

УДК 512.542

О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ФОРМАЦИИ ВСЕХ ГРУПП С K - \mathfrak{F} -СУБНОРМАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

А.С. Вегера

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON LOCAL PROPERTIES OF THE FORMATIONS OF GROUPS WITH K - \mathfrak{F} -SUBNORMAL SYLOW SUBGROUPS

A.S. Vegera

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Рассматривается класс всех конечных групп, силовские подгруппы которых являются K - \mathfrak{F} -субнормальными. Исследуется условие его насыщенности, а также устанавливается локальный экран в разрешимом случае.

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, K - \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа, насыщенная формация, локальная формация.

The class of all finite groups with Sylow K - \mathfrak{F} -subnormal subgroups is considered. The condition of saturation of this class is investigated, as well as the local screen in solvable case is established.

Keywords: finite group, Sylow subgroup, K - \mathfrak{F} -subnormal subgroup, saturated formation, local formation.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Хорошо известно, что группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее силовская подгруппа является субнормальной в G . В 1969 году Т. Хоукс [1] обобщил понятие субнормальности, введя определение \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы в разрешимой группе. В 1978 году Л.А. Шеметков в монографии [2] распространил понятие \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы на произвольные конечные группы. Понятие \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы активно изучалось в различных направлениях и нашло многочисленные приложения [3]. В 1978 году О. Кегель [4] ввел понятие \mathfrak{F} -достижимой (K - \mathfrak{F} -субнормальной, согласно [3]) подгруппы.

В работе [5] А.Ф. Васильевым было начато рассмотрение следующей задачи. Пусть \mathfrak{F} – формация. Что можно сказать о структуре группы G , если все ее силовские подгруппы \mathfrak{F} -субнормальны в G ? В статье [6] А.Ф. Васильевым и Т.И. Васильевой был введен и исследован класс $\bar{w}\mathfrak{F}$ всех групп, силовские подгруппы которых являются \mathfrak{F} -субнормальными.

В работе [7] изучались свойства класса $\bar{w}\mathfrak{F}$ всех групп, у которых силовские подгруппы являются K - \mathfrak{F} -субнормальными. В частности, в классе разрешимых групп было установлено, что если \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация, то и класс $\bar{w}\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией.

В настоящей работе продолжено исследование свойств класса $\bar{w}\mathfrak{F}$ для непустой формации \mathfrak{F} . В частности, доказана насыщенность формации $\bar{w}\mathfrak{F}$ в общем случае (без ограничения разрешимости). Кроме того, найдено локальное задание формации $\bar{w}\mathfrak{F}$ в разрешимом случае.

1 Предварительные результаты

В работе используются стандартные обозначения, определения и результаты. Необходимые сведения из теории групп и их формаций можно найти в монографиях [2], [3], [9].

Напомним, что \mathbb{P} – множество всех простых чисел; \mathfrak{G} – это класс всех групп; \mathfrak{G}_π – класс всех π -групп, где π – некоторое множество простых чисел ($\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}_\pi$ для $\pi = \{p\}$); \mathfrak{N} – класс всех нильпотентных групп; \mathfrak{N}_π – класс всех нильпотентных π -групп; \mathfrak{S} – класс всех разрешимых групп.

Класс групп \mathfrak{F} называется формацией, если он является замкнутым относительно факторгрупп и подпрямых произведений. Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если она является насыщенным классом, т. е. если из $G/N \in \mathfrak{F}$ и $N \leq \Phi(G)$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация \mathfrak{F} называется наследственной, если \mathfrak{F} вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы. Через $G^\mathfrak{F}$ обозначается \mathfrak{F} -корадикал группы G , т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G , для которой $G/G^\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$.

Определение 1.1 [3, с. 236]. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной в G (записывается $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$.

Определение 1.2 [3, с. 236]. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппа H группы G называется K - \mathfrak{F} -субнормальной в G (записывается $H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$), если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \triangleleft H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$.

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G . Подгруппа H группы G называется π -подгруппой, если $\pi(H)$ содержится в некотором множестве π простых чисел.

$O_p(G)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа группы G , где $p \in \mathbb{P}$.

$O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π -подгруппа группы G , где $\pi \subseteq \mathbb{P}$.

