

УДК 512.542

**ПРОИЗВОДНАЯ π -ДЛИНА π -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ,
СИЛОВСКИЕ p -ПОДГРУППЫ КОТОРОЙ ЛИБО БИЦИКЛИЧЕСКИЕ,
ЛИБО ИМЕЮТ ПОРЯДОК p^3**

Д.В. Грицук

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

**DERIVED π -LENGTH OF A π -SOLVABLE GROUP
IN WHICH THE SYLOW p -SUBGROUPS ARE EITHER BICYCLIC
OR OF ORDER p^3**

D.V. Gritsuk

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Доказывается, что производная π -длина конечной π -разрешимой группы, силовские p -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 для всех $p \in \pi$ не превышает 7, а в случае, когда $2 \notin \pi$ не превышает 4.

Ключевые слова: конечная группа, π -разрешимая группа, бициклическая группа, силовская подгруппа, производная π -длина.

The group is called a bicyclic group if it is the product of two cyclic subgroups. It is proved that the derived π -length of the π -solvable groups in which the Sylow p -subgroups are either bicyclic or of order p^3 for any $p \in \pi$ is at most 7 and if $2 \notin \pi$ then the derived π -length is at most 4.

Keywords: finite group, π -solvable group, bicyclic group, Sylow subgroup, derived π -length.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1], [2].

Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Бициклическая p -группа при нечетном p является метациклической, т.е. содержит нормальную циклическую подгруппу, факторгруппа по которой циклическая. Бициклическая 2-группа может быть не метациклической [2]. Инварианты (производная длина, нильпотентная длина, p -длина, ранг и т.д.) разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами получены в [3]. В частности, производная длина таких групп не превышает 6, а нильпотентная длина не превышает 4. Разрешимые группы, обладающие нормальным рядом с бициклическими силовскими подгруппами в факторах, изучены в [4].

В.С. Монахов предложил новое понятие производной π -длины π -разрешимой группы [5]. Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1, \quad (0.1)$$

факторы G_i / G_{i+1} которого являются либо π' -группами, либо абелевыми π -группами. Наименьшее

число абелевых π -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π -длиной π -разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi = \pi(G)$ значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G . Начальные свойства производной π -длины и некоторые результаты, связанные с этим понятием, установлены в работах [5]–[8].

В настоящей заметке исследуется производная π -длина π -разрешимой группы, силовские p -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 . Доказывается, что в этом случае $l_\pi^a(G) \leq 7$, а если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 4$.

1 Используемые понятия

Пусть \mathbb{P} – множество всех простых чисел, а π – некоторое подмножество из \mathbb{P} . Дополнение к π во множестве \mathbb{P} обозначается через π' . Символом π обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел \mathbb{N} следующим образом: $\pi(a)$ – множество простых чисел, делящих натуральное число a . Для группы G и ее подгруппы H считаем, что $\pi(G) = \pi(|G|)$ и $\pi(G:H) = \pi(|G:H|)$.

Зафиксируем множество простых чисел π . Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется π -числом. Группа G называется π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$, и π' -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. В последнем случае $\pi(G) \cap \pi = \emptyset$.

Цепочку подгрупп (0.1) называют субнормальным рядом группы G , если подгруппа G_{i+1} нормальна в G_i для каждого i . Фактор-группы G_i / G_{i+1} называют факторами ряда (0.1).

Группа называется π -разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (0.1), факторы которого являются либо разрешимыми π -группами, либо π' -группами. Наименьшее число π -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется π -длиной π -разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi(G)$.

Поскольку π -факторы субнормального ряда (0.1) π -разрешимой группы G разрешимы, то каждая π -разрешимая группа обладает субнормальным рядом, у которого все π -факторы нильпотентны. Наименьшее число нильпотентных π -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется нильпотентной π -длиной π -разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Если множество $\pi = \{p\}$ состоит из одного простого числа, то, очевидно, $l_\pi(G) = l_\pi^n(G) = l_p(G)$ для каждой π -разрешимой группы. Равенство $l_\pi(G) = l_\pi^n(G)$ сохраняется также у π -разрешимой группы с нильпотентной π -холловой подгруппой.

Пусть G – группа. Рассмотрим цепочку подгрупп группы G :

$$1 = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_t \subseteq \dots,$$

где $F_{i+1} / F_i = F(G / F_i)$. Здесь $F(X)$ подгруппа Фиттинга группы X . Если G разрешима, то существует натуральное число k такое, что $F_k = G$. Наименьшее натуральное число с таким свойством называют нильпотентной длиной группы G и обозначают через $n(G)$.

