МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.В.Максимей, Р.С.Галиев, А.С.Аксенов

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
по курсу "Исследование операций"

Гомель I98I

УДК 519.9

Рецензенты: Е.И.Симанук, доцент кафедры вычислительной техники БелИИЖТа, руководитель научно-исследовательской лаборатории АСУ; В.П.Казанцев, зав.кафедрой вычислительной техники БелИИЖТа; М.И.Кравчук, доцент кафедры математики Гомельского политехнического института

В практикуме рассмотрены основные математические методы решения задач для автоматизации управления производством: линейного и дискретного программирования, теории расписаний, динамического программирования, теории игр и теории массового обслуживания.

Предназначен для студентов IУ-У курсов специальности "Математика".

$\frac{20501-035}{М\ 339-81}$ 10 - 81

I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП) формулируется следующим образом.

Найти $x^T=(x_1,\dots,x_n)$, доставляющее экстремум функции

$L(x)=(c,x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow min\ (max)$, где $c^T=(c_1,\dots,c_n)$

При ограничениях на область изменения переменных $x_j,\ j=\overline{1,n}$:

$$AX\leq B,\quad x\geq 0, \qquad (I)$$

где $A=(a_{ij})$ – матрица размерности $m\times n$,

B – вектор размерности m;

Или (I) в развернутом виде

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leq b_i,\ i=\overline{1,m}$

$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}$.

В зависимости от вида системы ограничений (I) (в форме равенств, либо в форме неравенств, либо одновременно и в той и другой формах) различаются каноническая, симметрическая и общая форма ЗЛП ([I] , с.104-110). Все эти формы эквивалентны в том смысле, что ЗЛП из одной может быть преобразована в ЗЛП ~~любой вид~~ другой формы. В дальнейшем рассматриваем ЗЛП в симметрической форме (т.е. ограничения заданы в виде (I)).

ЗЛП может иметь либо единственное решение, либо бесчисленное множество решений, либо неограниченное решение, либо не иметь решений вовсе.

Приведем формулировку двойственной ЗЛП к исходной

$L(y)=(B,y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \longrightarrow max\ (min)$

$y^T A\geq c^T,\quad y\geq 0$.

Имеет место следующая теорема, известная под названием принципа двойственности [4, с.266-277].

Теорема. Исходная ЗЛП имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение двойственная к ней ЗЛП. Причем, если x^* – решение исходной задачи и y^* – двойственной, то

$(c,x^*)=(B,y^*)$.

Для решения ЗЛП широко используется симплекс-метод, модифицированный симплекс-метод [2], двойственный симплекс-метод [4, с.266-277].

Модифицированный симплекс-метод или метод последовательного улучшения плана используется для решения так называемой транспортной ЗЛП, математическая модель которой имеет вид:

найти $X=(x_{i,j})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, доставляющее экстремум функции

$$L(x)=CX=\sum_{i,j=1}^{m,n} c_{ij}\, x_{ij} \to min$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i, \quad i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, \quad j=\overline{1,n},$$

$$x_{ij}\geq 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}.$$

Причем $\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{j=1}^{m} b_j$, т.е. выполнено условие сбалансированности. При нарушениях условия сбалансированности транспортная задача может быть сведена к задаче с "правильным балансом" [3, с. 78-80; 2, с. I I0-II5].

Лабораторная работа I

СИМПЛЕКС- МЕТОД

Справка ЗЛП (I) представляется в канонической форме:

$$L(x)=(c,x) \to min\,(max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + x_{n+1} = b_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j + x_{n+m} = b_m, \quad \text{где } b_i \geq 0, \ i=\overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j=\overline{1,n+m}.$$

Тогда вектор-столбцы матрицы $A=(A_1,\dots,A_{n+m})$ и вектор-столбец B можно представить как линейные комбинации вектор-столбцов $A_{n+1},\dots,A_{n+m}$, которые образуют базис в R^m $(rang\ A=m)$:

$$A_j=\sum_{k=1}^{m} a_{kj} A_{n+k}$$

$$B=\sum_{k=1}^{m} b_k A_{n+k}$$

В дальнейшем рассмотрим задачу минимизации целевой функции (если рассматривается задача максимизации, то достаточно заменить в ней знак на противоположный у компонент вектора c).
Составим для нее симплекс-таблицу:

		A_1	A_2	A_3	...	A_n	A_{n+1}	A_{n+2}	...	A_{n+m}	B
Базис	C	C_1	C_2	C_3	...	C_n	C_{n+1}	C_{n+2}	...	C_{n+m}	
A_{n+1}	C_{n+1}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	1	0	...	0	b_1
A_{n+2}	C_{n+2}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	0	1	...	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_{n+m}	C_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	0	0	...	1	b_m
Z	-	Z_1	Z_2	Z_3	...	Z_n	C_{n+1}	C_{n+2}	...	C_{n+m}	Z_0
Z_j-C_j		Z_1-C_1	Z_2-C_2	Z_3-C_3	...	Z_n-C_n	0	0	...	0	

Элементы a_{ij} - коэффициенты разложения столбца A_j в базисе, а элементы Z - строки вычисляются по формулам:

$$Z_j=\sum_{i=1}^{m} C_{n+i}\, a_{ij}. \qquad \text{(I)}$$

Значение целевой функции Z_0 определяется из выражения

$$Z_0=\sum_{i=1}^{m} C_{n+i}\, b_i.$$

Условие оптимальности плана, соответствующего базису, при задаче минимизации целевой функции имеет вид

$$Z_j - C_j \leq 0; \quad j=\overline{1,n+m}$$

(при максимизации целевой функции добиваются выполнения неравенства $Z_j-C_j\geq 0$, $j=\overline{1,n+m}$).

Если план оптимален, решение задачи заканчивается, иначе определяется вектор из внебазисных векторов, введением которого в базис план может быть улучшен. Таким вектором будет вектор A_k, соответствующий

$$Z_k - C_k = \max_{j=\overline{1,n}} (Z_j - C_j).$$

Он называется в этом случае разрешающим вектор-столбцом.

Затем определяется вектор A_ℓ, который должен быть выведен из базиса (базис содержит всегда ровно m векторов) из условия

$$\frac{b_\ell}{a_{\ell k}} = \min_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\}, \quad (a_{ik} > 0, \ b_\ell > 0)$$

ℓ - строка, соответствующая вектору A_ℓ, называется разрешающей. Тогда элемент таблицы $a_{\ell k}$ назовем разрешающим элементом.

Введем в базис вектор-столбец A_k вместо A_ℓ, тогда коэффициенты разложения в новом базисе вычисляются по формулам:

$$a_{\ell j} = a_{\ell j} / a_{\ell k}, \quad \hat{b}_\ell = b_\ell / a_{\ell k} \tag{2}$$

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{\ell j} \cdot \frac{a_{ik}}{a_{\ell k}}, \quad i \neq \ell; \ i = \overline{1,n}$$

$$\hat{b}_i = b_i - b_\ell \cdot \frac{a_{ik}}{a_{\ell k}}, \quad i \neq \ell, \ i = \overline{1,n}$$

Так как A_k введен в базис, то коэффициенты его разложения $a_{\ell k} = 1$; $a_{ik} = 0$ $(i \neq \ell)$. Элементы Z - строки вычисляются аналогично (I). При этом коэффициенты целевой функции в новой системе координат могут быть вычислены аналогично $\hat{a}_{ij}$:

$$\hat{c}_k = 0 \tag{3}$$

$$\hat{c}_i = c_i - c_k \frac{a_{\ell i}}{a_{\ell k}}, \quad i \neq k.$$

Далее процедура повторяется до получения решения ЗЛП.

Данный алгоритм позволяет найти только одно решение ЗЛП (если оно конечно), если же ЗЛП имеет бесчисленное множество решений, то они могут быть определены через альтернативные решения [I, т.I, с. I42-I44].

Задание I. Найти с помощью симплекс-метода решение ЗЛП X^*, а также соответствующее значение целевой функции $L(X^*)$.

Задание 2. Установить, что или ЗЛП не имеет решения, или $L(X)$ неограниченно в области изменения X. В случае, если решений бесчисленное множество, указать хотя бы некоторые альтернативные решения ЗЛП.

Пример. Для ЗЛП (I) (с минимизацией целевой функции), в, которой

$$C^T = (2, 1, 1, -4, 3, 1)$$

$$B^T = (3, 2, 5)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 6 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполнить пункты I,2 задания.

Перейдем к канонической форме ЗЛП путем введения новых переменных X_7, X_8, X_9, тогда ЗЛП имеет вид

$$(\bar{C}, X) \to \min,$$

$$\bar{A}\bar{X} = B$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,9},$$

где

$$\bar{X}^T = (x_1, \dots, x_9), \quad \bar{C}^T = (2, 1, 1, -4, 3, 1, 0, 0, 0)$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 6 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Составим симплекс-таблицу для базиса из векторов A_7, A_8, A_9.

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	b
Базис	C	2	1	1	-4	3	1	0	0	0	
A_7	0	-1	0	2	4	0	-1	1	0	0	3
A_8	0	5	-3	6	-1	2	0	0	1	0	2
A_9	0	4	3	2	1	0	0	0	0	1	5
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$		-2	-1	-1	4	-3	-1	0	0	0	

Так как $Z_4 - C_4 = \max(Z_j - C_j)$, то разрешающий столбец соответствует A_4 и так как $\frac{b_1}{a_{14}} = \min\left(\frac{b_1}{a_{14}}, \frac{b_3}{a_{34}}\right) = \frac{3}{4}$, то разрешающая строка соответствует первому базисному вектору, т.е. (A_7). Вводим A_4 в базис вместо вектора A_7, используя формулы (2) для пересчета таблицы. При этом полезно "правило прямоугольника", реализующее эти формулы. Оно состоит в следующем:

а) в предыдущей таблице все элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент, получаем $\hat{a}_{lj}$, $j=\overline{1,9}$, b_l;

б) для вычисления $\hat{a}_{ij}$ рассмотрим "прямоугольник", одной вершиной которого является a_{ij}, а тремя другими $\hat{a}_{lj}$, $\hat{a}_{lk}$ и $\hat{a}_{ik}$, тогда из произведения элементов диагонали, содержащей $\hat{a}_{lk}$ – разрешающий элемент, вычитается произведение элементов другой диагонали.

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	b
Базис	c	2	1	1	-4	3	1	0	0	0	
A_4	-4	-1/4	0	1/2	1	0	-1/4	1/4	0	0	3/4
A_8	0	19/4	-3	13/2	0	2	-1/4	1/4	1	0	11/4
A_9	0	17/4	3	3/2	0	0	1/4	-1/4	0	1	17/4
z_j		1	0	-2	-4	0	1	0	0	0	-3
$z_j - c_j$		-1	-1	-3	0	-3	0	-1	0	0	

Таким образом, найдено решение ЗЛП

$x^{*T} = (0, 0, 0, 3/4, 0, 0, 0, 11/4, 17/4)$

причем $L(\bar{x}^*) = -3$.

2. Проверим, является ли найденное решение единственным. Признаком бесконечного множества решений является существование внебазисных переменных на этапе заключительной итерации преобразований вектор-строки C по формулам (3), которые соответствуют нулевым компонентам вектора C. Альтернативные решения при этом могут быть найдены последовательным введением в базис вектор-столбцов, соответствующих этим переменным [I, т.I, с. I42].

Проведем итерацию с вектор-строкой C:

2	1	1	-4	3	1	0	0	0
$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0

Фрагмент таблицы для вектора C.

