

УДК 512.542

О ПОСТРОЕНИИ π -КЛАССОВ ШУНКА КОНЕЧНЫХ π -РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ON THE CONSTRUCTION OF π -SCHUNK CLASSES OF FINITE π -SOLUBLE GROUPS

T.I. Vasil'eva, A.I. Prokopenko

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

В работе приведена серия π -разрешимых нормализаторных подгрупповых функторов. Построены новые примеры π -классов Шунка конечных π -разрешимых групп.

Ключевые слова: конечная группа, π -разрешимая группа, π -класс Шунка, нормализаторный подгрупповой функтор.

A series of π -soluble normalizer subgroup functors is given in this work. New examples of π -Schunk classes of finite π -soluble groups are constructed.

Keywords: finite group, π -soluble group, π -Schunk class, normalizer subgroup functor.

Введение

Подгрупповые функторы, т. е. функции, согласованные с изоморфизмами групп и выделяющие в группах некоторые системы подгрупп, тесно связаны с классами групп. В монографии [1] А.Н. Скибой метод подгрупповых функторов применен для изучения свойств локальных формаций, замкнутых относительно систем подгрупп, выделяемых подгрупповыми функторами. С.Ф. Каморниковым и М.В. Селькиным в [2] подгрупповые функторы использовались для нахождения свойств классов Шунка.

Важную роль среди подгрупповых функторов играют транзитивные регулярные подгрупповые функторы, простейшими из которых являются функторы, выделяющие в каждой конечной группе G множество $S(G)$ всех ее подгрупп; множество $sl(G)$ всех ее субнормальных подгрупп; множество $\{G\}$.

В работе [3] было предложено функторное обобщение введенного Манном [4] понятия X -нормальной подгруппы конечной группы. Приведенная в [3] новая серия транзитивных регулярных подгрупповых функторов, а именно: нормализаторных – была использована для построения в разрешимых группах классов Шунка.

В настоящей работе найдены π -разрешимые нормализаторные подгрупповые функторы, с помощью которых в π -разрешимых группах строятся π -классы Шунка.

1 Предварительные результаты

Рассматриваются только конечные группы.

Используются обозначения и определения из [5], [6]. Через π обозначается некоторое

множество простых чисел, π' – дополнение к π во множестве всех простых чисел, \mathfrak{S}^π – класс всех π -разрешимых групп. Пусть \mathfrak{X} – класс групп. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{X} -проектором группы G , если HN/N является максимальной \mathfrak{X} -подгруппой в G/N для любой нормальной подгруппы N из G . Класс Шунка – это непустой гомоморф \mathfrak{X} , для которого из условия $G/Co_G(M) \in \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы M из G всегда следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Класс групп \mathfrak{X} называется π -классом, если из $G/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}$ следует, что $G \in \mathfrak{X}$.

Отображение τ , которое ставит в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп, называется подгрупповым функтором [2], если $(\tau(G))^\alpha = \tau(G^\alpha)$ для любого изоморфизма α группы G . Подгрупповой функтор τ называется [2]: 1) транзитивным, если из $S \in \tau(H)$ и $H \in \tau(G)$ следует, что $S \in \tau(G)$ для любой группы G ; 2) регулярным, если $(\tau(A))^\phi \subseteq \tau(B)$ и $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$ для любого эпиморфизма $\phi: A \rightarrow B$.

Определение 1.1 [3]. Пусть τ – подгрупповой функтор. Подгруппа R группы G называется τ -нормализатором подгруппы H в G (обозначается $N_G^\tau(H)$), если выполняются следующие условия:

- 1) $H \in \tau(R)$;

2) для подгруппы L группы G из $H \in \tau(L)$ всегда следует $L \subseteq R$.

Подгрупповой функтор τ называется нормализаторным [3], если всякая подгруппа группы G обладает τ -нормализатором в G .

Заметим, если $\tau = Sn$ – нормальный подгрупповой функтор, т. е. подгрупповой функтор, который в каждой группе выделяет все ее нормальные подгруппы, то всякая подгруппа группы обладает τ -нормализатором, так как в этом случае $N_G^{Sn}(H) = N_G(H)$. Если $\tau = sn$ – субнормальный подгрупповой функтор, т. е. подгрупповой функтор, который в каждой группе выделяет все ее субнормальные подгруппы, то существуют не обладающие sn -нормализаторами подгруппы группы [7].