Производной длиной группы G называют наименьшее натуральное число m , для которого выполняется равенство $G^{(m)} = 1$, и обозначают через $d(G)$. Здесь G' – коммутант группы G и $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$.

Если G – неединичная p -разрешимая группа и p^n – наибольшая из степеней простого числа p , делящая порядок главных факторов группы G , то число $n = r_p(G)$ называется p -рангом группы G .

2 Вспомогательные леммы

Для доказательства теоремы понадобятся следующие леммы.

Лемма 2.1 [5]. Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда:

1) если H – подгруппа группы G , то

$$l_\pi^a(H) \leq l_\pi^a(G);$$

2) если N – нормальная подгруппа группы G , то

$$l_\pi^a(G/N) \leq l_\pi^a(G), l_\pi^a(G) \leq l_\pi^a(G/N) + l_\pi^a(N);$$

3) если N – нормальная π' -подгруппа группы G , то $l_\pi^a(G/N) = l_\pi^a(G)$;

4) если G и V – π -разрешимые группы, то $l_\pi^a(G \times V) = \max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\}$;

5) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G , то

$$l_\pi^a(G / (N_1 \cap N_2)) \leq \max\{l_\pi^a(G / N_1), l_\pi^a(G / N_2)\}.$$

Через G_π обозначается π -холлова подгруппа группы G .

Лемма 2.2 [5]. Если G – π -разрешимая группа, то $d(G_\pi) \leq l_\pi^a(G) \leq l_\pi(G)d(G_\pi)$.

Лемма 2.3 [7]. Если G – π -разрешимая группа и $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, то

$$l_\pi(G) \leq l_{\pi_1}(G) + l_{\pi_2}(G).$$

Лемма 2.4 [9]. Пусть G – p -разрешимая группа. Если $l_p(G) = r_p(G)$, то либо $r_p(G) = 1$, либо $r_p(G) = 2$ и $p \in \{2, 3\}$. В частности, если $r_p(G) \geq 3$, то $l_p(G) \leq r_p(G) - 1$.

Лемма 2.5. Пусть G – p -разрешимая группа, а G_p – ее силовская p -подгруппа. Тогда:

1) если G_p имеет порядок p или p^2 , то $l_p^a(G) \leq 1$;

2) если G_p имеет порядок p^3 , то $l_p^a(G) \leq 2$ для всех p и $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$;

3) если G_p имеет порядок p^4 , то $l_p^a(G) \leq 2$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G) \leq 3$ для $p \in \{2, 3\}$. Кроме того, $l_p(G) \leq 2$ для всех p .

Доказательство. 1. Так как силовская p -подгруппа G_p имеет порядок p или p^2 , то G_p является абелевой. Поэтому по [2, VI.6.6] $l_p(G) \leq 1$. Применяя лемму 2.2, получаем $l_p^a(G) \leq 1$.

2. Если G_p абелева, то $l_p(G) \leq 1$ по [2, III.6.6]. Если G_p неабелева, то она изоморфна по [2, I.14.10] либо метациклической группе

$$M_3(p) = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \rangle = [\langle a \rangle] \langle b \rangle,$$

Либо группе экспоненты p . В любом случае

$l_p(G) \leq 2$ для любого p по [2, VI.6.6 b)]. Из [3, лемма 2] для метациклической группы имеем, что $l_p(G) \leq 1$ при $p > 2$. Пусть G_p является группой экспоненты p и $l_p(G) = 2$. По [2, III.10.2] подгруппа G_p регулярна. Так как G_p неабелева, то $p > 2$ и p – простое число Ферма по [10, IX.4.8. b)]. Теперь из [10, IX.5.5 b)] вытекает, что $p > 3$.

При $l_p(G) = 1$ из леммы 2.2 получаем, что $l_p^a(G) \leq 2$. Пусть $l_p(G) = 2$. Тогда существует (p', p) -ряд, в котором точно два p -фактора. Так как $|P| = p^3$, то порядки этих p -факторов не превышают p^2 и, следовательно, они абелевы. Поэтому $l_p^a(G) \leq 2$.

3. Пусть G_p – силовская p -подгруппа, $r_p(G)$ – p -ранг группы G . Если $r_p(G) = 4$, то G_p абелева и $l_p^a(G) \leq 1$.

Пусть $r_p(G) = 3$. Тогда у главного ряда группы G точно два p -фактора: один имеет порядок p^3 , другой – p . Так как главные p -факторы абелевы, то $l_p^a(G) \leq 2$.

