

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Ю. А. Гришечкин

г. Гомель, УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

ЗАДАЧА О ГОРЕНИИ ПЛАВАЮЩЕЙ СВЕЧИ

Для демонстрации действия силы Архимеда проводится следующий опыт. Если свечу в воду поместить так, чтобы она плавала, находясь

в вертикальном положении, и при этом на поверхности оставалась лишь её малая часть и фитиль, то после поджигания свеча почти полностью выгорит, не погрузившись в воду (рисунок 1) [1]. В данной работе получен закон движения центра тяжести горячей в воде свечи.



Рисунок 1 – Горение свечи, плавающей в сосуде с водой

Предположим, что свеча имеет цилиндрическую форму. Обозначим характеристики незажжённой свечи следующим образом (рисунок 2а):

l_0 – начальная длина;

S – площадь поперечного сечения свечи;

h_0 – длина погруженной в воду части;

x_0 – начальная координата центра тяжести свечи в воде;

m_0 – начальная масса;

ρ_c – плотность материала свечи.

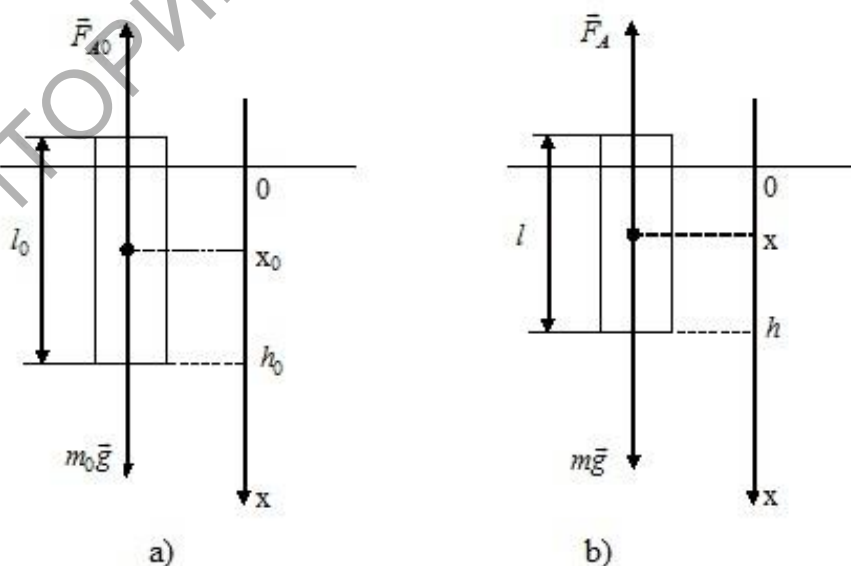


Рисунок 2 – Характеристики свечи

На плавающую в жидкости свечу действуют сила тяжести $m_0\vec{g}$ и сила Архимеда \vec{F}_{A0} . Из условия равенства модулей этих сил следует следующее выражение, связывающее величины l_0, h_0 :

$$h_0 = l_0 \rho_c / \rho_0, \quad (1)$$

где ρ_0 – плотность воды.

Из геометрических соображений нетрудно получить равенство, связывающее величины x_0, h_0, l_0

$$x_0 = h_0 - l_0 / 2. \quad (2)$$

Подставив (1) в равенство (2), получим следующую формулу для начальной координаты центра тяжести свечи в воде:

$$x_0 = l_0 (\rho_c / \rho_0 - 1/2). \quad (3)$$

Из выражения (3) следует, что положение центра тяжести определяется длиной свечи и отношением плотностей материала свечи и воды.

Рассмотрим теперь горящую свечу (рисунок 2b). Будем считать, что процесс горения протекает равномерно вдоль оси симметрии свечи со скоростью V_0 и при этом весь её материал сгорает или испаряется. Кроме того, будем полагать, что свеча в процессе горения не деформируется, сохраняя цилиндрическую форму. При выполнении этих условий длина свечи будет меняться со временем по закону

$$l(t) = l_0 - V_0 t. \quad (4)$$

В процессе горения центр тяжести $x(t)$ свечи перемещается. Глядя на рисунок 2b нетрудно заключить, что формула для $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = h(t) - l(t) / 2, \quad (5)$$

где $h(t)$ – длина погружённой в воду части свечи.