Тогда по "правилу прямоугольника" находим вектор $\hat{C}$:

$\hat{c}_1 = 2 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 1,$

$\hat{c}_2 = 1,$

$\hat{c}_3 = 1 - (-4) \cdot \frac{1}{2} = 3,$

$\hat{c}_4 = 0,$

$\hat{c}_5 = 3,$

$\hat{c}_6 = 1 - (-4) \cdot (-\frac{1}{4}) = 0,$

$\hat{c}_7 = 1,$

$\hat{c}_8 = 0,$

$\hat{c}_9 = 0,$

$\hat{C} = (1, 1, 3, 0, 3, 0, 1, 0, 0).$

Из внебазисных переменных только x_6 соответствует нулевой компоненте вектора C'. Для нахождения альтернативного решения вводим в базис A_6, так как $\frac{b_3}{a_{36}}$ – единственный элемент строго больший нуля, то из базиса выводится A_9. Проведем эту симплекс-итерацию.

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	b
Базис	c	2	1	1	-4	3	1	0	0	0	
A_4	-4	4	3	2	1	0	0	0	0	1	5
A_8	0	9	0	8	0	2	0	0	1	1	7
A_6	1	17	12	6	0	0	1	-1	0	4	17
z_j		1	0	-2	-4	0	1	-1	0	0	-3
$z_j - c_j$		-1	-1	-3	0	-3	0	-1	0	0	

т.е. найдено альтернативное решение

$x_a^{*T} = (0, 0, 0, 5, 0, 17, 0, 7, 0)$

Тогда все решения нашей ЗЛП описываются в виде

$$x_\alpha^* = \alpha x^* + (1 - \alpha) x_a^*, \text{ где } 0 \le \alpha \le 1$$

Лабораторная работа 2

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

Справка. Под анализом линейных моделей на чувствительность понимается нахождение области изменений параметров ЗЛП, при которых сохраняется базис оптимального решения [I с. 167-198]. Анализ линейных моделей на чувствительность имеет три аспекта:

- анализ на чувствительность при изменении параметров целевой функции (C);
- анализ на чувствительность при изменении параметров ограничений на ресурсы (B);
- анализ на чувствительность при изменении стоимости единицы изделия (A).

Независимую переменную X_i будем называть базисной, если соответствующий ей вектор-столбец коэффициентов при x_i входит в базис; в противном случае – x_i определим как внебазисную переменную.

Анализ на чувствительность при изменении параметров целевой функции проводится в следующей последовательности:

I. Решение ЗЛП симплекс-методом.
2. Проводятся все симплекс-итерации с вектором параметров целевой функции.
3. Для внебазисных переменных компоненты вектора C на заключительной итерации указывают максимальное приращение соответствующей компоненты вектора C в начальной ЗЛП.

Для базисной переменной интервал изменения компоненты вектора C определяется следующим образом: к вектору C на заключительной итерации прибавляется вектор-строка соответствующей базисной переменной умноженая на величину δ ; из условия о сохранения знака выбранных компонент вектора C определяется значение δ и интервал устойчивости.

Анализ чувствительности при изменении параметров ограничений на ресурсы проводится с использованием теоремы: приращение прибыли ($\Delta \ell$) при изменении ограничений на ресурсы Δb_i в ЗЛП может быть определено как

$$\Delta \ell = \sum_{i=1}^{m} \Delta b_i\, y_i ,$$

где y_i – решение двойственности ЗЛП.

При условии, что выполняются условия

$$\Delta b_i \in [-b_i'', b_i^*],$$

где $b_i'' = \max\limits_{j,\, d_{ij} > 0} \frac{x_i}{d_{ij}}$; $\quad b_i^* = \min\limits_{j,\, d_{ij} < 0} \frac{x_i}{|d_{ij}|}$;

d_{ij} – элементы обратной матрицы B , сформированной из вектор-столбцов исходной матрицы A , соответствующих базисным переменным.

Исследование проводится следующим образом:

I. Найти решения прямой и двойственной задач ЗЛП.
2. Исследовать чувствительность с использованием вышеприведенной теоремы.

Анализ на чувствительность при изменении стоимости единицы изделия будем проводить только при варьировании вектор-столбцов, не входящих в базис [I с. 186].

I. Введение дополнительной переменной с коэффициентами $(a_{i\, n+1})_{i=\overline{1,m}}$ и стоимостью C_{n+1} целесообразно при выполнении условия:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i\, n+1}\, y_i^* > C_{n+1} . \qquad (I)$$

2. Для определения значения экстремального приращения (δ) одного коэффициента $a_{i\, m+1}$ при внебазисной переменной, которую целесообразно вводить в базис, поступают аналогичным образом. Из неравенства

$$(a_{i_0\, n+1} + \delta)\, y_{i_0}^* + \sum_{i \neq i_0} a_{i\, n+1}\, y_i^* < C_{n+1} \qquad (2)$$

находят допустимое значение δ, при котором (2) еще удовлетворяется.

Задание I. Найти решения прямой и двойственной ЗЛП.
2. Провести анализ на чувствительность при изменении параметров целевой функции.
3. Установить дополнительную прибыль от увеличения ресурса $\Delta b = (\Delta b_1, \ldots, \Delta b_m)$.
4. Определить целесообразность введения нового

типа продукта x_{n+1} с уровнем затрат $(a_{i\ n+1})_{i=1,m}$ и прибылью от реализации c_{n+1}.

5. Найти интервал изменения вектора стоимости изделия A_{10}, при котором базис остается оптимальным.

Пример I. Найти хотя бы одно решение прямой и двойственной ЗЛП из лабораторной работы I:

$C=(2,1,1,-4,3,1)$

$B^T=(3,2,5)$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 6 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найти интервалы устойчивости для компонент вектора C для найденного базиса.
3. Установить целесообразность изменения ограничений на ресурсы на величину $\Delta B=(1,-2,3)$.
4. Определить, целесообразно ли введение нового типа продукта x_7 с уровнем затрат $(-2, 1, 1)$ и прибылью от реализации равной 2.
5. Найти интервал изменения стоимостей A_8, в которых базис остается оптимальным.

Решение. I. Пользуясь результатами лабораторной работы I, имеем: $X^*=(0,0,0,3/4,0,0,0,11/4,17/4)$ оптимальным является базис из A_4, A_8, A_9 (A_i – представляет собой i вектор-столбцы матрицы ЗЛП в канонической форме). Пусть A является матрицей, составленной из вектор-столбцов A_4, A_8, A_9. Найдем решение двойственной задачи [I c.181].

$$(A)^T Y^* = \tilde{C}, \text{ где } \tilde{C}=(C_4, C_8, C_9)$$

$$Y^*=(A^T)^{-1}\tilde{C}.$$

Поскольку

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ то } (A^T)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$Y^*=(-1,0,0); \quad L(Y^*)=-3=L(X^*).$$

Заметим, что

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (*)$$

2. Вектор на заключительной итерации (см. П2 лабораторной работы I) имеет вид:

$C=(1,1,3,0,3,0,2,0,0)$

Таким образом, максимальное приращение компонент C, соответствующих внебазисным переменным, определено самим вектором C. Найдем интервалы изменения компонент вектора для базисных переменных x_4, x_8, x_9. Вектор-строки, соответствующие базисным переменным, указаны в последней симплекс-таблице.

$$D_4=\left(-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0\right)$$

$$D_8=\left(\frac{19}{4}, -3, \frac{13}{2}, 0, 2, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right)$$

$$D_9=\left(\frac{17}{4}, 3, \frac{3}{2}, 0, 0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 1\right)$$

$$C-\delta D_4=\left(1+\frac{\delta}{4}, 1, 3-\frac{\delta}{2}, 0, 3, +\frac{\delta}{4}, 2-\frac{\delta}{4}, 0, 0\right)$$

Отсюда условие сохранения знаков внебазисных компонент вектора C для сохранения в базисе A_4 имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} 1+\frac{\delta_4}{4} &\geq 0 \\ 3-\frac{\delta_4}{2} &\geq 0 \\ 2-\frac{\delta_4}{4} &\geq 0 \\ +\frac{\delta_4}{4} &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{ т.е. } +6 \geq \frac{\delta_4}{4} \geq 0$$

Аналогично для сохранения в базисе A_8 получаем:

$$C-\delta_8 D_8=\left(1-\frac{19\delta_8}{4}, 1+3\delta_8, 3-\frac{13\delta_8}{2}, 0, 3-2\delta_8, +\frac{\delta_8}{4}, 2-\frac{\delta_8}{4}, 0, 0\right)$$

$$\left.\begin{aligned} 1-\frac{19}{4}\delta_8 &\geq 0 \\ 1+3\delta_8 &\geq 0 \\ 3-\frac{13}{2}\delta_8 &\geq 0 \\ 3-2\delta_8 &\geq 0 \\ +\frac{\delta_8}{4} &\geq 0 \\ 2-\frac{\delta_8}{4} &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{ т.е. } +\frac{14}{19} \geq \delta_8 \geq 0;$$

Для сохранения в базисе A_9 устанавливаем:

$$c - \delta D_9 = (1 - \frac{17}{4}\delta_9,\ 1 - 3\delta_9,\ -\frac{3}{2}\delta_9 + 3,\ 0,\ 3,\ -\frac{1}{4}\delta_9,\ 2 + \frac{\delta_9}{4},\ 0,\ 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \frac{17}{4}\delta_9 \geq 0 \\ 1 - 3\delta_9 \geq 0 \\ 3 - \frac{3}{2}\delta_9 \geq 0 \\ -\frac{\delta_9}{4} \geq 0 \\ 2 + \frac{\delta_9}{4} \geq 0 \end{array}\right\} \text{ откуда } \ 0 \geq \delta_9 \geq -8$$

Итак, найдены интервалы изменения коэффициентов целевой функции при базисных переменных x_4, x_7, x_9.

3. Для определения прибыли от увеличения ресурса предварительно определим интервалы устойчивости изменения компонент вектора B. Поскольку 2-й и 3-й столбцы матрицы $\hat{A}^{-1}$ (см. (*)) не содержат отрицательных элементов, то $b_2^в = +\infty$; $b_2^н = \frac{x_7^*}{1} = \frac{11}{4}$, т.е. интервал для $\Delta b_2 = [-\frac{11}{4}, \infty]$. Аналогично $b_3^в = +\infty$; $b_3^н = \frac{x_3}{1} = \frac{11}{4}$, т.е. интервал для $\Delta b_3 = [-\frac{11}{4}, \infty]$. Наконец $b_1^в = \frac{x_1^*}{1/4} = 17$; $b_1^н = \max\{\frac{x_4}{1/4}, \frac{x_5}{1/4}\} = 17$, т.е. интервал для $\Delta b_1 = [-17, 17]$.

Вывод: поскольку компоненты исследуемого изменения $\Delta b_i \in [-b_i^н, b_i^в]$, то изменение ресурса на заданную величину не нарушает оптимальности базиса. Определим при этом приращение прибыли от увеличения ресурса на величину $\Delta b = [1 - 2, 3]$:

$$\Delta L = \sum_{i=1}^{3} \Delta b_i y_i^* = -1$$

Итак, для получения приращения прибыли нецелесообразно увеличение ресурса на величину Δb.

4. Проверим выполнение соотношения (I):

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i\,n+1} y_i^* = (-2) \times (-1) = 2 \leq 2$$

Вывод: нецелесообразно введение выпуска нового продукта.

5. Составим систему неравенств (2). Пусть вектор A_3 получил приращение $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Вводить A_3 нецелесообразно в базис при выполнении ограничений в двойственной задаче для Y_i^*:

$$(A_3 + \delta)\, Y^* > C_3,$$

т.е. когда выполняется неравенство

$$(2 + \delta_1)\cdot(-1) + (6 + \delta_2)\cdot 0 + (2 + \delta_3)\cdot 0 > 1,$$

отсюда $\delta_1 < -3$.

Значит, для сохранения оптимальности базиса при введении в него A_3 необходимо, чтобы δ_1 было не больше (-3). Итак, интервалы устойчивости изменения коэффициентов A_3 найдены:

$$-\infty < a_{13} < -1$$
$$-\infty < a_{23} < +\infty$$
$$-\infty < a_{33} < +\infty$$

Лабораторная работа 3

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Справка. Известны разные методы получения начального опорного плана в транспортной задачи такие, как метод северо-западного угла, метод минимума по строке, метод минимального элемента матрицы. Так как все они однотипны, опишем алгоритм метода минимального элемента матрицы.[5].

