

УДК 512.542

О СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ

В.Ф. Велесницкий

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON SUPERSOLUBLE GROUPS

V.F. Veliasnitski

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Работа посвящена характеристике сверхразрешимых групп с помощью обобщенно субнормальных подгрупп.

Ключевые слова: формация, силовская подгруппа, разрешимая группа, критическая подгруппа, подгруппа Фраттини, обобщенно субнормальная подгруппа.

The characterization of supersolvable groups with generalized subnormal subgroups is given.

Keywords: formation, Sylow subgroup, soluble group, critical subgroup, Frattini subgroup, generalized subnormal subgroup.

Введение

Все рассматриваемые группы в работе конечны. Согласно классическому результату Силова в любой конечной группе существуют силовские подгруппы. Данные подгруппы играют важную роль при изучении строения конечных групп. Например, группа, у которой все силовские подгруппы нормальны, нильпотентна. Свойство нильпотентности сохраняется и для групп с субнормальными силовскими подгруппами.

В теории конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие обобщенной субнормальности (\mathfrak{F} -достижимости), предложенное Кегелем в работе [1].

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппу H называют \mathfrak{F} -субнормальной в смысле Кегеля или \mathfrak{F} -достижимой, если существует цепь подгрупп $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$ такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , либо $(H_{i-1})^\delta \subseteq H_i$.

В работе [2] рассматривается задача изучения свойств групп, в которых силовские подгруппы \mathfrak{F} -достижимы. Важнейший шаг в данном направлении получен в работе [3]. В ней, в частности, были доказаны следующие теоремы.

Теорема А [3]. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация и $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) \mathfrak{F} содержит любую разрешимую группу G , у которой $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая силовская подгруппа из G \mathfrak{F} -достижима в G ;

2) любая разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа G либо $G = G_p \rtimes G_q$, где $G_p = G^\delta$, либо $|G| = p$, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Теорема В [3]. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) \mathfrak{F} содержит любую разрешимую группу G , у которой $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая бипримарная подгруппа из G \mathfrak{F} -достижима в G ;

2) любая разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа G – группа одного из следующих типов:

a) $G = G_p \rtimes H$, $|\pi(G)| = 3$ и $G_p = G^\delta$;

b) $|\pi(G)| = 2$ и G^δ – примарная p -подгруппа, причем $G^\delta \subseteq G_p$;

c) G – группа простого порядка p , где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Из данных результатов следуют характеристика метанильпотентных групп и групп с p -длиной ≤ 1 .

Пусть \mathfrak{N}^2 – формация всех метанильпотентных групп. Разрешимая группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее бипримарная подгруппа \mathfrak{N}^2 -достижима в G .

Пусть \mathfrak{F} – формация всех разрешимых групп с p -длиной ≤ 1 . Разрешимая группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая ее бипримарная подгруппа \mathfrak{F} -достижима в G .

В данной работе была получена характеристика сверхразрешимых групп (\mathfrak{U} – класс всех сверхразрешимых групп) с помощью обобщенно субнормальных подгрупп. Доказаны следующие теоремы.

Теорема С. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда в ней любая силовская подгруппа и любая бипримарная сверхразрешимая подгруппа \mathfrak{U} -достижимы.

Теорема D. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда в фактор-группе $G/\Phi(G)$ любая силовская подгруппа и любая сверхразрешимая подгруппа Шмидта \mathcal{U} -достижимы.

1 Предварительные сведения

Необходимые обозначения и определения можно найти в монографии [4] Л.А. Шеметкова. Напомним лишь некоторые из них.

Если \mathfrak{F} – класс групп и G – группа, то корадикал $G^\mathfrak{F}$ – пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Формация – класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений.

Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если $G/N \in \mathfrak{F}$, $N \subseteq \Phi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Формация \mathfrak{F} называется наследственной, если $G \in \mathfrak{F}$ и $H \subseteq G$, то $H \in \mathfrak{F}$.

\mathfrak{N} – класс всех нильпотентных групп.

\mathcal{U} – класс всех сверхразрешимых групп.

$\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков всех групп из \mathfrak{F} .

$\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$ – класс всех нильпотентных $\pi(\mathfrak{F})$ -групп.

Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{X} – непустые формации конечных групп. Напомним, что произведением формаций называется $\mathfrak{F}\mathfrak{X} = \{G \mid G^\mathfrak{X} \in \mathfrak{F}\}$.

\mathfrak{N}^2 – формация всех метанильпотентных групп.

Если \mathfrak{F} – класс групп, то группа называется минимальной не \mathfrak{F} -группой (критической группой), если она не принадлежит \mathfrak{F} , а любая её собственная подгруппа принадлежит \mathfrak{F} . Множество всех таких минимальных не \mathfrak{F} -групп обозначается $M(\mathfrak{F})$.

Напомним, что минимальная неабелева группа называется группой Миллера-Морено. Минимальная ненильпотентную группу называют группой Шмидта.

G_p – силовская p -подгруппа группы G .