Лемма 1.2 [3, лемма 1]. Пусть τ – подгрупповой функтор, H – подгруппа группы G . Тогда $N_G^\tau(H^\alpha) = (N_G^\tau(H))^\alpha$ для любого изоморфизма α группы G .

Определение 1.3 [3]. Пусть τ – подгрупповой функтор. Подгруппа H группы G называется X_τ -нормальной в G , если либо $H = G$, либо для любого эпиморфизма φ группы G такого, что $H^\varphi \neq G^\varphi$, в G^φ найдется собственная подгруппа, содержащая H^φ и принадлежащая $\tau(G^\varphi)$.

Через τ^* обозначается отображение, которое ставит в соответствие каждой группе G множество $\tau^*(G)$ всех X_τ -нормальных в G подгрупп.

Лемма 1.4 [3, лемма 2]. Пусть τ – подгрупповой функтор и G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) τ^* – подгрупповой функтор;
- 2) если τ_1 – подгрупповой функтор и $\tau_1(G) \subseteq \tau(G)$, то $\tau_1^*(G) \subseteq \tau^*(G)$;
- 3) если $(\tau(G))^\varphi \subseteq \tau(G^\varphi)$ для любого эпиморфизма φ группы G , то $\tau(G) \subseteq \tau^*(G)$.

Лемма 1.5 [3, лемма 3]. Пусть τ – регулярный подгрупповой функтор и N – нормальная подгруппа группы G . Тогда:

- 1) если H и R – подгруппы группы G такие, что $H \subseteq R$ и $H \in \tau^*(R)$, то $HN/N \in \tau^*(RN/N)$;
- 2) если $N \subseteq H$ и $H/N \in \tau^*(G/N)$, то $H \in \tau^*(G)$.

Лемма 1.6 [3, лемма 4]. Если τ – регулярный подгрупповой функтор, то τ^* – транзитивный регулярный подгрупповой функтор.

2 Построение π -классов Шунка в π -разрешимых группах

Лемма 2.1. Пусть τ – регулярный подгрупповой функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если подгруппа H группы G обладает τ -нормализатором и τ^* -нормализатором, то $N_G^\tau(H) \subseteq N_G^{\tau^*}(H)$;

2) если M – максимальная подгруппа группы G и $M \notin \tau(G)$, то $M = N_G^{\tau^*}(M)$.

Доказательство. 1) следует из леммы 1.4 и определения 1.1 ввиду того, что $H \subseteq N_G^{\tau^*}(H)$.

Установим справедливость 2). Так как по лемме 1.6 τ^* – регулярный подгрупповой функтор, то $M \in \tau^*(M)$.

Если $M \in \tau^*(L)$ для подгруппы L группы G , то из $M \subseteq L$ и максимальной M в G получаем, что либо $L = M$, либо $L = G$. Случай $L = G$ невозможен, так как тогда из определения 1.3 следовало бы, что $M \in \tau(G)$. Таким образом, $L = M$ и $M = N_G^{\tau^*}(M)$. Лемма доказана.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Будем говорить, что подгрупповой функтор τ обладает π -свойством, если для любой подгруппы H группы G из условия $H \cdot O_\pi(G) \in \tau(G)$ всегда следует, что H обладает τ^* -нормализатором.

Подгрупповой функтор, рассматриваемый на π -разрешимых группах, называется π -разрешимым подгрупповым функтором.

Теорема 2.2. Пусть π -разрешимый регулярный подгрупповой функтор τ обладает π -свойством. Тогда τ^* – π -разрешимый нормализаторный транзитивный регулярный подгрупповой функтор.

Доказательство. По лемме 1.6 τ^* – транзитивный регулярный подгрупповой функтор.

Пусть G – π -разрешимая группа наименьшего порядка такая, что в ней существует подгруппа H , которая не обладает τ^* -нормализатором в G . Если H – X_τ -нормальна в G , то $H \in \tau^*(G)$ и $G = N_G^{\tau^*}(H)$. Получаем противоречие. Поэтому H не является X_τ -нормальной в G .