Пусть $r_p(G) = 2$. Тогда порядки главных p -факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p^2); (p, p^2, p); (p^2, p, p); (p^2, p^2).$$

Для последовательностей (p, p, p^2) , (p^2, p, p) и (p^2, p^2) группа G содержит нормальную подгруппу K такую, что силовские p -подгруппы в K и G/K имеют порядки p^2 . По первому пункту доказываемой леммы $l_p^a(K) \leq 1$ и $l_p^a(G/K) \leq 1$, а из леммы 2.1 следует $l_p^a(G) \leq 2$.

Остается рассмотреть последовательность (p, p^2, p) . Если $l_p(G) = 1$, то $l_p^a(G) \leq 2$ по лемме 2.2 поскольку $d(G_p) \leq 2$ [2, III.7.2.(d)]. Пусть $l_p(G) > 1$. Так как $l_p(G) \leq r_p(G) = 2$, то $l_p(G) = r_p(G) = 2$ и $p \in \{2, 3\}$ по лемме 2.4. Силовская p -подгруппа в $O_{p', p, p', p}(G)$ имеет порядок p^3 и $l_p^a(O_{p', p, p', p}(G)) \leq 2$ по второму пункту доказываемой леммы. Силовская p -подгруппа в фактор-группе $G/O_{p', p, p', p}(G)$ имеет порядок p , поэтому $l_p^a(G/O_{p', p, p', p}(G)) \leq 1$. Теперь $l_p^a(G) \leq 3$ по лемме 2.1(2). Лемма доказана.

Лемма 2.6 [5]. Пусть G – π -разрешимая группа, G_π – ее π -холлова подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если G_π абелева, то $l_\pi^a(G) \leq 1$;

2) если $2 \notin \pi$ и G_π метабелева, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Лемма 2.7 Пусть G – p -разрешимая группа с бициклической силовской p -подгруппой. Тогда:

1) если $p > 2$, то $l_p(G) \leq 1$ и $l_p^a(G) \leq 2$;

2) если $p = 2$, то $l_2^a(G) \leq 3$ и $G/O_{2', 2}(G)$ либо имеет нечетный порядок, либо изоморфна S_3 ; в частности, $l_2(G) \leq 2$.

Доказательство. По условию в группе G силовская p -подгруппа G_p бициклическая, поэтому подгруппа $(G_p)'$ абелева [1, 1.9] и $d(G_p) \leq 2$. Если $l_p(G) \leq 1$, то $l_p^a(G) \leq 2$ по лемме 2.6. Пусть $l_p(G) > 1$. Тогда по лемме из работы [3] число $p = 2$ и $G/O_{2', 2}(G)$ изоморфна симметрической группе S_3 . Из леммы 2.6 следует, что $l_2^a(G/O_{2', 2}(G)) \leq 1$. Поскольку $l_2(O_{2', 2}(G)) \leq 1$ и силовская 2-подгруппа из $O_{2', 2}(G)$ имеет абелевый коммутант, то $l_2^a(O_{2', 2}(G)) \leq 2$ по лемме 2.2. Теперь из леммы 2.1 (2) получаем, что $l_2^a(G) \leq 3$. Лемма доказана.

Лемма 2.8 Пусть H – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы $GL(n, p)$. Тогда:

1) если $n = 2$, то подгруппа H циклическая и $|H|$ делит $p^2 - 1$;

2) если $n = 3$, то подгруппа H метабелева.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из [2, лемма VI.8.1], второе – из [11, теорема 4B].

Лемма 2.9 Если G – неединичная π -разрешимая группа и $O_\pi(G) = 1$, то $\Phi(G)$ – собственная подгруппа в $F(G)$.

Доказательство. Пусть G – неединичная π -разрешимая группа, $O_\pi(G) = 1$ и $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини. Тогда фактор-группа $G/\Phi(G)$ – неединичная π -разрешимая группа. Пусть $N/\Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа в фактор-группе $G/\Phi(G)$. Известно, что в этом случае $N/\Phi(G)$ либо элементарная абелева p -группа, либо π' -группа.

Если $N/\Phi(G)$ – элементарная абелева p -группа, то $N/\Phi(G)$ нильпотентна и, следовательно, N – нильпотентная группа по теореме Гашюца [1, Теорема 3.24]. Отсюда, $N \leq F(G)$ и лемма доказана. Если $N/\Phi(G)$ – π' -группа, то $N = [\Phi(G)]K$ по [2, 1.18.1]. Теперь по лемме Фраттини [1, лемма 1.66]

$$G = N_G(K)N = N_G(K)\Phi(G) = N_G(K),$$

следовательно, K нормальна в G и $K \leq O_\pi(G) = 1$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.10 Пусть G – p -замкнутая группа нечетного порядка, а ее силовская p -подгруппа G_p является группой порядка p^3 или бициклической. Если $\Phi(G)=1$ и $C_G(G_p) \subseteq G_p$, то G_p – метабелева группа.

