

## ВНУТРЕННЯЯ КОНИЧЕСКАЯ РЕФРАКЦИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ДВУХОСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

А. М. Бельский и А. П. Хапалюк

Аналитически исследована внутренняя коническая рефракция ограниченных световых пучков в двухосных кристаллах. Общие результаты применены к случаю пучка, получаемого при дифракции плоской волны на круглом отверстии. Теоретические результаты хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

В работе [1] методом углового спектра плоских волн рассмотрено прохождение ограниченных световых пучков вдоль лучевых осей двухосных кристаллов и исследована связь возникающих при этом явлений с явлением внешней конической рефракции. В настоящей работе тем же методом исследуется прохождение ограниченных световых пучков вдоль волновых осей двухосных кристаллов. Как известно [2], прохождение света в этих направлениях связано с возникновением явления внутренней конической рефракции. Согласно общепринятым взглядам [2], многие характерные особенности этого явления обусловлены ограниченностью световых пучков, применяемых для его наблюдения, но, насколько нам известно, количественной теории, учитывающей ограниченность световых пучков, не существует до сих пор.

Рассмотрим прохождение линейно поляризованного, монохроматического ограниченного светового пучка через прозрачную пластинку из двухосного кристалла, вырезанную перпендикулярно одной из ее волновых осей. Систему координат  $xuz$  выберем также, как и в [1], с единственным отличием, что ось  $z$  направлена вдоль волновой оси перпендикулярно поверхности пластинки. Ненулевые компоненты тензора диэлектрической проницаемости в выбранной системе координат будут иметь вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_x + \epsilon_z - \frac{\epsilon_x \epsilon_z}{\epsilon_y}, \quad \epsilon_{yy} = \epsilon_y, \quad \epsilon_{xz} = \frac{\epsilon_x \epsilon_z}{\epsilon_y}, \\ \epsilon_{zx} &= -\frac{1}{\epsilon_y} \sqrt{\epsilon_x \epsilon_z (\epsilon_z - \epsilon_y) (\epsilon_y - \epsilon_x)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Поле падающего пучка зададим в виде суперпозиции плоских волн различных направлений распространения (см. [1])

$$E^a(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int A(\xi, \eta) e^{-ik(x\xi + y\eta + z\sqrt{n^2 - \xi^2 - \eta^2})} d\xi d\eta. \quad (2)$$

Для двух значений показателя преломления плоских волн, распространяющихся под малыми углами  $\psi$  к волновой оси кристалла и возникающих при преломлении плоских волн, составляющих пучок (2), получим разложение (во втором приближении по  $\psi$ )

$$\begin{aligned} n_{\pm}^2 &\simeq \epsilon_y - \frac{\epsilon_x \epsilon_z}{\epsilon_x \epsilon_z} y^2 (1 \pm \cos \varphi) \psi + \frac{\epsilon_y}{2\epsilon_x \epsilon_z} [\epsilon_y (\epsilon_x + \epsilon_z - 2\epsilon_y) \pm \\ &\pm 2(\epsilon_z - \epsilon_y) (\epsilon_y - \epsilon_x) \cos \varphi] (1 \pm \cos \varphi) \psi^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Разложение (3) получено при условии, что

$$|\psi|_{\max} \sim \frac{\lambda}{a_0} \ll \frac{\sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_x)(\varepsilon_z - \varepsilon_y)}}{|\varepsilon_x + \varepsilon_z - 2\varepsilon_y|}, \quad (4)$$

где  $a_0$  — эффективная ширина пучка; поэтому случай слабой двуосности кристалла должен исследоваться особо.

Применяя метод, описанный в [1], можно найти поле каждой из выходящих плоских волн, соответствующих падающим на пластинку волнам, составляющим пучок (2).