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда $G/N \in \mathfrak{S}^\pi$ и HN/N обладает τ^* -нормализатором в G/N по выбору G . Обозначим $K/N = N_{G/N}^{\tau^*}(HN/N)$.

Предположим, что $K \neq G$. Если $K/N \in \tau^*(G/N)$, то $HN/N \in \tau^*(G/N)$ ввиду транзитивности τ^* . По определению 1.1 $G/N \subseteq K/N$. Тогда $G = K$. Получили противоречие. Поэтому $K/N \notin \tau^*(G/N)$. Тогда существует эпиморфизм φ группы G/N такой, что

$(K/N)^\varphi \neq (G/N)^\varphi$ и $(G/N)^\varphi$ не имеет собственных подгрупп, которые принадлежат $\tau((G/N)^\varphi)$ и содержат $(K/N)^\varphi$. Обозначим $\text{Ker } \varphi = D/N$. Ясно, что $KD \neq G$. Из $KD \in \mathfrak{S}^\pi$ следует существование $N_{KD}^{\tau^*}(H)$. Рассмотрим любую подгруппу L из G такую, что $H \in \tau^*(L)$. По 1) леммы 1.5 $HN/N \in \tau^*(LN/N)$. Из $K/N = N_{G/N}^{\tau^*}(HN/N)$ по определению 1.1 следует, что $LN/N \subseteq K/N$. Значит, $L \subseteq K \subseteq KD$. Отсюда и из $H \in \tau^*(L)$ вытекает $L \subseteq N_{KD}^{\tau^*}(H)$. Тем самым показано, что $N_{KD}^{\tau^*}(H) = N_G^{\tau^*}(H)$, что противоречит выбору H .

Пусть $K = G$. Тогда $HN/N \in \tau^*(G/N)$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G . Возможны два случая.

1. Существуют минимальные нормальные подгруппы N группы G , для которых $G/N \neq HN/N$. Пусть ψ – эпиморфизм группы G такой, что $H^\psi \neq G^\psi$ и $\text{Ker } \psi = S$. Тогда $HS/S \neq G/S$. Выберем в S минимальную нормальную подгруппу R группы G . Очевидно, что $HR/R \neq G/R$. Так как функтор τ^* является регулярным и $HR/R \in \tau^*(G/R)$ получаем, что $HS/S \in \tau^*(G/S)$. Таким образом, в G/S найдется собственная подгруппа, которая принадлежит $\tau(G/S)$ и содержит HS/S . Следовательно, $H \in \tau^*(G)$, т. е. $G = N_G^{\tau^*}(H)$. Получили противоречие с выбором H .

2. Для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G фактор-группа $G/N = HN/N$. Так как $H \neq G$, то H содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G и $G = MN$. Заметим, что $\text{Core}_G(M) = 1$.

Так как G – π -разрешимая группа и N – ее минимальная нормальная подгруппа, то N является либо π' -группой, либо абелевой p -группой для некоторого простого числа $p \in \pi$.

Если N – π' -группа, то $N \subseteq O_{\pi'}(G)$ и $H \cdot O_{\pi'}(G) = G \in \tau(G)$. Так как τ обладает π -свойством, в G существует τ^* -нормализатор подгруппы H . Это противоречит выбору H .

Пусть теперь N является абелевой p -группой. Тогда $M \cap N = 1$ и $G = MN = HN$. Из $M = H$ по 2) леммы 2.1 следует противоречие с выбором H . Теорема доказана.

Теорема 2.3. Пусть π -разрешимый регулярный подгрупповой функтор τ обладает π -свойством. Если H – подгруппа π -разрешимой группы G и $N \trianglelefteq G$, то

$$N_{G/N}^{\tau^*}(HN/N) = N_G^{\tau^*}(H)N/N.$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по $|G|$. Обозначим $K = N_G^{\tau^*}(H)$ и $D/N = N_{G/N}^{\tau^*}(HN/N)$, они существуют по теореме 2.2. Из $H \in \tau^*(K)$ и 1) леммы 1.5 следует, что $HN/N \in \tau^*(KN/N)$. Тогда $KN/N \subseteq D/N$.

Покажем, что $D/N \subseteq KN/N$.

