УДК 531.51:531.18:530.12

# МАССА МАССИВНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ГРАВИТАЦИОННОГО ДЕФЕКТА

**Н.А. Ахраменко, Л.М. Булавко**

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

# MASS OF MASSIVE SPHERICAL SHELL WITH REGARD TO GRAVITATIONAL DEFECT

**N.A. Akhramenko, L.M. Bulauko**

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

Получено выражение, определяющие массу сферической пылевидной оболочки с учетом гравитационного дефекта. Показано, что масса сферической пылевидной оболочки увеличивается с ростом ее радиуса. В предельном случае масса стремится к свободной величине, не связанной гравитационным взаимодействием массы.

***Ключевые слова***: *теория тяготения, сферическая пылевидная оболочка, гравитационный дефект массы.*

The expression defining the mass of the spherical dustlike shell with regard to the gravitational defect is obtained. It is shown that the mass of a spherical dustlike shell increases with its radius. In the limiting case, the mass tends to the value of free, not connected with gravitational interaction of mass.

***Keywords***: *theory of gravitation, dustlike spherical shell, gravitational mass defect.*

### *Введение*

Поле тяготения проявляет себя в первую очередь тем, что оказывает силовое воздействие на находящиеся в нем массивные материальные тела. В связи с этим в физике гравитационных явлений к непосредственно измеряемым величинам следует отнести гравитационную массу и напряжённость гравитационного поля. В теории тяготения Ньютона гравитационная масса или тяготеющая материя является источником гравитационного поля, напряженность которого представляет собой его силовую характеристику. Как известно [1]–[6], в теории тяготения Ньютона напряженность статического поля тяготения определяется величиной силы, действующей в гравитационном поле на покоящееся пробное тело единичной массы, и является вектором ускорения свободного падения.

Большинство небесных тел имеют с хорошим приближением сферически-симметричное распределение масс. Таковыми являются звезды, планеты, спутники планет. В связи с этим значительная часть задач посвящена исследованию гравитационного поля сферически-симметричных тел. Гравитационное поле таких тел также будет являться сферически-симметричным. На разных стадиях эволюции с течением времени небесные тела изменяют как размеры, так и массу, а также плотность.

В классической механике, и в частности в теории тяготения Ньютона, масса рассматривается как аддитивная величина, т.е. масса системы равна сумме масс составляющих ее тел [1]–[6]. В релятивистской механике масса – неаддитивная величина и может быть определена через полную энергию тела $E$ и его импульс $p$ [7]

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2,$$

где $c$ – скорость света в вакууме.

Полная энергия может зависеть от взаимного расположения частей системы относительно друг друга и силового поля, и поэтому масса при изменении конфигурации может изменяться. В частности, масса сферической пылевидной оболочки может зависеть от радиуса, что рассмотрено в [8].

В данной работе определяется масса массивной сферической пылевидной оболочки в зависимости от радиуса, исходя из позиций классической механики в сочетании с соотношением, связывающим массу с энергией. Для этого вначале найдем напряженность гравитационного поля массивной пылевидной сферической оболочки, а затем найдем массу.

### *1 Напряженность гравитационного поля массивной пылевидной сферической оболочки*

Рассмотрим сферически симметричный источник статического гравитационного поля – массивную пылевидную сферическую оболочку радиуса $R$ малой толщины $\Delta R$. Если радиус-вектор $\mathbf{r}$ проведен из центра сферы, то из соображений симметрии следует, что создаваемое таким источником поле будет обладать сферической симметрией:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -g(r)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Напряженность гравитационного поля $g(r)$ будет изменяться по толщине, изменяясь от нуля на внутренней поверхности до максимального значения на внешней поверхности. В точке $r$, для которой $R < r < R + \Delta R$ напряженность гравитационного поля будет создаваться только той массой, которая находится внутри сферы радиуса $r$. Поэтому величину напряженности гравитационного поля можно описать следующей зависимостью

$$g = \frac{4}{3}\pi \frac{G}{r^2} \rho \left(r^3 - R^3\right), \qquad (1.1)$$

где $G$ – гравитационная постоянная, $\rho$ – плотность, $R < r < R + \Delta R$.