Довольно громоздкие вычисления приводят к следующим результатам. При нормальном падении пучка (2) на кристаллическую пластинку, вырезанную перпендикулярно одной из волновых осей, компоненты поля выходящего пучка определяются следующими выражениями:

1) s-поляризация падающего пучка ( $E_x^s = 0$ ,  $E_y^s = E^s$ )

$$\left. \begin{aligned} E_x^s &= D_{10} D_{01} \frac{i}{4\pi^2} e^{-i(knz + \delta_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta A(\xi, \eta)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \sin[k\sqrt{\xi^2 + \eta^2}(x_0 - x_1\xi)] \times \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\eta_1}{n_0} \xi\right) e^{-ik\Phi(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \\ E_y^s &= D_{10} D_{01} \frac{1}{4\pi^2} e^{-i(knz + \delta_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi, \eta) \left\{ \cos[k\sqrt{\xi^2 + \eta^2}(x_0 - x_1\xi)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \left(\xi + \frac{\eta_1}{n_0} \eta^2\right) \sin[k\sqrt{\xi^2 + \eta^2}(x_0 - x_1\xi)] \right\} e^{-ik\Phi(\xi, \eta)} d\xi d\eta; \end{aligned} \right\} (5)$$

2) p-поляризация падающего пучка ( $E_x^p = E^p$ ,  $E_y^p = 0$ )

$$E_x^p(x_0, x_1) = E_y^p(-x_0, -x_1), \quad E_y^p(x_0, x_1) = E_x^p(x_0, x_1). \quad (6)$$

В формулах (5), (6) использованы обозначения

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= kl(n - n_0), \quad D_{10} = \frac{2n}{n + n_0}, \quad D_{01} = \frac{2n_0}{n + n_0}, \quad n_0 = \sqrt{\varepsilon_{yz}}, \\ x_1 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z - 2\varepsilon_y}{2\varepsilon_{xz}} - D_{01} \frac{\varepsilon_y \varepsilon_{zz}}{2\varepsilon_x \varepsilon_z}, \\ \Phi(\xi, \eta) &= \tilde{x}\xi + y\eta - \frac{z_{\parallel}}{2n} \xi^2 - \frac{z_{\perp}}{2n} \eta^2, \quad x_1 = \frac{l}{4n_0} \frac{\varepsilon_x \varepsilon_z - \varepsilon_y^2}{\varepsilon_x \varepsilon_z}, \\ \tilde{x} &= x - x_0, \quad z_{\parallel} = z - \Delta_{\parallel}, \quad z_{\perp} = z - \Delta_{\perp}, \quad x_0 = \frac{l}{2} \frac{\varepsilon_y \varepsilon_{zz}}{\varepsilon_x \varepsilon_z}, \\ \Delta_{\parallel} &= l \frac{n}{n_0} \left[ \frac{\varepsilon_x \varepsilon_z - \varepsilon_y^2}{2\varepsilon_x \varepsilon_z} + \frac{n_0 - n}{n} \right], \quad \Delta_{\perp} = \Delta_{\parallel} - l \frac{n}{n_0} \left( \frac{\varepsilon_y \varepsilon_{zz}}{2\varepsilon_x \varepsilon_z} \right)^2. \end{aligned} \right\} (7)$$

Формулы (5) — (7), дающие окончательное выражение поля пучка, прошедшего через пластинку и испытавшего внутреннюю коническую рефракцию, получены в приближении, когда в фазах плоских волн, прошедших через пластинку, сохранялись члены, квадратичные по  $\psi$ , а в амплитудах — линейные, что соответствует так называемому параболическому приближению [3].

Непосредственное исследование формул (5) слишком громоздко и поэтому для получения более простых выражений, описывающих основные особенности конической рефракции, сделаем несколько упрощений, неносящих принципиального характера. Пренебрежем в (5) членами, пропорциональными  $x_1$ , так как их появление не связано непосредственно с конической рефракцией пучка. Действительно, эти члены сохраняются и при других ориентациях кристаллической пластинки [1]; они описывают так называемое преобразование мод и могут наблюдаться также и в изотропных средах [4]. Однако в изотропных средах преобразование мод в первом порядке по  $(\lambda/a_0)$  возникает только при наклонном падении,

анизотропия же кристалла приводит к преобразованию мод и при нормальном падении. Исследование этого явления не входит сейчас в нашу задачу.

