T)} \frac{\frac{\omega_T}{\pi} \left[1 + \rho_{\Pi} \left(1 - \frac{\omega_T}{\pi}\right)\right] \frac{d\omega_T(T)}{\pi}}{1 - \rho_T \rho_{\Pi} \left(1 - \frac{\omega_T}{\pi}\right)^2}. \quad (9')$$

Выражения (8) и (8'), (9) и (9') являются приближенными решениями системы интегральных уравнений (3) с учетом всего вклада многократных отражений.

На рис. 2—4 приведены результаты расчетов распределений освещенности по поверхности аксиально симметричных систем следующего вида: «полусфер—плоскость», «цилиндр—плоскость», «конус—плоскость» и «шар—плоскость». Высоты цилиндра и конуса в рассматриваемом примере равны  $\pi R/2$ , где  $R$  — радиусы соприкасающихся с плоскостью оснований. Значения освещенностей в точках  $T$  и  $\Pi$  тела и плоскости отложены вдоль оси ординат, значения аргументов  $\beta$  (или  $h$ ) и  $\alpha$ , однозначно

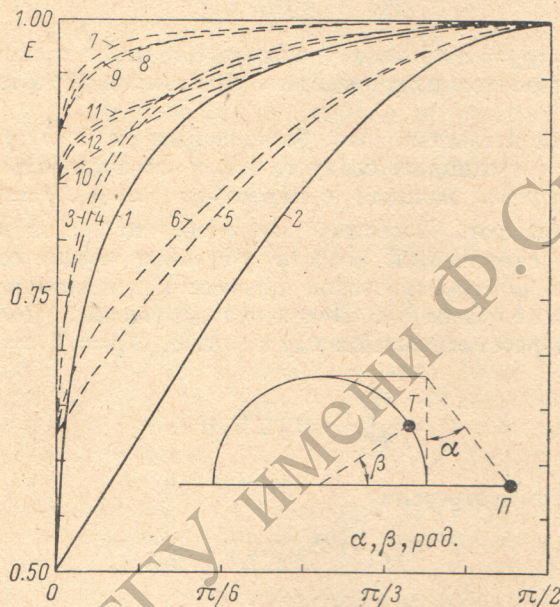


Рис. 2. Распределение освещенности по поверхности системы «полусфер—плоскость».

1, 3, 4, 7, 8, 9 — по плоскости; 2, 5, 6, 10, 11, 12 — по полусфере; 1, 2 —  $\rho_T = \rho_\Pi = 0$ ; 3, 4, 5, 6 —  $\rho_T = \rho_\Pi = 0.4$ ; 7, 8, 9, 10, 11, 12 —  $\rho_T = 0.9$  и  $\rho_\Pi = 0.8$ ; 1, 2, 3, 5, 7, 10 — расчет по (8) и (8'); 1, 2, 4, 6, 8, 11 — расчет по (9) и (9'); 1, 2, 4, 6, 9, 12 — расчет по (4) на ЭВЦМ.

определяющих положения точек соответственно  $T$  и  $\Pi$  (схемы приведены на рисунках), вдоль оси абсцисс.

Представленные результаты подтверждают заключение ([<sup>2</sup>], стр. 422) о том, что возмущения, вносимые телом, распространяются на значительные по сравнению с максимальным линейным размером тела расстояния по плоскости, и в то же время свидетельствуют о значительности вклада многократных отражений в световое поле системы вблизи тела. Причем для построения общей картины учета лишь двукратных отражений, как это предлагалось ранее [<sup>3, 4</sup>], оказывается недостаточно. В областях, соответствующих значениям  $h \leq 1$  и  $\alpha \leq \pi/4$ , вклад многократных отражений особенно велик. В большинстве случаев распределение освещенности по поверхности системы «тело—плоскость», а следовательно, и яркости с практически достаточной точностью описывается выражениями (8) и (8'), которые в точках соприкосновения тела с плоскостью являются точными и в частном случае  $\rho_T = \rho_\Pi$  согласуются с известным выражением для двугранного угла [<sup>6</sup>]. Вместе с тем для более точных расчетов в некоторых случаях может оказаться целесообразным использование выражений (9) и (9').

При проведении расчетов по (8) и (8'), (9) и (9') следует иметь в виду следующее обстоятельство. Вывод этих выражений основан на том предположении, что ряды коэффициентов  $f_{Ti}$  и  $f_{\Pi j}$  представляют собой гео-