Доказательство. Поскольку G – разрешимая p -замкнутая группа, $\Phi(G)=1$ и $C_G(G_p) \subseteq G_p$, то $F(G)=G_p$ и $G=[G_p]G_{p'}$. Так как G_p нормальна в G , то $\Phi(G_p) \subseteq \Phi(G)=1$ и G_p элементарная абелева порядка не выше p^3 .

Если $F(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G , то подгруппа G_p действует неприводимо на $F(G)$ и G_p метабелева по лемме 2.8.

Пусть теперь $F(G)$ не является минимальной нормальной подгруппой группы G . Тогда по [1, теорема 4.24] $F(G)$ будет прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы G . Прямые сомножители будут элементарными абелевыми подгруппами порядка p или p^2 и их не более трех. Пусть F_i – прямой сомножитель подгруппы $F(G)$, $i \leq 3$. Если $|F_i|=p$, то фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Если $|F_i|=p^2$, то по лемме 2.8 фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. По [1, лемма 2.33] фактор-группа

$$G/\bigcap_{i \leq 3} C_G(F_i)$$

абелева. Так как

$$\bigcap_{i \leq 3} C_G(F_i) \subseteq C_G(F(G)) = F(G),$$

то G_p абелева. Лемма доказана.

Лемма 2.11 Пусть G – p -замкнутая группа нечетного порядка, а ее силовская p -подгруппа G_p является группой порядка p^2 или циклической группой. Если $C_G(G_p) \subseteq G_p$, то G_p – абелева группа.

Доказательство. Если G_p – циклическая группа, то G_p – абелева, как ее группа автоморфизмов [1, теорема 2.16]. Если G_p нециклическая, то она элементарная абелева группа порядка p^2 и повторяя рассуждения из доказательства леммы 2.10 получаем, что G_p абелева. Лемма доказана.

3 Оценка производной π -длины

Теорема 3.1 Пусть G – π -разрешимая группа, силовские p -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 для всех $p \in \pi$. Тогда:

1) если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 4$;

2) если $2 \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 7$.

Доказательство. 1. Воспользуемся индукцией по порядку группы G . По лемме 2.1 (3) можно считать, что $O_{\pi'}(G)=1$. Покажем, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Допустим противное. Пусть N_1 и N_2 – две минимальные нормальные подгруппы группы G . Так как $|G/N_i| < |G|$, $i=1,2$, то по предположению индукции $l_\pi^a(G/N_i) \leq 4$. По лемме 2.1(5) $l_\pi^a(G) \leq 4$. Итак, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N .

Так как группа G π -разрешима и $O_{\pi'}(G)=1$, то $O_\pi(G) \neq 1$. Подгруппа $O_\pi(G)$ разрешима и неединична, поэтому ее подгруппа Фиттинга $F(O_\pi(G))$ отлична от единичной подгруппы и, очевидно,

$$F(O_\pi(G)) \subseteq F(G).$$

Из того, что $O_{\pi'}(G)=1$ следует, что $F(G)$ является π -подгруппой, поэтому

$$F(G) \subseteq F(O_\pi(G)), F(G) = F(O_\pi(G)).$$

Так как подгруппа $F(G)$ нильпотентна и в группе G минимальная нормальная подгруппа единственна, то

$$F(G) = F(O_\pi(G)) = O_p(G)$$

для некоторого простого $p \in \pi$.

Если $O_{p'}(G) \neq 1$, то в группе G будут существовать две различные минимальные нормальные подгруппы: p -подгруппа из $O_p(G)$ и p' -подгруппа из $O_{p'}(G)$. Имеем противоречие. Поэтому $O_{p'}(G)=1$ и

$$C_G(O_p(G)) \leq O_p(G), C_G(F(G)) \leq F(G).$$

Возможны два случая.

Случай 1: $F(G)=G_p$. По лемме 2.9 $\Phi(G)$ – собственная подгруппа в G_p , а по [1, лемма 4.2] $F(G/\Phi(G)) = G_p/\Phi(G)$. Из [12] следует, что

$$G_p \cap \Phi(G) = \Phi(G_p) = G_p \cap \Phi(G_\pi).$$

Так как $C_G(F(G)) \leq F(G)$, то $\Phi(G_\pi)$ – p -группа и $\Phi(G) = \Phi(G_p) = \Phi(G_\pi)$.