Далее, из геометрических соображений следует, что если на изотропную пластинку с показателем преломления  $n_0$  падает гомоцентрический пучок лучей, фокус пучка лучей, выходящих из пластинки, оказывается сдвинутым по оси  $z$  относительно фокуса входящего пучка на величину  $\Delta = (n_0 - n)/n$ . В кристалле этот сдвиг будет различным в разных плоскостях, проходящих через ось пучка. Этим обстоятельством обусловлен тот факт, что в (5) входит не координата  $z$ , а смещенные координаты  $z_{\parallel}$  и  $z_{\perp}$ . Однако в большинстве двухосных кристаллов при нормальном падении вдоль волновой оси этим отличием в смещениях можно пренебречь. Например, для арагонита, часто используемого для наблюдения конической рефракции,

$$\frac{\Delta_{\parallel} - \Delta_{\perp}}{\Delta_{\parallel}} \approx 4 \cdot 10^{-4}.$$

В соответствии с этим в (5) положим  $\Delta_{\parallel} \approx \Delta_{\perp} \approx \Delta$ ;  $z_{\parallel} \approx z_{\perp} \approx z - \Delta \equiv z$ . Кроме того, слагаемое  $\xi x_1 (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$  имеет порядок  $x_1 \xi^2$  (или  $x_1 \xi \eta$ ) и им также в параболическом приближении можно пренебречь ( $|x_1 \xi|$ ,  $|x_1 \eta| \ll x_0$ ).

И наконец, в целях упрощения общих формул (5) будем считать, что падающий на пластинку пучок имеет цилиндрическую симметрию, так что функция  $A(\xi, \eta)$  зависит только от  $\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$ . Учитывая все указанные приближения и переходя к интегрированию в полярных координатах, из (5) получим

$$E_x^s = DB_s(r) \sin \varphi e^{-iknz}, \quad E_y^s = D(B_c(r) - B_s(r) \cos \varphi) e^{-iknz}, \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} B_s(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} A(\rho) e^{ik \frac{\rho^2}{2n}} \sin(kx_0 \rho) J_1(kr\rho) \rho d\rho, \\ B_c(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} A(\rho) e^{ik \frac{\rho^2}{2n}} \cos(kx_0 \rho) J_0(kr\rho) \rho d\rho. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$J_n$  — функции Бесселя первого рода,  $D = D_{10} D_{01} e^{-ik\delta_0}$ ,  $\varphi$ ,  $r$  — полярные координаты:  $x - x_0 = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .

Формулы (8), (9) дают явную зависимость поля выходящего пучка от азимутального угла  $\varphi$  при любой структуре падающего пучка. В частности, если электрический вектор образует угол  $\gamma$  с осью  $x$ , для интенсивности выходящего пучка из (8) и (6) получаем

$$I_{\gamma} = |D|^2 \{ |B_c(r)|^2 + |B_s(r)|^2 + 2 \cos(\varphi - 2\gamma) \operatorname{Re} [B_c(r) B_s^*(r)] \}, \quad (10)$$

т. е. при повороте плоскости поляризации падающего излучения на угол  $\gamma$  распределение интенсивности как целое поворачивается на угол  $2\gamma$  вокруг центра полярной системы координат. При падении естественного света распределение интенсивности в выходящем пучке определяется выражением

$$I = |D|^2 \{ |B_c(r)|^2 + |B_s(r)|^2 \}, \quad (11)$$

т. е. не зависит от  $\varphi$ . Эти результаты достаточно хорошо подтверждаются экспериментальными данными [5-7].

Радиальное распределение интенсивности в кольце конической рефракции определяется функциями  $B(r)$ , вид которых зависит от распределения амплитуды поля в пучке на верхней поверхности пластинки.

Как известно, при наблюдении внутренней конической рефракции на верхнюю поверхность кристалла помещается металлическая пластинка с малым отверстием радиуса  $a_0$ , которое освещается параллельным пучком лучей. В этом случае в приближении Кирхгофа

$$A(\rho) = 2\pi A_0(k a_0) \frac{J_1(k a_0 \rho)}{\rho}. \quad (12)$$

( $A_0$  — амплитуда поля в отверстии).

Согласно теории Гамильтона [2], выходящий пучок представляет собой круговой цилиндр радиуса  $x_0$ , ось которого сдвинута относительно нормали к пластинке, проходящей через центр отверстия на величину радиуса цилиндра  $x_0$ .

Учет расходимости пучка, выходящего из отверстия, приводит к тому, что поперечные компоненты поля выходящего пучка даются выражениями (8), (6), где

$$\left. \begin{aligned} B_s(r) &= A_0(k a_0) \int_0^{\infty} e^{ik \frac{z^2}{2\pi}} J_1(k a_0 \rho) J_1(k r \rho) \sin(k x_0 \rho) d\rho, \\ B_c(r) &= A_0(k a_0) \int_0^{\infty} e^{ik \frac{z^2}{2\pi}} J_1(k a_0 \rho) J_0(k r \rho) \cos(k x_0 \rho) d\rho. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

К сожалению, интегралы (13) точно не вычисляются. Для упрощения положим  $z=0$ , т. е. будем считать, что кристаллическая пластинка действует как бесконечно тонкий преобразователь ( $l \rightarrow 0$ ,  $\epsilon_{zz} \rightarrow \infty$ ,  $x_0 = \text{const}$ ) и будем находить поле пучка сразу за преобразователем.