I. Отыскивается $c_{i_1 j_1} = \min c_{ij}$. Далее элемент начального опорного плана $x_{i_1 j_1}$ полагается равным $\min\{a_{i_1}, b_{j_1}\}$.

2. Если $a_{i_1} < b_{j_1}$, то корректируется значение b_{j_1} на $b_{j_1} - a_{i_1}$, иначе ($b_{j_1} > a_{j_1}$) корректируется аналогично a_{i_1}. При этом в первом случае $x_{i_1 j_k} = 0 (j_k \neq j_1)$, а во втором – $x_{i_k j_1} = 0 (i_k \neq i_1)$. Эта процедура повторяется до полного заполнения матрицы X.

   При $a_{i_1} = b_{j_1} \Rightarrow x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$

3. Если матрица X заполнена, то опорный план найден при условии, что число ненулевых компонент его равно $m+n-1$. Иначе-начальный план вырожден, и для получения невырожденного начального плана применяется ε - прием, т.е. полагают

$$a_i' = a_i + \varepsilon \quad i = \overline{1, m};$$

$$b_j' = \begin{cases} b_j & j = \overline{1, n-1} \\ b_n + m\varepsilon \end{cases},$$

где ε достаточно мало, чтобы после решения задачи округленной план удовлетворял исходной задаче; и отыскивается для такой задачи начальный опорный план.

В. Алгоритм метода последовательного улучшения плана состоит в следующем:

I. Строится начальный опорный план.

2. Проверяется опорный план на оптимальность следующим образом: отыскиваются неизвестные переменные u_i и v_j такие, что для всех $x_{ij} \neq 0$ опорного плана

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}).$$

Эта система содержит $m+n$ неизвестных и $m+n-1$ уравнений, поэтому имеет множество решений.

Отыскивается одно из них.

Найдем для всех $x_{ij} = 0$

$$\bar{c}_{ij} = u_i + v_j .$$

Признак оптимальности состоит в выполнении условий:

$$\bar{c}_{ij} - c_{ij} \leq 0 .$$

3. Если план не оптимален, то существует

$$\bar{c}_{ij} - c_{ij} > 0 .$$

План можно улучшить, введя в него компоненту $x_{i_0 j_0} \neq 0$, соответствующую

$$\max(\bar{c}_{ij} - c_{ij}) = \bar{c}_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_0} .$$

Задание I. Найти начальный опорный план методом минимального элемента матрицы.

2. Решить транспортную задачу методом последовательного улучшения.

Пример. Для транспортной задачи с минимизацией целевой функции, в которой

$$A = (50, 20, 30, 40)$$

$$B = (15, 30, 65, 20, 10)$$

$$C = \begin{pmatrix} 14, & 10, & 2, & 5, & 10 \\ 11, & 5, & 4, & 11, & 3 \\ 9, & 8, & 12, & 1, & 18 \\ 1, & 4, & 9, & 17, & 5 \end{pmatrix},$$

найти оптимальный план перевозок.

I. Найдем начальный опорный план методом минимального элемента матрицы. Составим таблицу из матрицы X, дополнительной строки B и дополнительного столбца A.

						A
	14	10	2	5	10	50
	11	5	4	11	3	20
	9	8	12	1	18	30
	1	4	9	17	5	40
B	15	30	65	20	10	

Строим матрицу ~~начального~~ плана X, поскольку $\min c_{ij} = c_{34} = c_{41}$, то начинаем ~~заполнять~~ матрицу с любого из этих элементов, например с x_{41}. ~~Так как~~ $\min(a_4, b_1) = b_1 = 15$, то $x_{41} = b_1 = 15$, корректируем a_4 ~~на~~ $(a_4 - x_{41})$.

$$x_{11} = x_{21} = x_{31} = 0 .$$

Далее ~~рассматриваем~~ C без первого столбца и выбираем из оставшихся ~~членов матрицы~~ минимальный (c_{34}). Действуем аналогично. ~~Следующий~~ минимальный элемент C без первого и четвертого ~~столбцов~~ (c_{13}). Так как $\min(a_1, b_3) = a_1$, то корректируем $b_3 = 15$ и $x_{12} = x_{15} = 0$.

Продолжая ~~вычисления~~ аналогичным образом, получим матрицу

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 20 & 0 \\ 15 & 25 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так, $m+n-1 = 8$ и количество ~~чисел~~ $x_{ij} \neq 0$ тоже равно 8. План не вырожден.

2. Решим ~~транспортную~~ задачу.

Так как $x_{13}, x_{23}, x_{25}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{41}, x_{42}$ не равны нулю, то система ~~уравнений~~ для u_i, v_j имеет вид:

$$u_1 + v_3 = 2$$
$$u_2 + v_3 = 4$$
$$u_2 + v_5 = 3$$
$$u_3 + v_2 = 8$$
$$u_3 + v_3 = 12$$
$$u_3 + v_4 = 1$$
$$u_4 + v_1 = 1$$
$$u_4 + v_2 = 4$$

Положим $u_1 = 2$, тогда

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 4 \\ u_3 = 12 \\ u_4 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 = -7 \\ V_2 = -4 \\ V_3 = 0 \\ V_4 = -11 \\ V_5 = -1 \end{cases}$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 2 & -9 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & 8 & 12 & 1 & 11 \\ 1 & 4 & 8 & -3 & 7 \end{pmatrix} \quad \bar{C} - C = \begin{pmatrix} -19 & -12 & 0 & -14 & -9 \\ -14 & -5 & 0 & -18 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 & 2 \end{pmatrix}$$

Так как $\bar{C}_{45} - C_{45} = 2 > 0$, то введением в базисный план элемента $x_{45} \neq 0$ план можно улучшить

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10+\theta_1 & 0 & 10-\theta_1 \\ 0 & 5+\theta_1 & 5-\theta_1 & 20 & 0 \\ 15 & 25-\theta_1 & 0 & 0 & \theta_1 \end{pmatrix}$$

Найдем, каким должно быть θ_1, чтобы план был опорным. Так, $x_{45} \neq 0$, т.е. к строке (4) и столбцу (5) прибавилось θ_1, то его надо вычесть из другого ненулевого элемента столбца (5) и строки (4), затем прибавить к ненулевым элементам строк и столбцов, в которых было вычтено θ_1 , т.е. к x_{42} и x_{25} . Вычтя из x_{33} θ_1 , мы сбалансируем введение θ_1 . Рассмотрим образовавшиеся элементы вида $x_{ij} - \theta_1$ и найдем $\min(x_{ij} - \theta_1)$. Так как, введя в опорный план дополнительный элемент, мы должны из него вывести один из его элементов $(m+n-1 = const)$, то, полагая

$$\theta_1 = x_{i_0 j_0} : x_{i_0 j_0} - \theta_1 = \min(x_{ij} - \theta_1),$$

мы получим искомый улучшенный опорный план $(\theta_1 = 5)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 20 & 0 \\ 15 & 20 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Проверим его на оптимальность

$$u_1 + V_3 = 2$$
$$u_2 + V_3 = 4$$
$$u_2 + V_5 = 3$$
$$u_3 + V_2 = 8$$
$$u_3 + V_4 = 1$$
$$u_4 + V_1 = 1$$
$$u_4 + V_2 = 4$$
$$u_4 + V_5 = 5$$

Положим $u_1 = 2$, тогда

$$\begin{matrix} u_1 = 2 & V_1 = -5 \\ u_2 = 4 & V_2 = -2 \\ u_3 = 10 & V_3 = 0 \\ u_4 = 6 & V_4 = -9 \\ & V_5 = -1 \end{matrix}$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & -5 & 3 \\ 5 & 8 & 10 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} - C = \begin{pmatrix} -17 & -10 & 0 & -13 & -7 \\ -12 & -5 & 0 & -16 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -20 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как $\bar{C}_{ij} - C_{ij} \leq 0$, то получено решение транспортной задачи.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Особенностью задач данного типа является требование целочисленности решения, которое позволяет в отдельных случаях построить более эффективные алгоритмы решения ЗЛП, чем симплекс-метод. На примере задачи о назначениях, которая является частным случаем транспортной задачи, рассмотрим решения таких задач венгерским методом. Содержательно задача о назначениях формулируется следующим образом.

Имеется n видов работ $A_1, \ldots, A_n$ и n исполнителей $B_1, \ldots, B_n$. Пусть c_{ij} – параметр эффективности выполнения работы i исполнителем B_j. Ставится задача отыскания такой расстановки исполнителей, чтобы суммарный эффект их труда был наибольшим. Проблема выбора [5] математически формулируется в следующем виде.

Найти $x : L(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \to max$

При следующих ограничениях на x :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = \overline{1,n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = \overline{1,n};$$

$$x_{ij} = \{0,1\}.$$

Введем ряд определений:

1. Задачи линейного программирования называются эквивалентными, если их оптимизирующие наборы совпадают.
2. Преобразование, переводящее ЗЛП в эквивалентную ей, будем называть эквивалентным.
3. Систему нулевых элементов матрицы, обладающую тем свойством, что никакая пара из них не лежит в одной строке или в одном столбце, будем называть системой независимых нулей (СНН).

Лабораторная работа 4

ПРОБЛЕМА ВЫБОРА. ВЕНГЕРСКИЙ МЕТОД

Справка. Опишем алгоритм венгерского метода [5], который состоит в преобразовании исходной ЗЛП в эквивалентную ей задачу минимизации, причем матрица C, которой содержит неотрицательные элементы. Если в матрице C имеется система из n независимых нулей (НН), то решением задачи будет матрица X с единичными элементами на местах, соответствующих независимым нулям, и с остальными нулевыми элементами. Алгоритм направлен на построение системы независимых нулей путем эквивалентных преобразований матрицы C.

Подготовительный этап.

1). Преобразуем матрицу C в матрицу C',

где $c'_{ij} = max\{c_{ij}\} - c_{ij} = \ell_j - c_{ij} \geq 0;\ i,j = \overline{1,n};$

(исходная ЗЛП преобразована в задачу минимизации).

2). Преобразуем матрицу C' в матрицу C'',

где $c''_{ij} = -min\{c'_{ij}\} + c'_{ij};\ i,j = \overline{1,n}.$

Оба эти преобразования эквивалентны.

3). Строим первоначальную СНН.

Отмечаем (*) произвольный нуль в первом столбце. Во втором столбце, если есть нуль, не лежащий в одной строке и в одном столбце с ранее отмеченным нулем, то помечаем его (*) и т.д.

(Число помеченных нулей не меньше двух).

Описание отдельной ℓ-й итерации.

1. Если число HH равно n, то выписывается решение задачи, иначе – 2.

2. Столбцы, содержащие нуль со звездочкой, выделяются знаком "+". Все элементы, попавшие в выделенные столбцы, назовем выделенными элементами (ВЭ), остальные невыделенными (НВЭ).

3. Если среди НВЭ существует нуль – то 4, иначе – 9.

4. Если строка с невыделенным нулем содержит нуль со звездочкой, то 5, иначе – 6.

5. Найденный невыделенный нуль отмечается штрихом ($0'$). Строка с этим нулем помечается знаком "+" и снимается знак "+" со столбца, содержащего нуль со звездочкой, который входит в одну строку с $0'$. Далее на 3.

6. Невыделенный нуль помечается штрихом ($0'$).

7. Начиная с нуля со штрихом, в одной строке с которым нет нуля со звездочкой, осуществляется построение цепочки элементов матрицы C_ℓ по правилу: исходный $0'$ далее 0^* из того же столбца, да-ее $0'$ из строки с 0^*, далее 0^* из столбца с $0'$ и т.д.

Такая цепочка строится однозначно и заканчивается $0'$ (может состоять из единственного элемента $0'$).