$\pi(G)$ – множество различных простых делителей порядка группы G .

$|\pi(G)|$ – количество различных простых делителей порядка группы G .

Если $|\pi(G)|=2$, то группа G называется бипримарной.

В следующей лемме приводятся известные свойства обобщенных субнормальных подгрупп.

Лемма 1.1. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если H – подгруппа группы G и $G^\mathfrak{F} \subseteq H$, то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;

2) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то $H \cap K$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа K для любой подгруппы K группы G ;

3) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа K и K – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;

4) если H_1 и H_2 – \mathfrak{F} -достижимые подгруппы группы G , то $H_1 \cap H_2$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;

5) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то H^x \mathfrak{F} -достижима в G для любых $x \in G$.

Доказательство. 1) Пусть H – подгруппа группы G и $G^\mathfrak{F} \subseteq H$. Так как $G/G^\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$ и \mathfrak{F} – наследственная формация, то подгруппа $H/G^\mathfrak{F}$ является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой группы $G/G^\mathfrak{F}$. Отсюда согласно определению \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы существует максимальная цепь

$G/G^\mathfrak{F} = H_0/G^\mathfrak{F} \supseteq H_1/G^\mathfrak{F} \supseteq \dots \supseteq H_n/G^\mathfrak{F} = H/G^\mathfrak{F}$ такая, что $(H_{i-1}/G^\mathfrak{F})^\mathfrak{F} \subseteq H_i/G^\mathfrak{F}$ для всех $i=1, 2, \dots, n$. Отсюда получаем, что в группе G существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^\mathfrak{F} \subseteq H_i$ для всех $i=1, 2, \dots, n$.

А это значит, что H – \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа группы G . Поскольку любая \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа группы G является \mathfrak{F} -достижимой в G , то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G .

2) Пусть H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G . Тогда, по определению, существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i=1, 2, \dots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , либо $(H_{i-1})^\mathfrak{F} \subseteq H_i$.

Пусть K – некоторая подгруппа из G . Рассмотрим цепь подгрупп:

$$K = H_0 \cap K \supseteq H_1 \cap K \supseteq \dots \supseteq H_m \cap K = H \cap K.$$

Если подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , то подгруппа $H_i \cap K$ нормальна в $H_{i-1} \cap K$. Пусть $(H_{i-1})^\mathfrak{F} \subseteq H_i$. Так как формация \mathfrak{F} наследственная, то из $H_{i-1}/(H_{i-1})^\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$ следует, что

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^\mathfrak{F} / (H_{i-1})^\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}.$$

Теперь ввиду изоморфизма

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^\mathfrak{F} / (H_{i-1})^\mathfrak{F} \simeq H_{i-1} \cap K / H_{i-1} \cap K \cap (H_{i-1})^\mathfrak{F}$$

имеем

$$H_{i-1} \cap K / (H_{i-1})^\mathfrak{F} \cap K \in \mathfrak{F}.$$

Значит,

$$(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{S}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{S}} \cap K.$$

Так как $(H_{i-1})^{\mathfrak{S}} \subseteq H_i$, то $(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{S}} \subseteq H_i \cap K$.
Итак, для каждого $i=1,2,\dots,m$ либо подгруппа $H_i \cap K$ нормальна в $H_{i-1} \cap K$, либо

$$(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{S}} \subseteq H_i \cap K.$$

Отсюда, по определению, $H \cap K$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы K .

Утверждение 3) следует непосредственно из определения \mathfrak{F} -достижимой подгруппы.

Утверждение 4) следует теперь из утверждений 2) и 3).

Утверждение 5) следует непосредственно из определения \mathfrak{F} -достижимой подгруппы. Лемма доказана.

Напомним, что группа называется сверхразрешимой, если она имеет нормальный ряд с циклическими факторами.

Дисперсивная группа – конечная группа, обладающая нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Дисперсивной по Оре группой называют конечную группу порядка $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$, где $p_1 > p_2 > \dots > p_t$ – простые числа, обладающую нормальными подгруппами порядков

$$p_1^{a_1}, p_1^{a_1} p_2^{a_2}, \dots, p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_i^{a_i}, \dots, p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}}.$$

Сверхразрешимые группы дисперсивны по Оре.

Приведем ниже известные свойства минимальных сверхразрешимых групп.

Лемма 1.2 [5]. Пусть G – минимальная несверхразрешимая группа. Тогда выполняются следующие условия:

- 1) G разрешима и $\pi(G) \leq 3$;
- 2) если G не является группой Шмидта, то G дисперсивна по Оре;
- 3) G имеет единственную неединичную нормальную силовскую подгруппу $P = G^{\mathfrak{U}}$;
- 4) если S – дополнение к P в G , то $S/S \cap \Phi(G)$ – либо примарная циклическая группа, либо группа Миллера-Морено.