$\text{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p -подгрупп группы G для некоторого $p \in \mathbb{P}$. Тогда $\text{Syl}(G) = \bigcup_{p \in \pi(G)} \text{Syl}_p(G)$ – это множество всех силовских подгрупп группы G .

Пусть \mathfrak{X} – произвольный класс групп. Тогда будем обозначать $\pi(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \pi(G)$.

Определение 1.3 [9, с. 16]. Пусть \mathfrak{F}_1 – класс групп, \mathfrak{F}_2 – формация. Корадикальным произведением \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 называется класс

$$\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1).$$

Определение 1.4 [3, с. 95]. Пусть \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 – формации. Тогда $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 = (\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2) \cap (\mathfrak{F}_2 \circ \mathfrak{F}_1)$ называется прямым произведением формаций \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 .

Функция $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется локальным экраном. Через $LF(f)$ обозначим класс всех групп, у которых для любого главного фактора H/K группы G и для каждого простого числа p , делящего $|H/K|$, выполняется $G/C_G(H/K) \in f(p)$. Формация называется локальной, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F} = LF(f)$.

Экран f формации \mathfrak{F} называется внутренним, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Внутренний экран f формации \mathfrak{F} называется максимальным внутренним, если для любого ее внутреннего экрана h имеет место включение $h(p) \subseteq f(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$.

В работе [6] исследован класс групп $w\mathfrak{F}$, определяемый следующим образом.

Определение 1.5. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Класс групп $w\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F}) \text{ и } \forall H \in \text{Syl}(G): H \mathfrak{F}\text{-sn } G)$.

В дальнейшем будем использовать следующие свойства класса $w\mathfrak{F}$.

Лемма 1.6 [6, лемма 1.4]. Если \mathfrak{F} – наследственная формация, то $w\mathfrak{F}$ – наследственная формация.

Теорема 1.7 [6, теорема В]. Если \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация, то $w\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация.

В работе [7] изучается следующий класс групп.

Определение 1.8. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Класс групп $\bar{w}\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid \forall H \in \text{Syl}(G): H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G)$.

Лемма 1.9 [7, лемма 11]. Если \mathfrak{F} – наследственная формация, то $\bar{w}\mathfrak{F}$ – наследственная формация.

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся следующие результаты.

Теорема 1.10 [3, с. 95]. Пусть \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 – формации и $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) = \emptyset$. Обозначим $\pi(\mathfrak{F}_1) = \pi_1$ и $\pi(\mathfrak{F}_2) = \pi_2$. Тогда

$$\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid G = O_{\pi_1}(G) \times O_{\pi_2}(G),$$

где $O_{\pi_1}(G) \in \mathfrak{F}_1$ и $O_{\pi_2}(G) \in \mathfrak{F}_2$) – формация. Более того, если \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 – наследственные насыщенные формации, то $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ – также наследственная насыщенная формация.

Лемма 1.11 [10, лемма 2.1]. Пусть \mathfrak{F} – формация, $H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$, p – простое число и $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $O_p(H) \leq O_p(G)$.

Лемма 1.12 [10, лемма 2.2]. Пусть \mathfrak{F} – формация, группа $G = HA$, где H – $\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа, A – $\pi(\mathfrak{F})'$ -подгруппа и $H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$. Тогда $H \triangleleft G$.

Теорема 1.13 [11, лемма 3.1.1]. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация. Если подгруппа $H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-субнормальна}$ в G , то $H \cap M K\text{-}\mathfrak{F}\text{-субнормальна}$ в M для любой $M \leq G$.

Лемма 1.14 [11, лемма 3.1.9]. Если \mathfrak{F} – наследственная формация, $H \leq G \in \mathfrak{F}$ и все композиционные факторы группы G принадлежат \mathfrak{F} , то $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$ тогда и только тогда, когда $HK\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$.

Лемма 1.15 [9, лемма 4.13]. Пусть G – группа. Если $N \triangleleft G$, N и G/N – разрешимы, то G разрешима.

Лемма 1.16 [2, лемма 4.5]. Пусть f – локальный экран формации \mathfrak{F} . Группа G тогда и

только тогда принадлежит \mathfrak{F} , когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.