Второй закон Ньютона для горящей свечи имеет вид

$$\frac{dp(t)}{dt} = F_A(t) - m(t)g, \quad (6)$$

где $F_A(t) = Sh(t)\rho_0 g$ – сила Архимеда;

$p(t) = m(t)V(t)$ – импульс свечи;

$m(t) = Sl(t)\rho_c$ – масса свечи в момент времени t ;

$V(t)$ – скорость перемещения центра тяжести свечи.

Уравнение (6) является дифференциальным, так как содержит производную по времени от импульса. Однако, импульс свечи изменяется со временем медленно, поэтому левой частью в уравнении (6) можно

пренебречь. Таким образом, вместо решения дифференциального уравнения нужно искать решение линейного алгебраического уравнения, которое после подстановки в него явного вида выражения для силы Архимеда $F_A(t)$, массы $m(t)$, а также учёта равенства (5) принимает форму

$$0 = S(x(t) + l(t)/2)\rho_0 g - Sl(t)\rho_c g. \quad (7)$$

Разделив уравнение (7) на постоянный множитель $S\rho_0 g$ и, выразив в нём $x(t)$ через остальные величины, получим следующую формулу:

$$x(t) = l(t)(\rho_c/\rho_0 - 1/2). \quad (8)$$

Выражение (8) с учётом равенств (3), (4) может быть представлено в виде

$$x(t) = x_0(1 - V_0 t/l_0). \quad (9)$$

Из формулы (9) следует, что координата центра тяжести горящей свечи в воде изменяется со временем по линейному закону и, что скорость его перемещения остаётся постоянной и определяется по формуле

$$V = -(x_0/l_0)V_0 = (1/2 - \rho_c/\rho_0)V_0. \quad (10)$$

Комбинированием формул (4), (5), (8) нетрудно получить выражение для длины надводной части свечи в момент времени t

$$l(t) - h(t) = (1 - \rho_c/\rho_0)(l_0 - V_0 t). \quad (11)$$

Проведём анализ полученных результатов. Из формулы (10) следует, что направление движения центра тяжести в воде определяется отношением плотности материала ρ_c свечи к плотности воды ρ_0 :

- 1) если $\rho_c = \rho_0/2$, то $V = 0$ и $x(t) \equiv 0$: центр тяжести свечи находится на границе раздела воды и воздуха и не перемещается в процессе горения;
- 2) если $\rho_c < \rho_0/2$, то $V > 0$ и $x(t) < 0$: при горении центр тяжести свечи опускается, оставаясь всё время над водой;
- 3) если $\rho_c > \rho_0/2$, то $V < 0$ и $x(t) > 0$: центр тяжести свечи поднимается, оставаясь под водой на протяжении всего времени горения.

Плотность парафина – одного из основных материалов, используемых при изготовлении свеч, равна $\rho_c = 0,9 \text{ г/см}^3$ [2], а плотность воды – $\rho_0 = 1,0 \text{ г/см}^3$. Эти величины удовлетворяют неравенству, приведенному в третьем пункте, который соответствует наблюдаемому эксперименту.

Подводя итоги, отметим, что учёт скорости изменения импульса в уравнении (6) существенно усложняет задачу и её точное решение возможно лишь с применением элементов высшей математики. Приведенное же в этой работе решение получено в рамках школьной программы по физике и математике исходя из предположения о медленном процессе

горения и позволяет объяснить поведение свечи в описанном эксперименте. Точному решению задачи с учётом изменения импульса свечи в процессе горения будет посвящена отдельная работа.

Литература

1. Гальперштейн, Л. Я. Забавная физика / Л. Я. Гальперштейн. – Москва : Детская литература, 1994. – 255 с.
2. Парафин // Химическая энциклопедия. – М., 1992. – Т. 3. – С. 446.