Если G_p бициклическая, то $G_p/\Phi(G)$ – элементарная абелева группа порядка p или p^2 . Если G_p небициклическая, то $G_p/\Phi(G)$ – элементарная абелева группа порядка p^2 или p^3 . Таким образом подгруппа $G_p/\Phi(G)$ – элементарная абелева группа порядка не выше p^3 . В любом случае $d(G_p) \leq 2$.

Если $|G_p / \Phi(G)| = p^3$, то $\Phi(G) = 1$ и подгруппа G_p – абелева. Из леммы 2.10 следует, что группа G_π / G_p является метабелевой. Тогда по лемме 2.6 $l_\pi^a(G / G_p) \leq 3$. Так как G_p абелева, то $l_\pi^a(G) \leq 4$ по лемме 2.1 (2). Если $G_p / \Phi(G)$ имеет порядок p или p^2 , то по лемме 2.11 группа G_π / G_p является абелевой группой. По лемме 2.6 $l_\pi^a(G / G_p) \leq 1$. Так как $d(G_p) \leq 2$, то по лемме 2.1 (2) получаем $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Случай 2: $F(G) \subset G_p$. Если G_p – бициклическая группа, то по лемме 2.7 $l_p(G) \leq 1$. Так как $O_p(G) = 1$, то $F(G) = G_p$, противоречие. Пусть $|G_p| = p^3$. Тогда порядок $F(G)$ равен либо p либо p^2 . Если $|F(G)| = p$, то $G / F(G)$ абелева, как группа автоморфизмов циклической группы $F(G)$. Поэтому по лемме 2.6 (1) $l_\pi^a(G / F(G)) \leq 1$ и по лемме 2.1(2) получаем $l_\pi^a(G) \leq 2$. Если $|F(G)| = p^2$, то либо $F(G)$ – циклическая группа порядка p^2 , либо $F(G)$ является прямым произведением двух циклических групп порядка p . Если $F(G)$ – циклическая группа, то $G / F(G)$ абелева, как группа автоморфизмов циклической группы $F(G)$. Поэтому $l_\pi^a(G / F(G)) \leq 1$ и $l_\pi^a(G) \leq 2$ по лемме 2.1 (2). Пусть $F(G)$ является прямым произведением двух циклических групп порядка p . Так как $|F(G)| = p^2$ и $|G_p| = p^3$, то $l_p(G) > 1$. Поэтому из леммы 2.5 следует, что $p = 3$. Тогда фактор-группа $G / F(G)$ изоморфна подгруппе группы $GL(2, 3)$ порядка $2^4 \cdot 3$. Так как $2 \notin \pi$, то $\pi = \{3\}$ и $|G_\pi| = 3^3$. Тогда по лемме 2.5 $l_\pi^a(G) = l_p^a(G) \leq 2$.

2. Пусть $\pi_1 = \pi / \{2\}$. Тогда по лемме 2.3 $l_\pi^a(G) \leq l_{\pi_1}^a(G) + l_2^a(G)$. По первому пункту доказываемой теоремы $l_{\pi_1}^a(G) \leq 4$, а $l_2^a(G) \leq 3$ либо по лемме 2.5 (2), либо по лемме 2.7. Поэтому $l_\pi^a(G) \leq 7$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / В. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.
3. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки – 2001. – Том 70, № 4. – С. 603–612.
4. Monakhov, V.S. On a finite group having a normal series whose factors have bicyclic Sylow subgroups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Communications in Algebra. – 2011. – Vol. 39, № 9. – P. 3178–3186.
5. Грицук, Д.В. О производной π -длине π -разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник БГУ. Серия 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
6. Грицук, Д.В. О конечных π -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Проблемы математики, физики и техники. – 2013. – №1 (14). – С. 61–66.
7. Грицук, Д.В. О разрешимых группах, силовские подгруппы которых абелевы или экстраординарные / Д.В. Грицук, В.С. Монахов // Труды института математики НАН Беларуси. – 2012. – Т. 20, № 2. – С. 3–9.
8. Монахов, В.С. О производной π -длине конечной π -разрешимой группы с заданной π -холовой подгруппой / В.С. Монахов, Д.В. Грицук // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 215–223.
9. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
10. Huppert, B. Finite Groups II / В. Huppert, N. Blackburn. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1982.
11. Palfy, P.P. Bounds for liner groups of odd order / P.P. Palfy // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. – 1990. – Vol. 39, Suppl. 23. – P. 253–263.
12. Baer, R. Supersoluble immersion / R. Baer // Canad. J. Math. – 1959. – № 11. – P. 353–369.

Поступила в редакцию 11.02.14.