8. В построенной цепочке звездочки уничтожаются, а штрихи заменяются на звездочки. При этом, так как цепочка начинается с $0'$ и заканчивается $0'$, то число независимых нулей увеличивается на единицу. Далее переход к I.

9. Образуем среди НВЗ нули. Среди НВЗ выбирается минимальный (h). Пусть I_ℓ' – множество индексов невыделенных строк, I_ℓ'' – множество индексов невыделенных столбцов. Далее элементы матрицы C_ℓ (ℓ – итерация) преобразуются по формуле

$$c_{ij}^{\prime(\ell)} = \begin{cases} c_{ij}^{(\ell)} - h, & (i \in I_\ell') \wedge (j \in I_\ell'') \\ c_{ij}^{(\ell)} + h, & (i \notin I_\ell') \wedge (j \notin I_\ell'') \\ c_{ij}^{(\ell)}, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

После такого преобразования среди НВЗ появляется, по крайней мере, один новый нуль. Далее переход на 4.

Задание I. Показать , что преобразования подготовительного этапа (этапа 9) алгоритма являются эквивалентными.

2. Решить проблему выбора венгерским методом, определить значение целевой функции.

Пример решения проблемы выбора для

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 1 & 27 & 19 \\ 26 & 18 & 11 & 4 \\ 21 & 29 & 3 & 26 \\ 21 & 10 & 23 & 19 \end{pmatrix}$$

Подготовительный этап

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 1 & 22 & 19 \\ 26 & 18 & 11 & 4 \\ 21 & 29 & 23 & 26 \\ 21 & 10 & 23 & 19 \\ \hline 26 & 29 & 23 & 26 \end{pmatrix} \to C' = \begin{pmatrix} 11 & 28 & 1 & 7 \\ 0 & 11 & 12 & 22 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 19 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \to C' = \begin{pmatrix} 10 & 27 & 0 & 6 \\ 0 & 11 & 12 & 22 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 19 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Строим СНН

Первая итерация

I. $k = 3 < n = 4$.

2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} + & + & + & \end{matrix} \\ C' = & \begin{pmatrix} 10 & 27 & 0 & 6 \\ 0^* & 11 & 12 & 22 \\ 5 & 0^* & 0 & 0 \\ 5 & 19 & 0^* & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Так как $c_{34}' = 0$, то

4. Так как $c_{32}' = 0^*$, то

5. $c_{34}' = 0'$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} + & & + & \end{matrix} \\ C' = & \begin{pmatrix} 10 & 27 & 0 & 6 \\ 0^* & 11 & 12 & 22 \\ 5 & 0^* & 0 & 0 \\ 5 & 19 & 0^* & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

6. Так как среди НВЗ нет нулей, то – 9.

7. $h = 6$, $I_1' = \{1, 2, 4\}$, $I_1'' = \{2, 4\}$

$$C' = \begin{pmatrix} 10 & 27 & 0 & 6 \\ 0^* & 11 & 12 & 22 \\ 5 & 0^* & 0 & 0' \\ 5 & 19 & 0^* & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \\ + \end{matrix} \qquad C'^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 & 21 & 0 & 0' \\ 0^* & 5 & 12 & 16 \\ 11 & 0^* & 6 & 0' \\ 5 & 13 & 0^* & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \\ \\ \end{matrix}$$

Далее 3.

3. Так как $c_{14} = 0$, то 4.

4. Так как первая строка не содержит 0^* , то на 6.

6. $c_{14} = 0'$.

7. Цепочка состоит из единственного $0'$.

8. $c_{14} = 0^*$.

I. Так как $k = 4$, то выписываем решение

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\max L(x) = 26 + 29 + 23 + 19 = 97.$$

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

Существуют различные постановки задач теории расписании [6]. Однако все они являются задачами дискретного типа и относятся к задачам планирования. Кроме того, они носят комбинаторный характер и могут быть решены перебором вариантов.

На примере задачи о коммивояжере рассмотрим один из способов решения таких задач путем сокращения перебора вариантов по методу "ветвей и границ". Содержательно постановка задачи о коммивояжере состоит в следующем.

Бродячий торговец должен посетить n городов, переезжая из одного в другой. В каждом городе он может побывать только один раз и по окончании маршрута должен вернуться в начальный город маршрута. Известно расстояние между городами. Требуется найти кратчайший маршрут.

Заметим, что при простом переборе вариантов поиск ведется из $(n-1)!$ маршрутов. Математически постановка задачи о коммивояжере имеет вид. Найти $x : L(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, x_{ij} \rightarrow min$ при следующих ограничениях на x :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; \qquad i = \overline{1,n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; \qquad j = \overline{1,n};$$

$$u_i + u_j + n x_{ij} \leq n-1; \quad i = 2,3,\ldots,n; \quad j = 2,3,\ldots,n, \quad (*)$$

где последнее условие формализует устранение подциклов [6].

Лабораторная работа 5

МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Справка. Полностью алгоритм метода "ветвей и границ" изложен в [7]. Кратко он состоит в следующем.

I. Строится дерево всех вариантов маршрута (рис. I) и выделяются ярусы дерева.

2. Вычисляется длина одного из вариантов маршрута (рис. I), которая полагается эталонной ($L_э$).

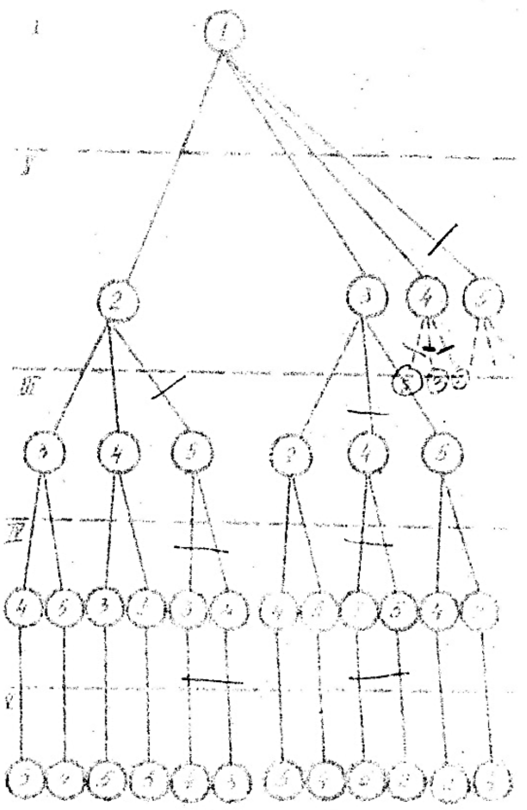

Рис. I. Отсечения дерева маршрутов

3. Последовательно перебираются варианты маршрутов следующим образом:

а) фиксируется начальный участок на самом верхнем ярусе (Γ_0)

б) корректируется матрица C следующим образом: если $\Gamma_0 = \{\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_\ell}\}$ $(\ell < n)$, то из матрицы C вычеркиваются строки $i_1, \dots, i_{\ell-1}$ и столбцы $i_2, \dots, i_\ell$; здесь $\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_\ell}$ номера городов.

Проводится вычисление оптимистической оценки всех вариантов маршрута с зафиксированным начальным участком

$$\min_j c_{ij} = c_{ij_i},$$

$$c'_{ij} = c_{ij} - c_{ij_i} \geq 0$$

$$\min_i c'_{ij} = c'_{i_j j},$$

$$c^{2}_{ij} = c'_{ij} - c'_{i_j j} > 0,$$

$$\Delta\,\text{опт}(\Gamma_0) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij_i} + \sum_{j=1}^{n} c'_{i_j j} ;$$

в) если $L(\Gamma_0) + \Delta\,\text{опт}(\Gamma_0) \geq L_э$, то все варианты маршрутов с начальным участком хуже эталонного, при этом производится отсечение ветви на соответствующем ярусе и выбор на этом ярусе следующего участка Γ'_0. Иначе к начальному участку добавляется еще одна вершина и далее на б).

В случае, когда маршрут просчитан до конца, и он оказался лучше эталонного, его принимают за эталонный и продолжают перебор.

Задание I. Доказать, что условие (*) устраняет маршруты с подциклами.

2. Чем определяется число просчитанных вариантов маршрута при переборе по методу "ветвей и границ"? Возможен ли полный перебор вариантов?

3. Решить задачу о коммивояжере по методу "ветвей и границ".

Пример решения задачи по методу "ветвей и границ"

$$C = \begin{pmatrix} - & 31 & 15 & 19 & 8 \\ 19 & - & 22 & 31 & 7 \\ 25 & 43 & - & 53 & 57 \\ 5 & 50 & 49 & - & 39 \\ 22 & 24 & 33 & 5 & - \end{pmatrix}$$

I. Воспользуемся рис. I, где установлено дерево вариантов.
2. $\Gamma_э = \{1,3,2,4,5,1\}$ примем за эталонный $L_э(\Gamma_э) = 150$.
3. а) Фиксируем начальный участок $\Gamma_0 = \{1,2\}$. Корректируем матрицу C; так как из первого города известен маршрут, вычеркиваем первую строку; так как известно, что во второй город приезжают из первого, вычеркиваем второй столбец.

б)

$$C = \begin{array}{cc} & c_{ji} \\ \begin{pmatrix} 19 & 22 & 31 & 7 \\ 25 & - & 53 & 57 \\ 5 & 49 & - & 39 \\ 22 & 33 & 5 & - \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 25 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 12 & 15 & 24 & 0 \\ 0 & - & 28 & 32 \\ 0 & 44 & - & 34 \\ 17 & 28 & 0 & - \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} 0 & 15 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\Delta(\Gamma_0) = 7 + 25 + 5 + 5 + 15 = 57$

$L(\Gamma_0) = 31,$

Так как $L(\Gamma_0) + \Delta(\Gamma_0) = 144 < L_э$, то увеличиваем начальный участок $\Gamma_0 = \{1,2,3\}$

б) В матрице C вычеркиваем строки 1,2 и столбцы 2,3

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 53 & 57 \\ 5 & - & 39 \\ 22 & 5 & - \end{pmatrix} \begin{matrix} 25 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \longrightarrow C' = \begin{pmatrix} 0 & 27 & 32 \\ 0 & - & 34 \\ 17 & 0 & - \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} 0 & 0 & 32 \end{matrix}$$

$\Delta(\Gamma_0) = 25 + 5 + 5 + 32 = 67$

$L(\Gamma_0) = 31 + 22 = 53$

$L(\Gamma_0) + \Delta(\Gamma_0) = 120 < L_э$.

Так как добавление очередной вершины однозначно определяет ветвь, рассчитаем длины соответствующих маршрутов:

$L(\{1,2,3,4,5,1\}) = 31 + 22 + 53 + 39 + 22 = 167 > L_э$

$L(\{1,2,3,4,5,1\}) = 31 + 22 + 57 + 5 + 5 = 120 < L_э$.

В качестве эталонного выбираем маршрут

$\Gamma_э = \{1,2,3,5,4,1\} = L_э(\Gamma_э) = 120$.

Далее, так как (согласно посчитанному варианту с начальным участком $\{1,2\}$ и для нового эталонного маршрута) выполнено

$\Delta(\Gamma_0) + L(\Gamma_0) = 144 > L_э(\Gamma_э)$,

то ветвь отсекается на ярусе I.

а) Фиксируем следующий начальный участок $\Gamma_0 = \{1,3\}$.

б) Рассчитываем $\Delta(\Gamma_0)$ по скорректированной матрице

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 19 & - & 31 & 7 \\ 25 & 43 & 53 & 57 \\ 5 & 50 & - & 39 \\ 22 & 24 & 5 & - \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 25 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \longrightarrow C' = \begin{pmatrix} 12 & - & 24 & 0 \\ 0 & 18 & 28 & 32 \\ 0 & 45 & - & 34 \\ 17 & 19 & 0 & - \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} 0 & 18 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\Delta(\Gamma_0) = 7 + 25 + 5 + 5 + 18 = 60$

$L(\Gamma_0) = 15$

$\Delta(\Gamma_0) + L(\Gamma_0) = 75 < L_э$.