Пусть \mathfrak{F} – локальная формация и h – ее максимальный внутренний локальный экран. Обозначим через h^* – локальный экран такой, что $h^*(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \forall H \in \text{Syl}(G) : H \in h(p))$ для любого простого p .

Теорема 1.17 [6, теорема D]. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная насыщенная формация, h – ее максимальный внутренний локальный экран, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Тогда $w\mathfrak{F} = LF(h^*)$, где h^* – максимальный внутренний локальный экран формации $w\mathfrak{F}$.

Лемма 1.18 [2, теорема 3.3]. Локальная формация \mathfrak{F} имеет единственный максимальный внутренний локальный экран f , причем f удовлетворяет следующему условию: $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p .

Лемма 1.19 [2, лемма 3.9]. Если H/K – главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p -подгрупп, причем $F_p(G) \leq C_G(H/K)$.

2 Насыщенность формации $\bar{w}\mathfrak{F}$

Лемма 2.1. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация, группа $G \in \bar{w}\mathfrak{F}$ и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Тогда каждый композиционный фактор группы G принадлежит \mathfrak{F} .

Доказательство. Рассмотрим композиционный ряд $1 = A_0 \triangleleft A_1 \triangleleft \dots \triangleleft A_n = G$. Тогда фактор A_i/A_{i-1} является простой группой для любого $i = 1, \dots, n$. Обозначим произвольный фактор A_i/A_{i-1} через H . Из леммы 1.9 следует, что $A_i \in \bar{w}\mathfrak{F}$. Так как $\bar{w}\mathfrak{F}$ – гомоморф, то $H \cong A_i/A_{i-1} \in \bar{w}\mathfrak{F}$. Пусть $P \in \text{Syl}(H)$. Если $P = H$, то $|H| = p^a$, где $p \in \mathbb{P}$. Так как H – простая группа, то $|H| = p$. По условию $\pi(H) \subseteq \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Поэтому, $H \in \mathfrak{F}$. Пусть теперь $P \neq H$. Так как подгруппа P $K-\mathfrak{F}$ -sn H и H – простая неабелева группа, то существует цепь $P = P_0 \leq \dots \leq P_{k-1} < P_k = H$ и $P_k^\delta = H^\delta \leq P_{k-1}$. Так как $H^\delta \triangleleft H$, то $H^\delta = 1$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. \square

Следующая теорема устанавливает связь между классами $\bar{w}\mathfrak{F}$ и $w\mathfrak{F}$.

Теорема 2.2. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация. Тогда $\bar{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi \times w\mathfrak{F}$, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$.

Доказательство. Докажем, что для любой группы $G \in \mathfrak{N}_\pi \times w\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \bar{w}\mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{N}_\pi \times w\mathfrak{F}$. Тогда существуют такие подгруппы

$A \in \mathfrak{N}_\pi$ и $B \in w\mathfrak{F}$ в G , что $G = A \times B$. Рассмотрим произвольную силовскую подгруппу $P \leq G$. Возможны два случая. Пусть $P \leq A$. Так как A – нильпотентная группа, то $P \triangleleft A$. Тогда имеем цепь подгрупп $P \triangleleft A \triangleleft G$. Следовательно, по определению, P $K-\mathfrak{F}$ -sn G . Рассмотрим второй случай. Пусть $P \leq B$. Так как $B \in w\mathfrak{F}$, то P \mathfrak{F} -sn B . Из $B \triangleleft G$, следует P $K-\mathfrak{F}$ -sn G . Поэтому произвольная силовская подгруппа P $K-\mathfrak{F}$ -sn G . Таким образом, $G \in \bar{w}\mathfrak{F}$.