Найдем среднее значение величины напряженности гравитационного поля по толщине

$$g_{ср.т} = \frac{1}{\Delta R} \int\limits_{R}^{R+\Delta R} g dr. \qquad (1.2)$$

Подставляя в (1.2) величину напряженности гравитационного поля $g$ из (1.1), получим

$$g_{ср.т} = \frac{1}{\Delta R} \int\limits_{R}^{R+\Delta R} \frac{4}{3}\pi \frac{G}{r^2} \rho \left(r^3 - R^3\right) dr. \qquad (1.3)$$

Вычисляя интеграл в (1.3), получим

$$g_{ср.т} = G\rho \frac{2}{3}\pi \frac{3R\Delta R + \Delta R^2}{R + \Delta R}. \qquad (1.4)$$

При условии $\Delta R \ll R$ ($\Delta R \to 0$) из (1.4) следует, что $g_{ср.т}$ стремится к величине

$$g_{ср.т} = 2\pi G \rho \Delta R. \qquad (1.5)$$

Масса сферической оболочки

$$m = V\rho = \frac{4}{3}\pi \left[\left(R + \Delta R\right)^3 - R^3\right]\rho,$$

где $V = \frac{4}{3}\pi \left[\left(R + \Delta R\right)^3 - R^3\right]$ – объем сферической оболочки.

При условии $\Delta R \ll R$ ($\Delta R \to 0$) для массы можно записать

$$m = 4\pi R^2 \Delta R \rho. \qquad (1.6)$$

Тогда выражение (1.5) с учетом (1.6) можно представить в виде

$$g_{ср.т} = \frac{Gm}{2R^2}. \qquad (1.7)$$

Найдем также среднее значение величины напряженности гравитационного поля по объему

$$g_{ср.V} = \frac{1}{V}\int\limits_{V} g dv = \frac{1}{V} \int\limits_{R}^{R+\Delta R} g 4\pi r^2 dr, \qquad (1.8)$$

где объем $V$ – объем сферической оболочки, а элементарный объем $dv = 4\pi r^2 dr$.

Вычисляя интеграл в (1.8), учитывая условие $\Delta R \ll R$ ($\Delta R \to 0$), а также выражение (1.6), получим, что среднее значение величины напряженности гравитационного поля по объему выражается следующим образом:

$$g_{ср.V} = \frac{Gm}{2R^2}. \qquad (1.9)$$

Как видим, правые части выражений (1.7) и (1.9) совпадают, т. е. среднее значение величины напряженности гравитационного поля по толщине равно среднему значению величины напряженности гравитационного поля по объему.

Таким образом, задачу по радиальному расширению тонкой сферической оболочки можно свести к задаче для сферической поверхности. При этом полагаем, что напряженность гравитационного поля сферической поверхности, включая точки самой поверхности, представится в виде

$$\mathrm{g}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \text{при } r < R; \\ -\dfrac{Gm}{2R^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r}, & \text{при } r = R; \\ -\dfrac{Gm}{r^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r}, & \text{при } r > R. \end{cases} \qquad (1.10)$$

### *2 Масса массивной пылевидной сферической оболочки*

Рассмотрим массивную сферическую поверхность радиуса $R$ и массой $m$, сформированную пылевидной системой частиц, взаимодействующих между собой посредством только гравитационного поля. Пусть масса распределена равномерно по поверхности. Масса обуславливает наличие сил, стягивающих оболочку.

Величина напряженности гравитационного поля в точках поверхности сферы представляется соответственно (1.10) в виде

$$g = \frac{Gm}{2R^2}, \qquad (2.1)$$

Вектор $\vec{g}$ направлен к центру сферы (рисунок 2.1).

Сила, действующая на элемент поверхности площадью $dS$ вследствие гравитационного взаимодействия (с учетом (2.1)), равна по величине

$$f_{гр} = gdm = g\frac{m}{4\pi R^2}dS = \frac{Gm^2}{8\pi R^4}dS \qquad (2.2)$$

и направлена к центру сферы.

Пусть сфера изменяет радиус с величины $R$ до величины $R + dR$ (пунктирная окружность на рисунке 2.1) вследствие того, что каждая ее частица под действием распределенной по поверхности внешней силы $\vec{f}$, компенсирующей силы тяготения $\vec{f}_{гр}$ (2.2), движется радиально от центра (с бесконечно малой скоростью).