Увеличиваем начальный участок $\Gamma_0 = \{1,3,2\}$.

Вычисляем $\Delta(\Gamma_0)$ по скорректированной матрице C:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 19 & 31 & 7 \\ 5 & - & 39 \\ 22 & 5 & - \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \longrightarrow \tilde{C}' = \begin{pmatrix} 12 & 24 & 0 \\ 0 & - & 34 \\ 17 & 0 & - \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\Delta(\Gamma_0) = 7 + 5 + 5 = 17$

$L(\Gamma_0) = 15 + 43 = 58$

$\Delta(\Gamma_0) + L(\Gamma_0) = 75 < L_э$.

Вычисляем длины двух маршрутов с Γ_0:

$L(\{1,3,2,4,5,1\}) = 58 + 39 + 22 = 119 < L_э$

$L(\{1,3,2,5,4,1\}) = 58 + 7 + 5 + 5 = 75 < L_э$.

В качестве эталонного маршрута используем

$$\Gamma_1 = \{1, 5, 2, 5, 4, 1\} \qquad L(\Gamma_1) = 75 .$$

Поскольку имеет место $L(\{1,5\}) + \Delta(\{1,5\}) = L(\Gamma_1)$, то все остальные варианты с этим начальным участком отсекаются.
Фиксируем участок $\Gamma_0 = \{1.4\}$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 19 & - & 22 & 7 \\ 25 & 43 & - & 57 \\ 5 & 30 & 49 & 39 \\ 22 & 24 & 33 & - \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 25 \\ 5 \\ 22 \end{matrix} \longrightarrow \tilde{C}' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 12 & - & 15 & 0 \\ 0 & 18 & - & 22 \\ 0 & 25 & 44 & 34 \\ 0 & 2 & 11 & - \end{pmatrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 2 & 11 & 0 \end{matrix} \end{array}$$

$$\Delta(\Gamma_0) = 7 + 25 + 5 + 22 + 2 + 11 = 72$$
$$L(\Gamma_0) = 19 .$$

Так как $\Delta(\Gamma_0) + L(\Gamma_0) = 91 > L_1$, то ветвь отсекается на I ярусе.
Фиксируем участок $\Gamma_0 = \{1.5\}$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 19 & - & 22 & 31 \\ 25 & 43 & - & 53 \\ 5 & 50 & 49 & - \\ 22 & 24 & 33 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 19 \\ 25 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \longrightarrow \tilde{C}' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & - & 3 & 12 \\ 0 & 18 & - & 28 \\ 0 & 45 & 44 & - \\ 17 & 19 & 28 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 18 & 3 & 0 \end{matrix} \end{array}$$

$$\Delta(\Gamma_0) = 19 + 25 + 5 + 5 + 18 + 3 = 75$$
$$L(\Gamma_0) = 22 .$$

Так как $\Delta(\Gamma_0) + L(\Gamma_0) = 97 > L_1$, то данная ветвь отсекается на I ярусе.

Таким образом, решением задачи будет маршрут

$$\Gamma_1 = \{1, 3, 2, 5, 4, 1\} .$$

При этом $L(\Gamma_1) = 75$.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим задачи этого типа на примере простейшей задачи управления запасами [I, т.2, с.14-44].

Введем переменные:

x_t – выпуск продукции в течение планового t отрезка времени;
i_t – уровень запасов продукции на конец отрезка t;
D_t – спрос на продукцию на t отрезке (задан на весь плановый период, состоящий из отрезков);
$C_t(x_t, i_t)$ – затраты на выпуск продукции x_t и хранение единиц продукции на отрезке i_t.

Постановка задачи управления запасами (ЗУЗ) следующая.

Найти план выпуска и хранения продукции в течение планового периода из N отрезков такой, что

$$\sum_{t=1}^{N} C_t(x_t, i_t) \longrightarrow min .$$

При ограничениях

x_t, i_t – целые, неотрицательные числа
$i_N = 0$

$i_{t-1} + x_t - i_t = D_t \ (t = 1, \ldots, N)$ – условие удовлетворения спроса на отрезке t.

i_0 – заданный уровень запасов на начало планового периода.

Существенным в задачах этого типа является нелинейность функций $C_t \ (t = 1, \ldots, N)$ и многошаговый процесс принятия решений.

Лабораторная работа 6

МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Справка. Опишем алгоритм решения ЗУЗ [I, т.2, с.18].
Пусть $f_n(i)$ – стоимость, отвечающая стратегии минимальных затрат на n оставшихся отрезков при начальном уровне запасов i; $x_n(i)$ – выпуск, обеспечивающий достижение $f_n(i)$.
d_n – спрос на продукцию на отрезке n, отстоящем от конца планового периода на n отрезков (включая рассматриваемый) $C_n(x, j)$ – затраты на n отрезке от конца периода, связанные с выпуском x единиц продукции и с содер-

жанием запасов, уровень которых на конец отрезка равен единицам, $C_n(x,j)$ - *выпуклые функции*

Так как

$$iN = 0 \Rightarrow f_0(0) = 0 \quad (n = 0). \qquad (I)$$

Затем перейдем к $n = 1$. Начальный уровень запасов не превышает d_1 (иначе $iN \neq 0$) $\Rightarrow x_1(i) = d_1 - i$,

т.е.

$$f_1(i) = C_1(d_1 - i, 0); \quad i = 0, 1, \ldots, d_1. \qquad (2)$$

Перейдем к $n = 2 \Rightarrow i \leq d_1 + d_2$ и $d_2 - i \leq x_2(i) \leq d_2 + d_1 - i$. Тогда

$$f_2(i) = \min_x [C_2(x, i + x - d_2) + f_{n-1}(i + x - d_2)]$$

и т.д.

$$f_n(i) = \min_x [C_n(x, i + x - d_n) + f_{n-1}(i + x - d_n)] \quad n = 1, 2, \ldots, N, \qquad (3)$$

где $i \leq \sum_{l=1}^{n} d_l$ и $d_{n-i} \leq x \leq \sum_{l=1}^{i} d_{l \cdot i}$.

Так как $f_0(0)$ и $f_1(i)$ вычисляются по формулам (I), (2), то последовательно можно вычислить $f_n(i); i = \overline{2, n}$.

Далее определим $x_{N-1}(i0)$, дающее $f_N(i0) \Rightarrow$ уровень запасов на начало следующего отрезка равен $i_0 + x_N(i_0) - dN$, тогда можно определить $x_{N-1}(i_0)$, дающее $f_{N-1}(i_0 + x_N(i_0) - d_N)$, и так далее, до получения решения задачи.

Отметим характерную особенность решения этого типа задач с конца планового периода.

Процесс принятия решений имеет N шагов.

Задание. I. Показать способ модификации модели управления запасами и рекуррентного соотношения (3), чтобы учесть:

а) порчу запасов, при которой их уровень на начало отрезка t меньше, чем на конец отрезка ($t - 1$);

б) производственный брак, в результате которого при объеме выпуска x число годных изделий меньше X;

в) возможность "отрицательного спроса", т.е. возврата изделий;

г) возможности "отрицательного выпуска", т.е. использование изделий для внутренних нужд фирмы;

д) зависимости производственных затрат в течение отрезка t от объема выпуска не только на отрезке t, но и на отрезке ($t - 1$).

2. Найти решение ЗУЗ и оптимальное значение целевой функции.

Пример. Пусть $N = 4$, $x_t \leq 4 \ (t = \overline{1,4})$, $i_t \leq 3 \ (t = \overline{1,4})$

$D_1 = 4, D_2 = 3, D_3 = 2, D_4 = 3, d_1 = 3 \Rightarrow d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 4$

$C_n(x, i) = n x^2 + \frac{n}{2} i^2$.

Заметим, что $C_t(x_t, i_t) = (5 - t) \cdot x_t^2 + \frac{(5-t)}{2} i_t^2$.

Начальный запас

i	$x_1(i)$	$f_1(i)$
0	5	9
1	2	4
2	1	1
3	0	0

Вычислим $f_2(i)$.

Начальный запас

$i \backslash x$	0	1	2	3	4	$x_2^*(i)$	$f_2(i)$
0			8+0+9	18+1+4	32+4+3	2	17
1		2+0+9	8+1+4	18+4+1	32+9+[illegible]	1	11
2	0+0+9	2+1+4	8+4+1	18+9+0		0	7
3	[illegible]+1+4	[illegible]+4+1	8+9+0			0	7

где $f_2(i) = \min_x [2x^2 + (i + x - 2)^2 + f_1(1 + x - 2)]$,

так как $x \leq d_1 + d_2 - i$, то клетки таблицы, где $x + i > d_1 + d_2$ или $x + i < d_2$ не заполнены.

Заполняем таблицу значениями функции

$$C_2(x, x + i - d_2) + f_1(i + x - d_2)$$

и затем выбираем минимальное значение для каждой строки таблицы. Это и есть значение $f_2(i)$. $x_2(i)$ есть значение, которому соответствует выбранное $f_2(i)$. Аналогично вычисляем $f_3(i)$

$$f_3(i) = \min [3x^2 + \frac{3}{2}(x+i-3)^2 + f_2(x-i-3)].$$

Начальный запас

$i \backslash x$	0	1	2	3	4	$x_3(i)$	$f_3(i)$
0				$27+0+17$	$48+\frac{3}{2}+11$	3	44
1			$12+0+17$	$27+\frac{3}{2}+11$	$48+6+9$	2	29
2		$3+0+17$	$12+\frac{3}{2}+11$	$27+6+9$	$48+\frac{27}{2}+7$	1	20
3	$0+0+17$	$3+\frac{3}{2}+11$	$12+6+9$	$27+\frac{27}{2}+7$		1	31/2

$d_3 - i \le x \le d_1 + d_2 + d_3 - i$ по условию $-d_3 + x + i \le 3$, поскольку уровень запасов на начало следующего отрезка не больше трех, поэтому нижняя правая клетка не рассматривается. И последняя функция

$$f_4(i) = \min_x [4x^2 + 2(x+i-4)^2 + f_3(i+x-4)].$$

Начальный запас

$i \backslash x$	0	1	2	3	4	$x_4(i)$	$f_4(i)$
0					$64+0+44$	4	118
1				$36+0+44$	$64+2+29$	3	80
2			$16+0+44$	$36+2+29$	$64+8+20$	3	60
3		$4+0+44$	$16+2+29$	$36+8+20$	$64+18+\frac{31}{2}$	2	47

Минимальным затратам на весь плановый период соответствует

$$\min f_4(i) = f_4(3) = 47.$$

Выпишем план выпуска и хранения продукции, соответствующей минимальным затратам в обозначениях (*):

	$x_1=2$	$x_2=2$	$x_3=2$	$x_4=3$
$i_0=3$	$i_1=1$	$i_2=0$	$i_3=0$	$i_4=0$

$i_1 = x_1 + i_0 - D_1 = 1$, по таблице для $f_2(i)$ определяем x_2 для $i=1$, $i_2 = x_2 + i_1 - D_2 = 2+1-3=0$.
Аналогично определяем остальные значения x_i и i_i . Получено решение ЗУЗ, причем

$$\min_{\substack{x_i \\ i_i}} \left(\sum_{i=1}^{4} (c(x_i, i_i)\right) = f_4(3) = 47.$$

5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

Рассмотрим конечную парную игру с нулевой суммой [3, с.177-192] . В игре участвуют два игрока A и B , имеющие противоположные интересы. Пусть у игрока A возможно m стратегий, а у игрока B имеется n возможных стратегий.

Теорема. Любая конечная парная игра с нулевой суммой имеет, по крайней мере, одно решение – пару оптимальных стратегий, в общем случае смешанных (S_A^* , S_B^*), и соответствующую оценку ν . Можно показать, что решение игры $m \times n$ эквивалентно решению пары двойственных задач линейного программирования. Однако сведение конечной игры к ЗЛП не всегда является самым простым путем решения игры. Здесь мы рассмотрим простейший метод итераций Брауна-Робинсона, позволяющий найти приближенное решение игры.