Докажем теперь, что для любой группы $G \in \bar{w}\mathfrak{F}$ выполняется $G \in \mathfrak{N}_\pi \times w\mathfrak{F}$. Согласно теореме 1.10, необходимо доказать, что группа G представима в виде $G = O_{\pi'}(G) \times O_\pi(G)$, где $O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{N}_\pi$ и $O_\pi(G) \in w\mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \bar{w}\mathfrak{F}$. Пусть n – число всех силовских p -подгрупп группы G , где $p \in \pi'$. Рассмотрим P_i – произвольную силовскую p_i -подгруппу группы G , где $p_i \in \pi'$ и $i = 1, \dots, n$. Тогда по лемме 1.11 подгруппа $P_i = O_{p_i}(P_i) \subseteq O_{p_i}(G)$. При этом порядок $|O_{p_i}(G)| \leq |P_i|$, поэтому $P_i = O_{p_i}(G)$. Следовательно, $P_i \triangleleft G$. Рассмотрим произведение $A = P_1 P_2 \dots P_n$. Ясно, что A является нормальной нильпотентной подгруппой группы G . Так как $|A|$ и $|G:A|$ взаимно просты, то A – π' -холлова подгруппа группы G . Следовательно, $A = O_{\pi'}(G)$ и $A \in \mathfrak{N}_\pi$.

По теореме Шура-Цассенхауза [8] подгруппа A имеет дополнение в G , то есть существует подгруппа B порядка $|G:A|$ такая, что $G = AB$ и $A \cap B = 1$. Пусть H – силовская подгруппа из B . Рассмотрим подгруппу HA . Так как \mathfrak{F} – наследственная формация и H $K-\mathfrak{F}$ -sn G , то по лемме 1.13 подгруппа $HA \cap H = H$ является $K-\mathfrak{F}$ -субнормальной в HA . По лемме 1.12 подгруппа $H \triangleleft HA$. Тогда $A \subseteq N_G(H)$. Обозначим через m – число всех силовских p -подгрупп группы G , где $p \in \pi(B)$. Так как любая подгруппа порождается своими силовскими подгруппами, то $B = \langle H_1, H_2, \dots, H_m \rangle$, где $H_i \in \text{Syl}(B)$ и $i = 1, \dots, m$. При этом $A \subseteq N_G(H_i)$ для любого $i = 1, \dots, m$, то есть для любых $a \in A$ и $h_i \in H_i$ следует, что $h_i^a \in H_i$. Рассмотрим произвольный элемент $h_1 h_2 \dots h_m$ из группы B . Тогда $(h_1 h_2 \dots h_m)^a = h_1^a h_2^a \dots h_m^a \in \langle H_1 H_2 \dots H_m \rangle$. Следовательно, $A \subseteq N_G(B)$. Таким образом, $N_G(B) = G$. Тогда $B \triangleleft G$. Так как $|B|$ и $|G:B|$ взаимно просты, то B – π -холлова подгруппа в G . Следовательно, $B = O_\pi(G)$. Итак, $G = A \times B = O_{\pi'}(G) \times O_\pi(G)$.

Так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то согласно лемме 1.9 класс $\overline{w\mathfrak{F}}$ – наследственная формация. Значит, $B \in \overline{w\mathfrak{F}}$. Тогда из леммы 2.1 следует, что каждый композиционный фактор B принадлежит \mathfrak{F} . Пусть S – произвольная силовская подгруппа из B . Так как S K - \mathfrak{F} -sn B , то по лемме 1.14 подгруппа S \mathfrak{F} -sn B . Тогда $B \in w\mathfrak{F}$.

Итак, $\overline{w\mathfrak{F}} = \mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F}$. \square

Следствие 2.3. Если \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация, то $\overline{w\mathfrak{F}}$ – наследственная насыщенная формация.

Доказательство. Согласно лемме 1.9 класс групп $\overline{w\mathfrak{F}}$ является наследственной формацией. По теореме 2.2 класс групп $\overline{w\mathfrak{F}} = \mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F}$. Заметим, что $\mathfrak{N}_{\pi'}$ – насыщенная формация. И $w\mathfrak{F}$ – насыщенная формация согласно теореме 1.7. Тогда по теореме 1.10 прямое произведение двух насыщенных формаций также является насыщенной формацией. \square

3 Локальный экран формации $\overline{w\mathfrak{F}}$

Для дальнейших рассуждений сформулируем и докажем две следующие леммы.

Лемма 3.1. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая формация. Если в группе $G \in \mathfrak{E}$ существует разрешимая \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа, то G – разрешимая группа.