Пусть $D/N \neq G/N$. Так как $D \in \mathfrak{S}^\pi$, по индукции $N_{D/N}^{\tau^*}(HN/N) = N_D^{\tau^*}(H)N/N$. По 1) определения 1.1 $HN/N \in \tau^*(D/N)$. Из 2) определения 1.1 следует, что $D/N \subseteq N_{D/N}^{\tau^*}(HN/N)$. Откуда $D/N = N_{D/N}^{\tau^*}(HN/N)$. Из $H \in \tau^*(N_D^{\tau^*}(H))$ следует, что $N_D^{\tau^*}(H) \subseteq K$. Таким образом,

$$D/N = N_D^{\tau^*}(H)N/N \subseteq KN/N.$$

Пусть теперь $D = G$. В этом случае $HN/N \in \tau^*(G/N)$. Если $H \in \tau^*(G)$, то $K = N_G^{\tau^*}(H) = G$. Отсюда $D/N = KN/N$. Допустим, что $H \notin \tau^*(G)$. Тогда $H \neq G$ и найдется эпиморфизм φ группы G такой, что $H^\varphi \neq G^\varphi$ и H^φ не содержится ни в одной собственной подгруппе группы G^φ , которая принадлежит $\tau(G^\varphi)$. Обозначим $\text{Ker } \varphi = R$. Тогда $HR/R \neq G/R$ и в G/R нет собственных подгрупп, содержащих HR/R и принадлежащих $\tau(G/N)$. Из того, что $HN/N \in \tau^*(G/N)$ и τ^* является регулярным подгрупповым функтором, заключаем, что

$$HN/N \cdot RN/N / RN/N \in \tau^*(G/N / RN/N).$$

Если $HNR \neq G$, то в $G/N / RN/N$ найдется собственная подгруппа $L/N / RN/N$, которая содержит $HN/N \cdot RN/N / RN/N$, причем $L/N / RN/N \in \tau(G/N / RN/N)$. Тогда $L \in \tau(G)$, откуда $L/R \in \tau(G/R)$. Получили противоречие с выбором φ , так как $HR/R \subseteq L/R \neq G/R$.

Значит, $HNR = G$. Пусть $B = HR$. Так как $HN/N \in \tau^*(G/N)$, то $BN/N = N_{BN/N}^{\tau^*}(HN/N)$. Пусть α – такой изоморфизм, что $(B/B \cap N)^\alpha = BN/N$. Тогда $(H(B \cap N)/B \cap N)^\alpha = HN/N$. По индукции подгруппа $N_{B/B \cap N}^{\tau^*}(H(B \cap N)/B \cap N) = N_B^{\tau^*}(H)(B \cap N)/B \cap N$. Для $B_1 = N_B^{\tau^*}(H)$ получаем, что $(B_1(B \cap N)/B \cap N)^\alpha = B_1N/N$. По лемме 1.2 $N_{BN/N}^{\tau^*}(HN/N) = B_1N/N$. Следовательно, $BN/N = B_1N/N$. Так как $H \in \tau^*(B_1)$, то $B_1 \subseteq K$.

Тогда $G/N = B_1N/N \subseteq KN/N$, т. е. $D/N = KN/N$. Теорема доказана.

Пусть \mathfrak{X} – непустой класс групп, состоящий из π -разрешимых групп, и τ – π -разрешимый подгрупповой функтор. Обозначим класс групп

$$\mathfrak{X}^\tau = \{G \in \mathfrak{S}^\pi \mid H \in \tau(G) \text{ для любого } \mathfrak{X}\text{-проектора } H \text{ группы } G\}.$$

Теорема 2.4. Пусть \mathfrak{X} – π -класс Шунка, состоящий из π -разрешимых групп, и π -разрешимый регулярный подгрупповой функтор τ обладает π -свойством. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) \mathfrak{X}^τ является π -классом Шунка;
- 2) если G – π -разрешимая группа и H – ее \mathfrak{X} -проектор, то $N_G^\tau(H)$ является \mathfrak{X}^τ -проектором группы G .

Доказательство. Покажем 1). Из леммы 1.5 вытекает, что класс \mathfrak{X}^τ является гомоморфом.