Пусть $S_A^* = (P_1, \ldots, P_m)$; $S_B^* = (q_1, \ldots, q_n)$ – пара оптимальных смешанных стратегий для игры $m \times n$. Введем обозначение $x_i = p_i/\nu$; $y_i = q_i/\nu$ $(\nu > 0)$. Тогда нахождение S_A^* эквивалентно решению следующей ЗЛП [3] :

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1; \quad j = \overline{1,n}$$

$$x_i \geq 0; \quad i = \overline{1,m}.$$

Аналогично нахождение S_0^* эквивалентно решению

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1 ; \; i = \overline{1,m}$$

$$y_j \ge 0 ; \; j = \overline{1,n} .$$

Лабораторная работа 7

ИГРЫ ТИПА $m \times n$

Справка. Метод Брауна-Робинсона состоит в следующем:

1. Игрок A выбирает любую стратегию A_i, на которую игрок B отвечает своей наилучшей B_j; далее A выбирает свою наилучшую стратегию, при условии, что B выбрал B_j - A_{i1} и т.д.

2. Рассчитывается для каждой пары ходов (стратегий) нижняя (верхняя) цена игры α (β), равная минимальному (максимальному) выигрышу, деленному на число партий. Среднее арифметическое между ними служит оценкой игры (ν).

Задание 1.а). Дать геометрическую интерпретацию игры $2 \times n$.

б). Показать взаимосвязь ЗЛП с игрой типа $m \times n$.

2. Составить модель и найти решение игры, сведением ее к ЗЛП.

3. Найти приближенное решение игры методом Брауна-Робинсона из 20 итерации.

4. Сравнить результаты, полученные в 2 и 3.

Пример приближенного решения игры по методу Брауна-Робинсона

Пусть модель игры задана матрицей выигрышей игрока A, в которой i-я строка соответствует i стратегии A_i, a_j столбец - B_j стратегии игрока B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Проверяем наличие седловой точки в матрице

$$\alpha = \min_i \max_j a_{ij} = 3, \; \beta = \max_j \min_i a_{ij} = 1$$

$\alpha \ne \beta \Rightarrow$ седловой точки нет, и решение игры находится в смешанных стратегиях.

2. Составим таблицу итераций метода Брауна-Робинсона

N	A	B_1	B_2	B_3	B	A_1	A_2	A_3	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\nu}$
1	1	1	2	3	1	1	4	3	1	4	2,5
2	2	5	2	5	2	3	4	8	1	4	2,5
3	3	8	7	6	3	6	6	9	2	3	2,5
4	3	11	12	7	3	9	8	10	1,75	2,5	2,12
5	3	14	17	8	3	12	10	11	1,6	2,4	2
6	1	15	19	11	3	15	12	12	1,82	2,5	2,16
7	1	16	21	14	3	18	14	13	2	2,48	2,24
8	1	17	23	17	1	19	18	16	2,13	2,13	2,13
9	1	18	25	20	1	20	22	19	2	2,44	2,22
10	2	22	25	22	1	21	26	22	2,2	2,6	2,40
11	2	26	25	24	3	24	28	23	2,18	2,54	2,36
12	2	30	25	26	2	26	28	28	2,08	2,33	2,20
13	2	34	25	28	2	28	28	33	1,92	2,54	2,23
14	3	37	30	[illegible]	3	[illegible]	30	34	2,01	[illegible]	[illegible]
15	3	40	35	30	3	34	32	35	2	2,35	2,16
16	3	43	40	31	3	37	34	36	1,93	2,31	2,12
17	1	44	42	34	3	40	36	37	2	2,35	2,11
18	1	45	44	37	3	43	38	38	2,15	2,34	2,22
19	1	48	46	40	3	46	40	39	2,11	2,42	2,26
20	1	47	48	43	3	49	42	40	2,15	2,45	2,30

В столбце A представлены выбранные стротегии игрока A в столбце B – игрока B. В столбцах B_1, B_2, B_3 (A_1, A_2, A_3) – накопленный выигрыш (проигрыш) игрока A (3).

Первая пара ходов пусть выбрана случайным образом. Столбцы B_1, B_2, B_3 заполняются следующим образом. При первом ходе выписывается строка, соответствующая A_1, выбирается минимальный элемент этой строки – ему соответствует ход B_1, далее выписывается столбец, соответствующий B_1, и игрок A делает хог, соответствующий максимальному элементу A_2. При этом в столбцы B_1, B_2, B_3 таблицы заносится сумма предыдущей строки и строки, соответствующей выбранному ходу, и т.д. Каждый раз расочитывается $\hat{\alpha}$; $\hat{\beta}$, $\hat{\nu}$ согласно описанному алгоритму. Значения $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\nu}$ приводятся округленными до второго знака. Проводим вычисление по таблице цены игры и оптимальных стратегий.

Определим цену игры как среднее значение $\hat{\nu} \approx 2,25$.

а). Найдем оптимальную стратегию для игрока A из данных таблицы. P_i равно отношению числа использований i-го хода, к общему числу ходов.

$$S_A^* = (P_1, P_2, P_3), \quad P_1 = 0,45; \quad P_2 = 0,25; \quad P_3 = 0,30$$

для игрока B:

$$S_B^* = (q_1, q_2, q_3); \quad q_1 = 0,20; \quad q_2 = 0,15; \quad q_3 = 0,75.$$

Решая данную задачу сведением ее к ЗЛП, получим:

$$\nu = 2$$

$$S_A^* = (0,5,\ 0,\ 0.5)$$

$$S_B^* = (15/32,\ 1/8,\ 13/32),$$

т.е. цена игры найдена достаточно точно, частоты же определяются из таблицы довольно приближенно, сказывается малое число итераций.

б). Найдем оптимальную стратегию игрока A, исходя из цены игры

$$S_A^* = (P_1, P_2, P_3)$$

$$P_1 + 4P_2 + 3P_3 = 2.25$$

$$5P_1 + 2P_2 + P_3 = 2.25$$

$$2P_1 + 5P_3 = 2.25$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 54$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2,25 & 4 & 3 \\ 2,25 & 0 & 2 \\ 2,25 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2,25 \quad X \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2,25 \cdot 9 = 20,25$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2,25 & 3 \\ 2 & 2,25 & 2 \\ 3 & 2,25 & 1 \end{vmatrix} = 2,25 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6.75$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2,25 \\ 2 & 0 & 2,25 \\ 3 & 5 & 2,25 \end{vmatrix} = 2,25 \cdot 9 = 20,25$$

$$P_1 = \frac{20,25}{54} \approx 0,3; \quad P_2 = 0; \quad P_3 = 0,3$$

Аналогично – для игрока B

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & \text{[illegible]} & 1 \end{vmatrix} = 54$$

$$\Delta_1 = 2,25 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2,25 \cdot 7 = 15,75$$

$$\Delta_1 = 2,25 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,25 \cdot 4 = 9$$

$$\Delta_3 = 2{,}25 \begin{vmatrix} I & 2 & I \\ 4 & 0 & I \\ 3 & 5 & I \end{vmatrix} = 2{,}25 \cdot I3 = 29{,}25$$

$$q_1 = \frac{I5{,}75}{54} \approx 0{,}3\ ;\ q_2 = \frac{9}{54} \approx 0{,}2\ ;\ q_3 = \frac{29{,}25}{54} \approx 0{,}5$$

Таким образом, исходя из цены игры можно более точно определить оптимальные стратегии игроков.

6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Теория массового обслуживания изучает характеристики и свойства процесса образования очередей при обслуживании потоков заявок (клиентов) на некоторых обслуживающих приборах. В качестве таких приборов могут выступать транспортные службы доставки пассажиров, предприятия бытового обслуживания, аэродромы, электронно-вычислительные машины и т.д. Теория массового обслуживания непосредственно не связана с оптимизацией. Она скорее пытается разработать, изучить и сравнить различные ситуации, характеризующиеся образованием очереди, и, таким образом, косвенно достигнуть приближенной оптимизации.

Моменты поступления заявок для обслуживания, а также время обслуживания этих требований являются случайными величинами.

Наиболее простыми, с точки зрения исследования, являются марковские (пуассоновские) системы массового обслуживания СМО). В этих системах поток требований на обслуживание представляет собой поток Пуассона, а время обслуживания каждого требования описывается экспоненциальным распределением. Поток Пуассона, или простейший поток, характеризуется следующими свойствами: стационарностью, отсутствием последствия и ординарностью.

СМО в зависимости от количества приборов делятся на одноканальные и многоканальные.

Заявка, пришедшая в систему в тот момент, когда обслуживающий прибор занят, может либо покинуть систему (СМО без ожидания), либо ожидать в очереди освобождения прибора (СМО с очередью). Очередь может быть конечной и бесконечной длины (СМО без ожидания это частный случай СМО с конечной очередью, в случае когда длина очереди равна нулю).

В зависимости от дисциплины обслуживания очереди может быть большое количество разных систем. Самый распространенный случай обслуживания заявок в порядке очереди.

Если часть заявок после обслуживания в системе может опять поступать на обслуживание, то говорят, что система является системой с обратной связью.

Система, состоящая из нескольких СМО, такая, что заявка, обслуженная в одной СМО, либо поступает в другую, либо выходит из системы, называется стохастической сетью. Если возможно поступление заявок извне, либо уход заявок из стохастической се и, то она называется разомкнутой; иначе сеть замкнута.

Лабораторная работа 8

СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ И ОТКАЗАМИ

Справка. Схема многоканальной СМО с одинаковыми каналами, конечной очередью и обратной связью представлена на рис.8.I.

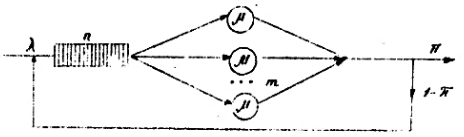

Рис. 8.1

здесь λ – интенсивность пуассоновского потока (число требований в единицу времени);
n – длина очереди;
m – количество каналов;
μ – интенсивность обслуживания заявок одним каналом;
π – вероятность выхода заявки из СМО после обслуживания.

В качестве основных характеристик функционирования СМО используются следующие:

$k(t)$ – среднее число требований в системе;
$\gamma(t)$ – среднее число требований в очереди;
$p(t)$ – среднее число требований в узле обслуживания;
$w(t)$ – среднее время ожидания в очереди;
$u(t)$ – средняя продолжительность нахождения заявки в системе.

Определим пространство состояний СМО. Под состоянием $E_k(t)$ системы будем понимать, что в момент t в системе находится $k(t)$ требований. Введем вектор вероятностей

$P(t)=\{P_0(t), P_1(t), P_2(t), \ldots\}$, где $P_i(t)$ – вероятность того, что в момент t система будет находится в состоянии E_i, причем $\sum_{i=0} P_i(t)=1$. Для марковских систем характерно, что вероятность состояния $E_k(t+dt)$ зависит только от предыдущего состояния и матрицы переходов, т.е. справедливо уравнение Чапмена-Колмогорова:

$$\bar{P}(t+dt)=\bar{P}(t)\cdot J(dt),$$

где $J(dt)=\| P_{ij}(dt)\|$ – матрица переходов,
$P_{ij}(dt)$ – вероятность перехода из состояния E_i в состояние E_j за время dt.

Пример. Рассмотрим многоканальную СМО с неограниченной очередью (рис.8.2).

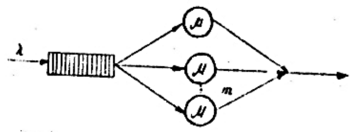

Рис 8.2

Выпишем матрицу вероятностей переходов.

В силу ординарности входного и выходного потока, вероятность поступления или убытия более одной заявки есть $o(dt)$, вероятность поступления одной заявки есть $P_1(dt)=\lambda dt$, и вероятность убытия одной заявки есть $j\mu dt$, где j – число каналов, занятых в момент t.