Доказательство. Пусть H – разрешимая \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа некоторой группы G . Тогда существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ ($i = 1, \dots, n$). Так как $H_1^{\mathfrak{F}} \leq H_0$ и H_0 разрешима, то $H_1^{\mathfrak{F}}$ – разрешимая подгруппа. Так как фактор-группа $H_1 / H_1^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и по условию $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$, то $H_1 / H_1^{\mathfrak{F}}$ – разрешимая группа. Следовательно, по лемме 1.15 группа H_1 разрешима. Аналогично для любого i получаем, что из $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ следует разрешимость $H_i^{\mathfrak{F}}$ и $H_i / H_i^{\mathfrak{F}}$ и, следовательно, разрешимость группы H_i (где $i = 2, \dots, n$). Таким образом, $H_n = G$ – разрешимая группа. \square

Лемма 3.2. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая формация. Тогда $w\mathfrak{F}$ и $\overline{w\mathfrak{F}}$ – разрешимые формации.

Доказательство. Пусть $G \in w\mathfrak{F}$. Так как любая силовская подгруппа группы G разрешима и \mathfrak{F} -субнормальна в G , то согласно лемме 3.1 группа G разрешима. Следовательно, $w\mathfrak{F}$ – разрешимая формация.

Пусть теперь $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$. По теореме 2.2 группа $G \in \mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F}$. Так как формации $\mathfrak{N}_{\pi'}$ и $w\mathfrak{F}$ разрешимы, то группа G разрешима. \square

Лемма 3.3. Пусть \mathfrak{F}_i – формация и f_i – ее локальный экран, где $i = 1, 2$. Если $f_1(p) \subseteq f_2(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда по лемме 1.16 фактор-группа $G / F_p(G) \in f_1(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. Так как по условию $f_1(p) \subseteq f_2(p)$, то $G / F_p(G) \in f_2(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. Тогда по лемме 1.16 группа $G \in \mathfrak{F}_2$. \square

Лемма 3.4. Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$ – локальная формация, где f – ее разрешимый локальный экран. Тогда \mathfrak{F} – разрешимая формация.

Доказательство. Осуществляется проверкой соответствующих определений. \square

Согласно теореме Гашюца – Любезедер – Шмида любая насыщенная формация является локальной, и наоборот. Поэтому в силу следствия 2.3 возникает задача о нахождении локального задания формации $\overline{w\mathfrak{F}}$.

Пусть \mathfrak{F} – локальная формация и h – ее максимальный внутренний локальный экран, который существует и единственен по теореме 1.18. Обозначим через h^* – локальный экран такой, что $h^*(p) = (G \in \mathfrak{E} \mid \forall H \in \text{Syl}(G) : H \in h(p) \text{ и } H \text{ K-}\mathfrak{F}\text{-sn } G)$ для любого простого p . Следующая теорема устанавливает локальный экран $\overline{w\mathfrak{F}}$ для разрешимой наследственной насыщенной формации \mathfrak{F} .

Теорема 3.5. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная насыщенная формация, h – ее максимальный внутренний локальный экран, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Тогда $\overline{w\mathfrak{F}} = LF(f)$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации $\overline{w\mathfrak{F}}$ такой, что

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p, & \text{если } p \in \pi'; \\ \mathfrak{N}_p h^*(p) \cap \mathfrak{E}_{\pi}, & \text{если } p \in \pi. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть формация $\mathfrak{X} = LF(f)$. Покажем, что $\overline{w\mathfrak{F}} = \mathfrak{X}$. Вначале докажем, что $\overline{w\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{X}$.

Напомним, что $\mathfrak{N}_{\pi'} = LF(f_1)$, где

$$f_1(p) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p, & \text{если } p \in \pi', \\ \emptyset, & \text{если } p \in \pi. \end{cases}$$

По теореме 1.17 $w\mathfrak{F} = LF(f_2)$, где

$$f_2(p) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } p \in \pi' \\ \mathfrak{N}_p h^*(p) \cap \mathfrak{E}_{\pi}, & \text{если } p \in \pi. \end{cases}$$