Из (13) при  $z=0$  получаем [8]:

1)  $a_0 < x_0$

$$\left. \begin{aligned} B_s(r) &= \begin{cases} 0, & r > x_0 + a_0; \\ \frac{A_0}{2} \left(\frac{a_0}{r}\right)^{1/2} P_{1/2}(\tilde{r}), & x_0 - a_0 < r < x_0 + a_0; \\ \frac{A_0}{\pi} \left(\frac{a_0}{r}\right)^{1/2} Q_{1/2}(-\tilde{r}), & 0 < r < x_0 - a_0; \end{cases} \\ B_c(r) &= \begin{cases} 0, & r > x_0 + a_0; \\ -\frac{A_0}{2} \left(\frac{a_0}{x_0}\right)^2 F_4\left(\frac{3}{2}, 1; 2, 1; \frac{a_0^2}{x_0^2}, \frac{r^2}{x_0^2}\right), & 0 < r < x_0 - a_0; \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

2)  $a_0 > x_0$

$$\left. \begin{aligned} B_s(r) &= \begin{cases} 0, & r > a_0 + x_0; \\ \frac{A_0}{2} \left(\frac{a_0}{r}\right)^{1/2} P_{1/2}(\tilde{r}), & a_0 - x_0 < r < a_0 + x_0; \\ 0, & 0 < r < a_0 - x_0; \end{cases} \\ B_c(r) &= \begin{cases} 0, & r > a_0 + x_0; \\ \frac{A_0}{2}, & 0 < r < a_0 - x_0; \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где  $\tilde{r} = (a_0^2 + r^2 - x_0^2)/2ra_0$ ;  $P$ ,  $Q$  — функции Лежандра первого и второго рода соответственно;  $F_4$  — гипергеометрическая функция двух переменных.

Как видно из (14) и (15), характер явления внутренней конической рефракции сильно зависит от соотношения между радиусом отверстия  $a_0$  и радиусом  $x_0$  цилиндра рефракции по теории Гамильтона. Если  $x_0 > a_0$  (узкое отверстие), интенсивность выходящего пучка равна нулю при  $r > x_0 + a_0$  (см. рисунок). В круге  $0 < r < x_0 - a_0$  распределение интенсивности определяется функциями  $F_4$  и  $Q_{1/2}$  и интенсивность мала для достаточно узких отверстий. Так, для  $r$ ,  $a_0 \ll x_0$

$$I(r) \approx |D|^2 \frac{A_0^2}{4} \left(\frac{a_0}{x_0}\right)^4 \left[1 + 4\left(\frac{r}{x_0}\right)^2\right]$$

для неполяризованного света. Если  $a_0 = 0,1$  мм,  $x_0 = 1$  мм, то

$$I(0) \approx 2.5 \cdot 10^{-5} |D|^2 A_0^2.$$

В области классического кольца конической рефракции ( $x_0 - a_0 < r < x_0 + a_0$ ) функция  $B_c(r)$  точно не вычисляется. Однако для  $a_0 \ll x_0$  ее можно найти, пользуясь асимптотическим представлением функций  $J_\nu(kr\rho)$ . В результате получается

$$B_c(r) \approx B_s(r) \approx \frac{A_0}{2} \left(\frac{a_0}{r}\right)^{1/2} P_{1/2}\left(\frac{r-x_0}{a_0}\right), \quad (16)$$

т. е. распределение интенсивности для неполяризованного света дается выражением

$$I(r) = |D|^2 \frac{A_0^2}{2} \left(\frac{a_0}{x_0}\right) P_{1/2}^2\left(\frac{r-x_0}{a_0}\right). \quad (17)$$

На внешнем краю кольца ( $r = x_0 + a_0$ )