Тогда

$$P_{00}(dt)=1-\lambda dt+o(dt)$$

– вероятность того, что в систему не поступит заявка за время dt (вероятность перехода $E_0 \to E_0$).

$$P_{ii}(dt)=(1-\lambda dt+o(dt))(1-i\mu dt+o(dt))=1-(\lambda+i\mu)dt+o(dt), \quad i\le m$$

– вероятность того, что в системе не произойдет события (вероятность перехода $E_i \to E_i$), в силу независимости процесса поступления и убытия заявок (при условии, что в системе заявок) равна произведению вероятностей того, что ни одна заявка не поступит и ни одна не обслужится. (при $i=0$ получим $P_{0}(dt)$).

$$P_{i,i+1}(dt)=(\lambda dt+o(dt))(1-i\mu dt+o(dt))=\lambda dt+o(dt), \quad i\le m$$

– вероятность перехода $E_i \to E_{i+1}$, равна пр изведению вероятностей поступления заявки на вероятность того, что ни одна заявка не обслужится.

$$P_{i,i-1}(dt)=(1-\lambda dt+o(dt))(i\mu dt+o(dt))=i\mu dt+o(dt), \quad 1\le i\le m$$

– вероятность перехода $E_i \to E_{i-1}$. Очевидно, что $P_{ij}(dt)=o(dt)$ при $|i-j|>1$. Для всех состояний $E_j, j\ge m$, вероятность обслужить заявку будет $m\mu dt$, отсюда нетрудно выписать вероятности переходов для всех j.

Теперь запишем уравнения Чепмена-Колмогорова, используя матрицу переходов:

$$P_0(t+dt)=P_0(t)(1-\lambda dt)+P_1(t)\mu dt+o(dt),$$

$$P_i(t+dt)=P_{i-1}(t)\lambda dt+P_i(t)(1-\lambda dt-i\mu dt)+P_{i+1}(t)(i+1)\mu dt+o(dt), \quad 1\le i\le m,$$

$$P_j(t+dt)=P_{j-1}(t)\lambda dt+P_j(t)(1-\lambda dt-m\mu dt)+P_{j+1}(t)m\mu dt+o(dt), \quad j\ge m.$$

Эти уравнения можно преобразовать к виду

$$P_0(t+dt)-P_0(t)=-P_0(t)\lambda dt+P_1(t)\mu dt+o(dt),$$

$$P_i(t+dt)-P_i(t)=P_{i-1}(t)\lambda dt-(\lambda+i\mu)dt\,P_i(t)+P_{i+1}(t)(i+1)\mu dt+o(dt), \quad 1\le i\le m,$$

$$P_j(t+dt)-P_j(t)=P_{j-1}(t)\lambda dt-P_j(t)(\lambda+m\mu)dt+P_{j+1}(t)\mu m dt+o(dt), \quad j\ge m$$

Разделив на dt и перейдя к пределу при $dt\to 0$, получим систему дифференциальных уравнений:

$$P_0'(t)=-P_0(t)\lambda+P_1(t)\mu$$

$$P_i'(t)=P_{i-1}(t)\lambda-P_i(t)(\lambda+i\mu)+P_{i+1}(t)(i+1)\mu, \quad 1\le i\le m,$$

$$P_j'(t)=P_{j-1}(t)\lambda-P_j(t)(\lambda+m\mu)+P_{j+1}(t)m\mu, \quad j\ge m.$$

Решение данной системы достаточно трудоемко.

Мы сделаем упрощающее предположение, что система находится в стационарном (установившемся) состоянии, т.е. $P(t)$ не зависит от t. Необходимым условием существования стационарного режима для данной системы будет выполнение неравенства

$$\psi=\frac{\lambda}{m\mu}<1.$$

В общем случае ψ есть отношение интенсивности входного потока к интенсивности обслуживания. В этом случае система уравнений примет вид:

$$P_0\lambda=P_1\mu$$

$$P_i(\lambda+i\mu)=P_{i-1}\lambda+P_{i+1}(i+1)\mu, \quad 1\le i<m,$$

$$P_j(\lambda+m\mu)=P_{j-1}\lambda+P_{j+1}m\mu, \quad j\ge m.$$

Складывая первое уравнение со вторым при $i=1$, получим

$$P_1\lambda=P_2\cdot 2\mu.$$

Прибавив это уравнение ко второму при $i=2$, получим

$$P_2\cdot\lambda=P_3\cdot 3\mu.$$

Продолжая процесс, найдем, что

$$P_1=\frac{\lambda}{\mu}P_0=\rho P_0, \quad где\ \rho=\frac{\lambda}{\mu},$$

$$P_i=\frac{\rho^i}{i!}P_0, \quad 1\le i\le m$$

$$P_j=\left(\frac{\rho}{m}\right)^{j-m}\frac{\rho^m}{m!}P_0, \quad j>m$$

Из условия $\sum_{i=1}^{\infty}P_i=1$ находим P_0:

$$P_0=\frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\rho^i}{i!}+\frac{\rho^m}{m!}\left(1-\frac{\rho}{m}\right)}.$$

Теперь легко вычислить характеристики системы в стационарном состоянии

$$k=\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot P_i,$$

$$\bar{V}=\sum_{i=m+1}^{\infty}(i-m)P_i,$$

$$p = \sum_{i=1}^{m-1} i \cdot P_i + m \sum_{j=m} P_j ,$$

$$w = \sum_{i=m+1} \frac{i-m}{m\mu} P_i ,$$

$$u = w + \mu .$$

Задача I. Одноканальная СМО с очередью ограниченной длины (рис.8.3)

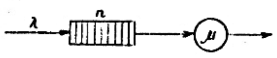

Рис. 8.3

На СМО поступает простейший поток требований интенсивности λ. Емкость накопителя ограничена, и если n требований ожидает обслуживания, то очередное поступающее требование покидает СМО без обслуживания. Время обслуживания экспоненциально с параметром μ.

Задача 2. Многоканальная СМО с отказами (рис.8.4)

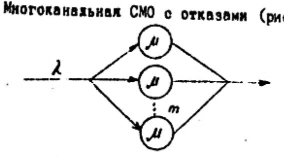

Рис. 8.4

Условия аналогичны предыдущей задаче, но емкость накопителя $n = 0$, а число каналов – m.

Задача 3. Одноканальная СМО с обратной связью (рис.8.5)

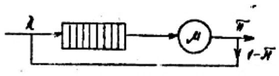

Рис. 8.5

Длина очереди не ограничена. После обслуживания заявка с вероятностью π выходит из системы, либо с вероятностью $1-\pi$ возвращается в очередь.

Лабораторная работа 9

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Справка. Имитационное (статистическое) моделирование является универсальным инструментом для изучения различных систем, в частности, систем массового обслуживания (СМО).

Имитационное моделирование СМО включает в себя следующие аспекты:

построение имитационной модели;

планирование эксперимента;

анализ полученных результатов.

Обязательными элементами имитационной модели СМО являются:

- генераторы псевдо-случайных чисел для имитирования распределения входного потока и процесса обслуживания;
- блок управления моделью;
- блоки, моделирующие отдельные устройства;
- система сбора статистики о функционировании и параметрах модели.

Генераторы псевдослучайных чисел с нужным распределением строятся, как правило, на базе генераторов псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0,1].

Пусть $F(x)$ – непрерывная, строго возрастающая функция распределения; тогда существует обратная ей функция $F^{-1}(y)$. В этом случае, если α – С.В. распределенная равномерно на [0,1], то случайная величина (С.В.)

$$\xi = F^{-1}(\alpha) . \qquad (9.1)$$

будет иметь распределение $F(x)$. Например, если $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$ (экспоненциальное распределение), то для генератора можно использовать формулу

$$\xi = F^{-1}(\alpha) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha).$$

Нетрудно показать, что $1-\alpha$ распределено так же, как и α.

Следовательно, можно использовать формулу

$$y = \frac{\ln \alpha}{\lambda}, \qquad (9.2)$$

которая вычисляется несколько быстрее.

Для получения псевдослучайных чисел α используется мультипликативный генератор. В качестве начального члена последовательности берется любое целое число $x_0 < m$, где m – целое, например, максимально представимое в данной ЭВМ. Далее вычисление проходит по формуле:

$$x_i = \alpha x_{i-1} \bmod (m) \quad (i = 1, 2 \ldots); \qquad (9.3)$$

$$\alpha_i = x_i / m, \qquad (9.4)$$

Уравнение использует предыдущее число x_{i-1}, умножая его на константу α и деля результат на m. Остаток берется как новое число x_i.

Широко распространенный генератор RANDU из математического обеспечения ЕС ЭВМ использует $\alpha = 65539$ и $m = 2^{31}$, [8] или [9].

Блок управления моделью реализует наступление событий в модели и ведет системное время. Рассмотрим его работу на примере марковской многоканальной СМО с неограниченной очередью (рис. 9.I)

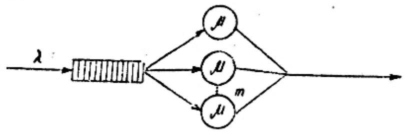

Рис. 9.1

В данной системе возможны 2 события:

поступление заявок из источника на обслуживание (если прибор свободен), либо в очередь;

окончание обслуживания очередной заявки, поступление ее из приемник и выбор следующей заявки из очереди (если очередь не пуста).

Блок управления моделью определяет, какое из событий наступит ранее и присваивает системному времени значение, равное времени наступления этого события. Затем управление передается на блоки, имитирующие работу отдельных устройств, и выполняются действия, связанные с данным событием. Например, при поступлении очередной заявки из источника необходимо:

сгенерировать время поступления следующей заявки;

если все каналы заняты – увеличить длину очереди на одну заявку;

если есть свободный прибор, то пометить его как занятый и сгенерировать время окончания обслуживания заявки.

Таким образом, блоки, имитирующие работу отдельных устройств, могут выполнять следующие функции:

генерация времени наступления очередного события;

постановка заявок в очередь;

выбор из очереди на обслуживание согласно дисциплине обслуживания;

прерывание обслуживания заявок при дисциплине обслуживания с прерыванием;

активизация и пассивизация устройств и заявок;

передача заявок к другим приборам после окончания обслуживания.

Информативность собираемой статистики можно сильно варьировать в зависимости от целей исследования, ресурсов памяти и времени моделирования.

Обычно используются следующие характеристики:

первый и второй моменты;

гистограмма;

временная диаграмма.

Задание I. Построить алгоритмы имитационной модели для заданной СМО.

2. Провести моделирование по построенному алгоритму.

3. Построить приведенные выше четыре характеристики для указанного параметра.

Пример. Рассмотрим решения задачи на примере системы, приведенной на рис. 9.I.

Обозначим:

T – модельное время;

ν – длина очереди;

λ – число занятых каналов;

m – общее число каналов;

NS – число обслуженных заявок;

α – псевдослучайные величины, распределенные равномерно на отрезке [0,I];

TP – время поступления очередной заявки в систему;

$TS(1:m)$ – упорядоченный по возрастанию массив времен окончания обслуживания заявок на занятых каналах;

$\hat{\nu}_1, \hat{\nu}_2$ – первый и второй моменты распределения длины очереди.

Считаем, что время между построением заявок распределено экспоненциально, с параметром λ, а время обслуживания имеет также экспоненциальный закон распределения с параметром μ. Моделирование прекращаем после обслуживания десяти заявок. Алгоритм моделирования представлен на рис.9.5.

Операторы I и 4 обозначают вход и выход из модели.

Оператор 5 задает начальные условия для моделирования.

Операторы 6 и 2I составляют блок управления моделью и определяют ближайшие по времени события.

Операторы II,I4 и I9 генерируют равномерные псевдо-случайные числа.

Операторы 2,3,7,8,9,I0,I2 выполняют действия, связанные с окончанием обслуживания очередной заявки.

Операторы I5,I6,I7,20 выполняют действия, связанные с поступлением заявки в систему.