2 Доказательство теорем С и D

Доказательство теоремы С. Необходимость. Пусть G – сверхразрешимая группа и \mathfrak{U} – класс всех сверхразрешимых групп. Тогда $G^{\mathfrak{U}} = 1$. А это значит, что $G^{\mathfrak{U}} \subseteq H$, где H – произвольная подгруппа группы G . По лемме 1.1 H – \mathfrak{U} -достижима.

Достаточность. Пусть любая силовская подгруппа группы G и любая бипримарная сверхразрешимая подгруппа группы G \mathfrak{U} -достижимы в G . Пусть G – группа минимального порядка, для которой теорема неверна.

Пусть H – произвольная собственная подгруппа группы G . Покажем, что условия теоремы для H выполнимы. Действительно, пусть H_p – произвольная силовская p -подгруппа из H . По теореме силова H_p содержится в некоторой силовской подгруппе G_p группы G . По условию G_p – \mathfrak{U} -достижима в G . Так как $G_p \in \mathfrak{U}$, то $G_p^{\mathfrak{U}} = 1$. Тогда по лемме 1.1 H_p – \mathfrak{U} -достижима в G_p . Получаем по той же лемме 1.1, что H_p \mathfrak{U} -достижима в G .

Пусть B – произвольная бипримарная сверхразрешимая подгруппа из H . Тогда согласно условию B \mathfrak{U} -достижима в G . По лемме 1.1 B – \mathfrak{U} -достижима в H . Итак, условия теоремы для подгруппы H выполняются. Следовательно, по индукции H – сверхразрешима. Итак, G – минимальная несверхразрешимая группа.

Согласно лемме 1.2 G – группа одного из следующих типов.

а) Если $|\pi(G)| = 1$, то теорема очевидна.

б) Пусть $|\pi(G)| = 2$. Тогда по лемме 1.2 $G = G_p \rtimes G_q$ и $G_p = G^{\mathfrak{U}}$. Согласно условию G_q – \mathfrak{U} -достижимая подгруппа группы G . Тогда G_q содержится в максимальной подгруппе M группы G , причем M либо \mathfrak{U} -нормальна в G , либо нормальна в G . Если M \mathfrak{U} -нормальна в G , то $G^{\mathfrak{U}} \subseteq M$. Отсюда следует, что $G \subseteq M$, что невозможно. Пусть M – нормальная подгруппа G . Тогда $G = G^{\mathfrak{S}} M$. Очевидно, что $G/G^{\mathfrak{U}} \in \mathfrak{U}$ и $G/M \in \mathfrak{U}$. Так как \mathfrak{U} – формация, то $G/G^{\mathfrak{U}} \cap M \in \mathfrak{U}$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{U}} \subseteq G^{\mathfrak{U}} \cap M$. А это значит, что $G \subseteq M$, что невозможно. Получили противоречие.

в) Пусть $|\pi(G)| = 3$. Тогда согласно лемме 1.2 $G_p = G^{\mathfrak{U}}$ и $G = G_p \rtimes G_q \rtimes G_r$, где $p > q > r$. Так как G – минимальная несверхразрешимая подгруппа, то $G_q G_r$ – сверхразрешима. По условию теоремы $G_q G_r$ – \mathfrak{U} -достижима в G . Как и выше, нетрудно показать, что это невозможно. Получили противоречие. Следовательно G – сверхразрешима. Теорема доказана.

Доказательство теоремы D. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть G – группа минимального порядка, для которой теорема не верна. Как и в теореме С, нетрудно показать, что $G/\Phi(G)$ – минимальная несверхразрешимая группа. Поскольку $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$, то дальнейшие рассуждения будем проводить для групп, у которых $\Phi(G) = 1$. Для $|\pi(G)| \leq 2$ рассуждения проводятся аналогичные доказательству теоремы С.

Пусть $|\pi(G)| = 3$. По лемме 1.2 $G_p = G^{\mathfrak{U}}$,
 $G_q G_r$ – группа Миллера-Морено и

$$G = G_p \rtimes G_q \rtimes G_r,$$

где $p > q > r$. Покажем, что $G_q G_r$ – группа Шмидта. Если $G_q G_r$ нильпотента, то $G_q \times G_r$, где G_q, G_r – абелевы, но тогда $G_q G_r$ – абелева, что невозможно. Итак, $G_q G_r$ – сверхразрешимая группа Шмидта. По условию теоремы $G_q G_r$ – \mathfrak{U} -достижима в G . Как и выше, нетрудно показать, что такое невозможно. Получили противоречие.

Итак, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}$. В силу насыщенности класса всех сверхразрешимых групп \mathfrak{U} получаем, что G – сверхразрешима. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die Subnormalteilverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – P. 225–228.

2. Васильева, Т.И. О конечных группах с \mathfrak{F} -достижимыми силовскими подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Гомель, 2006. – 18 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 4).

3. Шевчук, С.Н. Конечные группы с обобщенно субнормальными подгруппами / С.Н. Шевчук, В.Н. Семенчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 57–60.

4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М.: Наука. – 1978. – 272 с.

5. Döerk, K. Minimal nicht Überauflosbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math.Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.

Поступила в редакцию 14.12.13.