Пусть G – π -разрешимая группа и $G/\text{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}^\tau$ для любой максимальной подгруппы M из G . По теореме 2.2 для любого \mathfrak{X} -проектора H группы G существует $N_G^\tau(H)$.

Обозначим $K = N_G^\tau(H)$. Очевидно, что $K \in \mathfrak{X}^\tau$. Пусть $K \subseteq L \subseteq G$ и $L \in \mathfrak{X}^\tau$. Так как $G \in \mathfrak{S}^\pi$ и \mathfrak{X} – π -класс Шунка, из $H \subseteq L$ следует, что H является \mathfrak{X} -проектором подгруппы L . Значит, $H \in \tau^*(L)$. По определению 1.1 $L \subseteq K$. Следовательно, $K = L$ и K является максимальной \mathfrak{X}^τ -подгруппой группы G .

Пусть N – произвольная нормальная подгруппа группы G . По теореме 2.3

$$N_{G/N}^\tau(HN/N) = KN/N.$$

Отсюда и по доказанному выше следует, что KN/N – максимальная \mathfrak{X}^τ -подгруппа группы G/N . Значит, K является \mathfrak{X}^τ -проектором группы G .

Тогда из $K \cdot \text{Core}_G(M) = G$ для любой максимальной подгруппы M из G вытекает, что $G = K \in \mathfrak{X}^\tau$. Итак, \mathfrak{X}^τ – класс Шунка.

Покажем, что \mathfrak{X}^τ является π -классом. Пусть $G/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}^\tau$. Возьмем произвольный \mathfrak{X} -проектор H группы G . Тогда $HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G)$ является \mathfrak{X} -проектором факторгруппы $G/O_{\pi'}(G)$.

Так как $G/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}^\tau$ то

$$HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G) \in \tau^*(G/O_{\pi'}(G)).$$

Поскольку $HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}$ и

$$O_{\pi'}(G) \subseteq O_{\pi'}(HO_{\pi'}(G)),$$

получаем, что

$$\begin{aligned} &HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(HO_{\pi'}(G)) \cong \\ &\cong HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(HO_{\pi'}(G))/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

Так как \mathfrak{X} – π -класс, то $HO_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}$. Из того, что H – \mathfrak{X} -проектор в G , следует равенство $H = HO_{\pi'}(G)$. Тогда $H/O_{\pi'}(G) \in \tau^*(G/O_{\pi'}(G))$. Функтор τ^* является регулярным, поэтому $H \in \tau^*(G)$. Это означает, что $G \in \mathfrak{X}^\tau$ и \mathfrak{X}^τ является π -классом.

Утверждение 2) теоремы следует из доказательства утверждения 1). Теорема доказана.

Заключение

В работе указан способ построения в π -разрешимых группах π -классов Шунка с использованием π -разрешимых нормализаторных подгрупповых функторов.

Отметим, что для подгруппового функтора $\tau = \text{Sn}$ и π -класса Шунка \mathfrak{X} в классе π -разрешимых групп $N(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}^\tau$, где $N(\mathfrak{X}) = \{G \in \mathfrak{S}^\pi \mid N_G(H) = G \text{ для любого } \mathfrak{X}\text{-проектора } H \text{ группы } G\}$. Заметим, что $\mathfrak{X}^\tau \neq N(\mathfrak{X})$. Например, если $\pi = \text{P}$ – множество всех простых чисел, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_3$ – класс всех 3-групп и $G = S_4$ – симметрическая группа степени 4, то силовская 3-подгруппа H из G является \mathfrak{X} -проектором в G , причём $N_G(H) \neq G = N_G^\tau(H)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн. : Бел. навука, 2003. – 254 с.
3. Васильев, А.Ф. Нормализаторные подгрупповые функторы конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Вестник БГУ. Серия 1. – 2006. – № 1. – С. 92–96.
4. Mann, A. On subgroups of finite soluble groups III / A. Mann // Israel J. Math. – 1973. – Vol. 16. – № 4. – P. 446–451.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
6. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 892 p.
7. Carter, R.W. Nilpotent self-normalizing subgroups and system normalizers / R.W. Carter // Proc. London Math. Soc. – 1962. – Vol. 3, № 12. – P. 535–563.

Поступила в редакцию 09.04.14.