Операторы I3 и I8 фиксируют необходимые результаты.

Исходные данные для моделирования:

$\lambda = 5, \ \mu = 2, \ m = 3.$

Результаты моделирования приведены в таблице 9.I. При моделировании использовались псевдо-случайные числа из таблицы 9.2.

По определению, первый и второй моменты распределения длины очереди равны

$$\nu_1 = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P(\nu = i); \qquad \nu_2 = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot P(\nu = i),$$

где $P(\nu = i)$ – вероятность того, что длина очереди равна i. В качестве оценки вероятности $P(\nu = i)$ будем использовать отношение времени, которое длина очереди была равна i к общему времени моделирования.

Каждая строчка таблицы 9.I дает значения параметров в момент ~~прихода требования~~ наступления события в оператор модели.

$$\hat{P}(\nu = 0) = \frac{0{,}134 + (0{,}453 - 0{,}155) + (0{,}588 - 0{,}528)}{1{,}819} \approx 0{,}270$$

$$\hat{P}(\nu = 1) = \frac{(0{,}155 - 0{,}134) + (0{,}528 - 0{,}453) + (0{,}677 - 0{,}588) + 0{,}057 + 0{,}121}{1{,}819} \approx 0{,}205$$

$$\hat{P}(\nu = 2) = \frac{0{,}044 + 0{,}103 + 0{,}054}{1{,}819} \approx 0{,}100$$

$$\hat{P}(\nu = 3) = \frac{0{,}011}{1{,}819} \approx 0{,}006$$

$$\hat{P}(\nu = 4) = \frac{0{,}007}{1{,}819} \approx 0{,}004$$

$$\hat{P}(\nu = 5) = \frac{0{,}134 + 0{,}05}{1{,}819} \approx 0{,}101$$

$$\hat{P}(\nu = 6) = \frac{0{,}117 + 0{,}051 + 0{,}069}{1{,}819} \approx 0{,}13$$

$$\hat{P}(\nu = 7) = \frac{0{,}116 + 0{,}168}{1{,}819} \approx 0{,}19$$

$$\hat{\nu}_1 = \sum_{i=1}^{7} i \cdot \hat{P}(\nu = i) = 2{,}054$$

$$\hat{\nu}_2 = \sum_{i=1}^{7} i^2 \hat{P}(\nu = i) = 143{,}15.$$

Временная диаграмма появления требований представлена на рис.9.6.

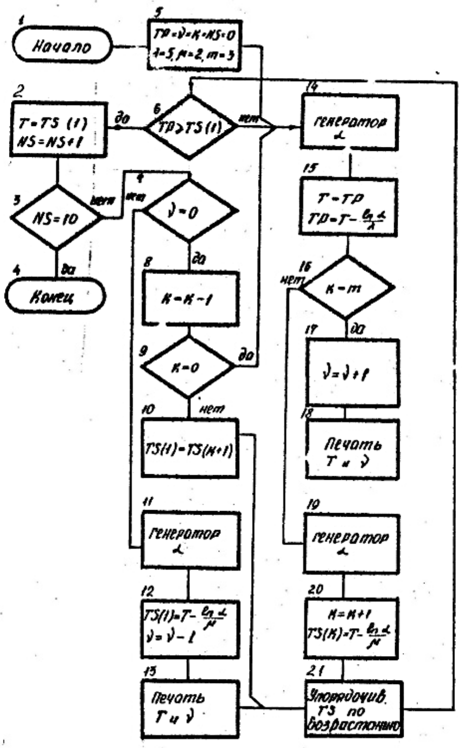

Рис. 9.5

Таблица 9.I

T	TP	TS(1)	TS(2)	TS(3)	K	ν	NS
-	00	-	-	-	0	0	0
0,0	0,044	0,I65	-	-	I	0	0
0,044	0,I07	0,I55	0,I65	-	2	0	0
0,I07	0,I34	0,I55	0,I65	0,208	3	0	0
0,I34	0,303	0,I55	0,I65	0,205	3	I	0
0,I55	0,303	0,I65	0,205	0,40I	3	0	I
0,I65	0,303	0,205	0,40I	-	2	0	2
0,205	0,303	0,40I	-	-	I	0	3
0,303	0,383	0,40I	0,8I2	-	2	0	3
0,383	0,40I	0,40I	0,528	0,8I2	3	0	3
0,40I	0,40I	0,528	0,8I2	-	2	0	4
0,40I	0,453	0,528	0,8I2	3,046	3	0	4
0,453	0,588	0,528	0,8I2	3,046	3	I	4
0,528	0,588	0,72I	0,8I2	3,046	3	0	5
0,588	0,677	0,72I	0,82I	3,046	3	I	5
0,677	0,788	0,72I	0,8I2	3,046	3	2	5
0,72I	0,778	0,8I2	I,305	3,046	3	I	6
0,778	0,933	0,8I2	I,305	3,046	3	2	6
0,8I2	0,933	I,305	2,I54	3,046	3	I	7
0,993	I,036	I,305	2,I54	3,046	3	2	7
I,036	I,047	I,305	2,I54	3,046	3	3	7
I,047	I,054	I,305	2,I54	3,046	3	4	7
I,054	I,I88	I,305	2,I54	3,046	3	5	7
I,I88	I,355	I,305	2,I54	3,046	3	6	7
I,305	I,355	I,582	2,I54	3,046	3	5	8
I,355	I,406	I,582	2,I54	3,046	3	6	8
I,406	I,65I	I,582	2,I54	3,046	3	7	8
I,582	I,65I	I,8I9	2,I54	3,046	3	6	9
I,65I	I,954	I,8I9	2,I54	3,046	3	7	9
I,8I9	I,954	2,I54	3,046	3,390	3	6	I0

Таблица 9.2

ALFA = 0.801	-LOG (ALFA) = 0.2[illegible]2
ALFA = 0.719	-LOG (ALFA) = 0.330
ALFA = 0.724	-LOG (ALFA) = 0.323
ALFA = 0.800	-LOG (ALFA) = 0.223
ALFA = 0.817	-LOG (ALFA) = 0.202
ALFA = 0.430	-LOG (ALFA) = 0.844
ALFA = 0.611	-LOG (ALFA) = 0.493
ALFA = 0.669	-LOG (ALFA) = 0.402
ALFA = 0.361	-LOG (ALFA) = 1.018
ALFA = 0.914	-LOG (ALFA) = 0.090
ALFA = 0.748	-LOG (ALFA) = 0.258
ALFA = 0.005	-LOG (ALFA) = 5.291
ALFA = 0.505	-LOG (ALFA) = 0.684
ALFA = 0.679	-LOG (ALFA) = 0.387
ALFA = 0.642	-LOG (ALFA) = 0.443
ALFA = 0.604	-LOG (ALFA) = 0.505
ALFA = 0.317	-LOG (ALFA) = 1.148
ALFA = 0.460	-LOG (ALFA) = 0.776
ALFA = 0.068	-LOG (ALFA) = 2.690
ALFA = 0.597	-LOG (ALFA) = 0.515
ALFA = 0.946	-LOG (ALFA) = 0.055
ALFA = 0.966	-LOG (ALFA) = 0.035
ALFA = 0.511	-LOG (ALFA) = 0.671
ALFA = 0.434	-LOG (ALFA) = 0.835
ALFA = 0.574	-LOG (ALFA) = 0.555
ALFA = 0.775	-LOG (ALFA) = 0.255
ALFA = 0.293	-LOG (ALFA) = 1.227
ALFA = 0.622	-LOG (ALFA) = 0.475
ALFA = 0.220	-LOG (ALFA) = 1.514
ALFA = 0.043	-LOG (ALFA) = 3.141
ALFA = 0.085	-LOG (ALFA) = 2.466
ALFA = 0.509	-LOG (ALFA) = 0.675
ALFA = 0.347	-LOG (ALFA) = 1.058

Продолжение табл. 9.2

ALFA = 0.207	-LOG (ALFA) = 1.514
ALFA = 0.683	-LOG (ALFA) = 0.381
ALFA = 0.377	-LOG (ALFA) = 0.976
ALFA = 0.545	-LOG (ALFA) = 0.607
ALFA = 0.871	-LOG (ALFA) = 0.139
ALFA = 0.531	-LOG (ALFA) = 0.632
ALFA = 0.950	-LOG (ALFA) = 0.051
ALFA = 0.505	-LOG (ALFA) = 0.682
ALFA = 0.709	-LOG (ALFA) = 0.343

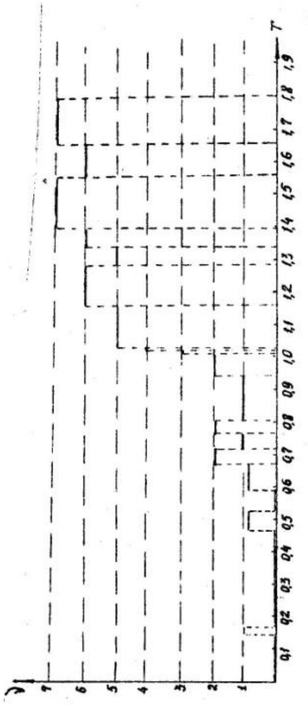

Рис. 9.6

Задача 1. Одноканальная СМО с очередью ограниченной длины (рис.9.2).

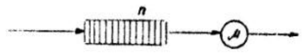

Рис. 9.2

Время между поступлением заявок распределено равномерно на отрезке [0,2], время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu = 1$. Длина очереди $n = 1$. Если очередь закончена, то поступившее вновь требование покидает СМО без обслуживания. Моделирование закончить после обслуживания заданного числа заявок. Построить заданные характеристики для длины очереди.

Задача 2. Многоканальная СМО с отказами (рис.9.3).

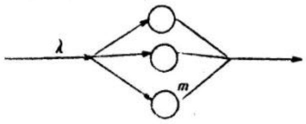

Рис. 9.3

Если все каналы заняты, заявка, вновь поступившая в систему, покидает систему без обслуживания. Время между поступлением заявок распределенно экспоненциально, с параметром $\lambda = 1$. Количество каналов $m = 2$. Время обслуживания заявок на каждом приборе распределено равномерно, на отрезке [0,1]. Моделирование закончить при достижении заданного модельного времени T. Постройте заданные характеристики для количества занятых каналов.

Задача 3. Одноканальная СМО с обратной связью (рис.9.4)

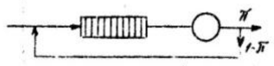

Рис. 9.4

Время между поступлением заявок распределно равномерно на отрезке [0,2], время обслуживания распределено равномерно на отрезке [0,I]. Вероятность возвращения уже обслуженной заявки в очередь $\pi = 0.5$. Очередь не ограничена. Моделирование закончить после обслуживания заданного числа заявок. Построить заданные характеристики для длины очереди.

ЛИТЕРАТУРА

I. Вагнер Г. Основы исследования организаций. М.: Мир, 1972.
2. Венцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972.
3. Венцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1980.
4. Кофман А., Анри-Лабордер А. Модели и методы исследования операций. М.: Мир, 1977.
5. Раскин Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления. М.: Советское радио, 1976.
6. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.
7. Литтл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере - экономические и математические методы. 1965., № I т.I.
8. Сборник научных программ на Фортране. Выпуск I. Статистика. М.: Статистика, 1974.
9. Форсайт Дж, Малькольм М. и Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, I980.

СОДЕРЖАНИЕ

Иван Васильевич Максимей, Рашид Сулейманович Галиев,
Александр Сергеевич Аксенов

Лабораторный практикум по курсу "Исследование операций"

Редактор Е.Ф.Зайцева
Подписано к печати 10.12.1981 г. АЗ 40769 Формат 60х84 1/16.
Бумага писчая № 1. Печать офсетная. Усл.п.л. 3,3. Уч.-изд.л.2,8.
Тираж 250. Заказ 376 Цена 10 к.
Отпечатано на ротапринте ГГУ, г.Гомель, ул.Советская, 104.