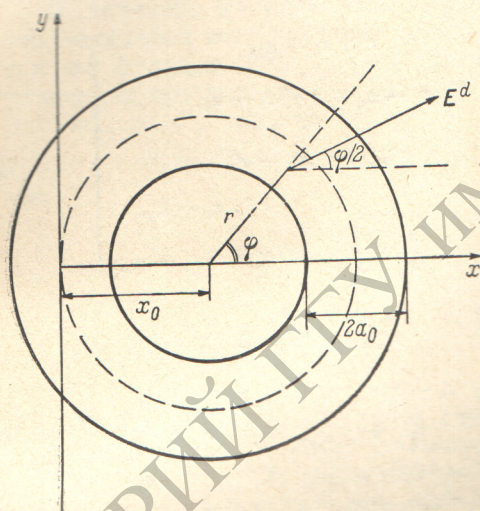
$$I(a_0 + x_0) \approx 0.5 |D|^2 A_0^2 \left(\frac{a_0}{x_0}\right),$$

а на внутреннем краю ( $r = x_0 - a_0$ ) функция  $P_{1/2}$  имеет логарифмическую особенность, и, следовательно, в окрестности внутреннего края кольца требуется более точное приближение.

В центре кольца из (17) получаем

$$I(x_0) \approx |D|^2 A_0^2 \frac{8\pi (a_0/x_0)}{[\Gamma(0.25)]^2} \approx 0.06 |D|^2 A_0^2 \left(\frac{a_0}{x_0}\right),$$

т. е. интенсивность примерно в 8 раз меньше, чем на внешнем краю кольца. Из вышесказанного следует, что в кольце  $x_0 - a_0 < r < x_0 + a_0$  имеется минимум освещенности, который,



по-видимому, и наблюдается экспериментально в виде темного кольца Поггендорфа [2]. К сожалению, свойства функций  $P$ , для дробных индексов исследованы недостаточно, поэтому трудно определить точные положение и величину этого минимума, не прибегая к численному интегрированию.

Соотношение (16) позволяет объяснить некоторые дополнительные поляризационные закономерности, наблюдаемые на опыте. Из (6), (8) и (16) следует, что если электрический вектор падающего линейно поляризованного пучка образует угол  $\gamma$  с осью  $x$ ,

то электрический вектор прошедшего пучка в кольце  $x_0 - a_0 < r < x_0 + a_0$  образует с осью  $x$  угол  $\gamma_d$ , где

$$\operatorname{tg} \gamma_d = \frac{\sin \gamma + \sin(\varphi - \gamma)}{\cos \gamma + \cos(\varphi - \gamma)} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

т. е. не зависит от  $\gamma$ , а направление электрического вектора прошедшего пучка делит пополам угол между плоскостью оптических осей и плоскостью, проходящей через ось цилиндра внутренней рефракции и точку наблюдения [5] (см. рисунок).

В случае  $a_0 > x_0$  (широкое отверстие) при  $r > a_0 + x_0$  интенсивность также равна нулю, т. е. вся картина конической рефракции имеет форму круга радиуса  $(a_0 + x_0)$ . Центральная область круга радиуса  $a_0 - x_0$  имеет равномерную освещенность, такую же как и освещенность отверстия; поляризация центральной области совпадает с поляризацией падающего пучка. Для определения распределения интенсивности в кольце  $a_0 - x_0 < r < a_0 + x_0$  шириной  $2x_0$  необходимы численные расчеты по общим приведенным здесь формулам.

Таким образом, изложенная здесь теория позволяет качественно объяснить все наблюдаемые на опыте закономерности внутренней конической рефракции. Количественное сопоставление теории с экспериментальными

результатами не представляется в настоящее время возможным ввиду отсутствия численных данных по распределению интенсивности в кольце конической рефракции.

#### Литература

- [1] А. М. Бельский, А. П. Хапалюк. Опт. и спектр., 44, 540, 1978.
- [2] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. «Наука», М., 1970.
- [3] А. М. Бельский, А. П. Хапалюк. Опт. и спектр., 35, 117, 1973.
- [4] А. М. Бельский, А. П. Хапалюк. Опт. и спектр., 38, 154, 1975.
- [5] Н. Lloyd. Trans. Roy. Irish Acad., 17, 145, 1833.
- [6] R. P. Vigns. Appl. Opt., 3, 1505, 1964.
- [7] М. М. Дроздов, В. Б. Немтинов. Тр. МВТУ им. Н. Э. Баумана, вып. 184, 171, М., 1974.
- [8] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1963.

Поступило в Редакцию 4 апреля 1977 г.

---