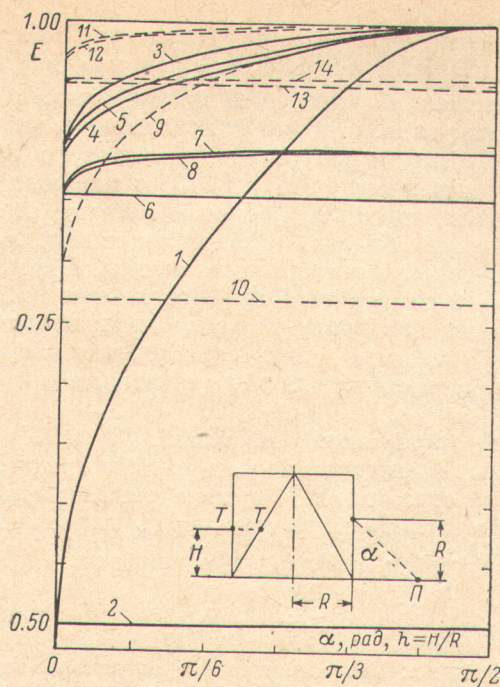


Рис. 3. Распределение освещенности по поверхности системы «цилиндр—плоскость» (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) и «конус—плоскость» (9, 10, 11, 12, 13, 14).

1, 2, 9, 10 —  $\rho_T = \rho_P = 0$ ; 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14 —  $\rho_T = 0.9$  и  $\rho_P = 0.8$ ; 1, 2, 3, 6, 9, 10, 11, 13 — расчет по (8) и (8'); 1, 2, 4, 7, 9, 10, 12, 14 — расчет по (9) и (9'); 1, 2, 5, 8, 9, 10, 12, 14 — расчет по (4) на ЭВЦМ.

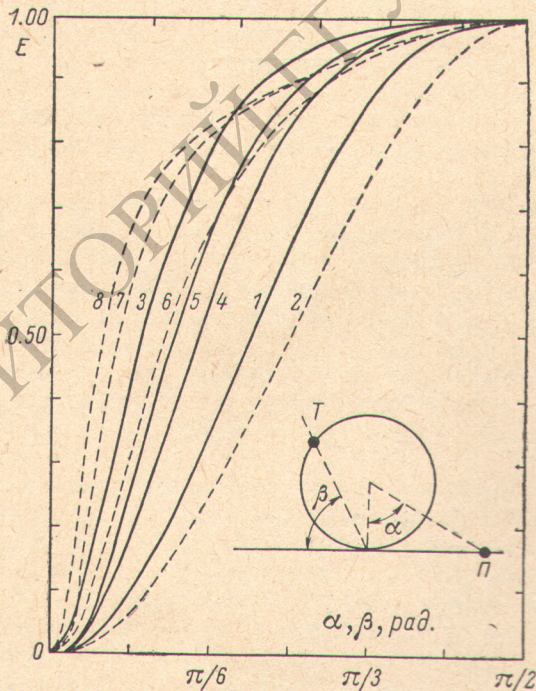


Рис. 4. Распределение освещенности по поверхности системы «шар—плоскость».

1, 3, 4, 5 — по плоскости; 2, 6, 7, 8 — по шару; 1, 2 —  $\rho_T = \rho_P = 0$ ; 3, 4, 5, 6, 7, 8 —  $\rho_T = 0.9$  и  $\rho_P = 0.8$ ; 1, 2, 3, 6 — расчет по (8) и (8'); 1, 2, 4, 7 — расчет по (9) и (9'); 1, 2, 5, 8 — расчет по (4) на ЭВЦМ.

метрические прогрессии. Как уже отмечалось, это имеет место для внутренней поверхности сферы, когда  $f_{Ti}$  и  $f_{Tj}$  не зависят от координат, характеризующих положения точек  $T$  и  $\Pi$  на поверхности системы, а также в вершинах телесных углов, которые являются точками соприкосновения тела и плоскости. Сравнение результатов расчетов по (8) и (8') и результатов, полученных решением уравнений (3) с помощью ЭВМ, показывает, что в тех точках, где  $f_{T1}$  и  $f_{T1}$  сильно зависят от соответствующих координат (например, в областях вблизи точки соприкосновения сферы с плоскостью), погрешности относительно велики. Однако применительно к задачам расчетов интегральных по поверхности контрастных характеристик объектов на плоскости использование выражений (8) и (8') оказывается целесообразным и в этих случаях, так как площади наблюдаемых проекций зон, соответствующих максимальным погрешностям, всегда невелики.

Значительным преимуществом выражений (8) и (8') является то, что их вывод произведен безотносительно каких-либо предположений о форме тела. Единственным ограничением в этом смысле является требование его выпуклости. Это позволяет рекомендовать выражения (8) и (8') для практического применения.

#### Литература

- [1] Р. А. Сапожников. Теоретическая фотометрия. «Энергия», Л., 1967.
- [2] А. А. Гершун. Избранные труды по фотометрии и светотехнике. Физматгиз, М., 1958.
- [3] М. М. Гуторов, Е. А. Никитина. Светотехника, № 4, 18, 1967.
- [4] Е. А. Никитина. Светотехника, № 10, 24, 1967.
- [5] С. П. Детков. Светотехника, № 11, 25, 1963.
- [6] F. J. Kelly. Appl. Opt., 5, 925, 1966.

Поступило в Редакцию 20 августа 1975 г.  
В окончательной редакции 3 мая 1977 г.