Элементарная работа сил, растягивающих оболочку, при этом равна

$$\delta A = f 4\pi R^2 dR = \frac{Gm^2}{8\pi R^4} 4\pi R^2 dR = \frac{Gm^2}{2R^2} dR. \qquad (2.3)$$

Положим, что совершаемая внешними силами работа над оболочкой (2.3) приводит к увеличению массы оболочки (вследствие взаимосвязи массы и энергии). При этом

$$\delta A = c^2 dm. \qquad (2.4)$$

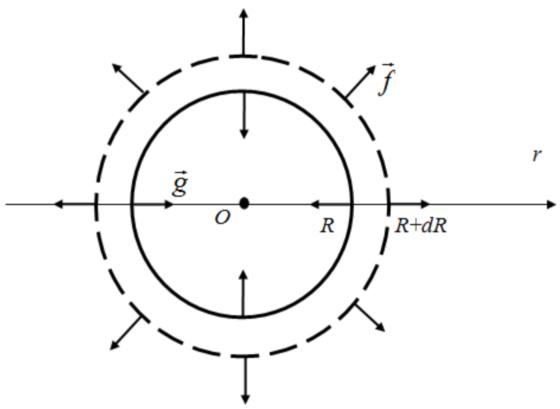


Рисунок 2.1 – Силы $\vec{f}$, растягивающие сферическую оболочку

Тогда, используя (2.3) и (2.4) можно записать

$$\frac{Gm^2}{2R^2}dR = c^2 dm. \qquad (2.5)$$

Соотношение (2.5) устанавливает величину приращения массы оболочки при совершении работы против сил тяготения.

Разделим переменные в уравнении (2.5)

$$\frac{G}{2R^2}dR = c^2\frac{dm}{m^2}. \qquad (2.6)$$

Из (2.6) получим

$$\int\frac{G}{2R^2}dR = \int c^2\frac{dm}{m^2}. \qquad (2.7)$$

Интегрирование выражения (2.7) дает

$$-\frac{G}{2R} = -\frac{c^2}{m} + const. \qquad (2.8)$$

Таким образом, масса зависит от радиуса оболочки.

Константу интегрирования в (2.8) можно найти из условия, что на бесконечности масса равна $M$ (свободной, не связанной гравитационным взаимодействием массе).

Тогда для константы имеем

$$const = \frac{c^2}{M}. \qquad (2.9)$$

Подставив константу (2.9), получаем закон изменения массы оболочки от ее радиуса

$$-\frac{G}{2R} = -\frac{c^2}{m} + \frac{c^2}{M}. \qquad (2.10)$$

Из (2.10) для величины $m$ получим

$$m = \frac{M}{1+\dfrac{GM}{2c^2R}}. \qquad (2.11)$$

Отсюда следует, что масса оболочки возрастает вместе с увеличением радиуса оболочки и на бесконечности является максимальной (равна свободной массе $M$).

***Заключение***

Таким образом определено, что масса оболочки при произвольном радиусе меньше её свободной массы. Работа при расширении оболочки совершается против сил тяготения, поэтому по определению это есть энергия связи гравитационного поля, определяющая дефект массы оболочки.

Примечательным является то обстоятельство, что точно такое же по форме выражение (2.11) для массы сферической пылевидной оболочки получается и в калибровочной теории скалярного гравитационного поля [8] с тем лишь замечанием, что в [8] слева от знака равенства под $m$ понимается полная масса оболочки, включая массу самого поля.

Данная работа была доложена на научном семинаре по оптике и теоретической физике, посвященному 70-летию со дня рождения А.Н. Сердюкова, который проходил в г. Гомеле (ГГУ им. Ф. Скорины) 21 мая 2014 года.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сивухин*, *Д.В.* Общий курс физики в 5 т. Т. 1. Механика / Д.В. Сивухин. – М. : Физматлит, 2005. – 560 с.

2. *Савельев*, *И.В.* Курс физики в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – М. : Наука, 1989. – 352 с.

3. *Матвеев*, *А.Н.* Механика и теория относительности / А.Н. Матвеев. – М. : ОНИКС 21 век, 2003. – 432 с.

4. *Детлаф*, *А.А.* Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М. : Высш. шк., 1989. – 608 с.

5. *Трофимова*, *Т.И.* Курс физики / Т.И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 1997. – 542 с.

6. *Яворский*, *Б.М.* Справочник по физике / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М. : Наука, 1990. – 624 с.

7. *Ландау*, *Л.Д.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 512 с.

8. *Сердюков*, *А.Н.* Калибровочная теория скалярного гравитационного поля / А.Н. Сердюков. – Гомель : Изд-во Гомельского гос. ун-та, 2005. – 257 с.

*Поступила в редакцию 30.06.14.*