Так как $f_1(p) \subseteq f(p)$ и $f_2(p) \subseteq f(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$, то по лемме 3.3 следует, что $\mathfrak{N}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{X}$ и $w\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. А так как любая формация замкнута относительно прямых произведений, то $\mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Тогда по теореме 2.2 формация $\overline{w\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{X}$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{X} \subseteq \overline{w\mathfrak{F}}$. Предположим, что $\mathfrak{X} \not\subseteq \overline{w\mathfrak{F}}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{X} \setminus \overline{w\mathfrak{F}}$. Покажем, что $\Phi(G) = 1$. Предположим обратное. Тогда $|G/\Phi(G)| < |G|$. Таким образом, $G/\Phi(G) \in \overline{w\mathfrak{F}}$. Так как $\overline{w\mathfrak{F}}$ – насыщенная формация, то $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$. Получили противоречие. Итак, $\Phi(G) = 1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Предположим, что существует минимальная нормальная подгруппа K группы G такая, что $K \neq N$. Тогда $|G/N| < |G|$ и $|G/K| < |G|$. Следовательно, $G/N \in \overline{w\mathfrak{F}}$ и $G/K \in \overline{w\mathfrak{F}}$. Ясно, что $N \cap K = 1$. Так как \mathfrak{X} – формация, то $G/(N \cap K) \simeq G \in \overline{w\mathfrak{F}}$. Получили противоречие. Итак, группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $G/N \in \overline{w\mathfrak{F}}$.

Так как $G \in \mathfrak{X}$, то по лемме 3.4 группа G разрешима. Тогда N является элементарной абелевой p -группой. В этом случае $G = NM$, где M – максимальная подгруппа G и $N \cap M = 1$. Ясно, что $N \leq C_G(N)$. Предположим, что $N < C_G(N)$. Так как $C_G(N)M = G$, то $C_G(N) \cap M \neq 1$. Тогда $D = C_G(N) \cap M \triangleleft M$. Так как $G = NM$, то рассмотрим произвольный элемент $g = nm$ группы G , где $n \in N$, $m \in M$. Очевидно $D^n = D^m = D^g = D$. Следовательно, $D \triangleleft G$. Но при этом, $N \cap D = 1$. Получили противоречие, так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G . Следовательно, $N = C_G(N)$.

Пусть $N = \pi'$ -группа. Так как $G \in \mathfrak{X} = LF(f)$, то $G/C_G(N) \in f(p) = \mathfrak{N}_p$, где $p \in \pi'$. Согласно лемме 1.19 фактор-группа $G/C_G(N)$ не содержит неединичных нормальных p -подгрупп. Следовательно, $G/C_G(N) = 1$. То есть, $G = C_G(N) = N$. Так как группа $N = G$ – элементарная абелева p -группа, где $p \in \pi'$, то $G \in \mathfrak{N}_{\pi'}$. Согласно теореме 2.2 группа $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$.

Пусть $N = \pi$ -группа. Так как $G \in \mathfrak{X} = LF(f)$, то $G/C_G(N) \in f(p) = \mathfrak{N}_p h^*(p) \cap \mathfrak{S}_{\pi}$, где $p \in \pi$. По лемме 1.19 $G/N \in h^*(p) \cap \mathfrak{S}_{\pi}$. Тогда любая силовская подгруппа из G/N является K - \mathfrak{F} -субнормальной. Так как

$$G/N \in \mathfrak{S}_{\pi} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})},$$

то по лемме 1.14 следует, что любая силовская подгруппа из G/N является \mathfrak{F} -субнормальной. Следовательно, $G/N \in w\mathfrak{F}$. С другой стороны,

$G/C_G(N) = G/N \in h^*(p)$. Отсюда $G \in w\mathfrak{F}$. Тогда по теореме 2.2 группа $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$.

Таким образом, доказано, что $G \in \overline{w\mathfrak{F}}$. Получили противоречие. Значит, $\mathfrak{X} \subseteq \overline{w\mathfrak{F}}$.

Итак, $\overline{w\mathfrak{F}} = \mathfrak{X}$.

Заметим, что по построению локальный экран f является максимальным внутренним. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Hawkes, T. On formation subgroups of a finite soluble group / T. Hawkes // J. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 44. – P. 243–250.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
3. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006. – 385 p.
4. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30, № 3. – S. 225–228.
5. Васильев, А.Ф. О влиянии примарных \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.
6. Васильев, А.Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.
7. Вегера, А.С. О насыщенных формациях конечных групп, определяемых свойствами вложения силовских подгрупп / А.С. Вегера // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 154–158.
8. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
9. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа. – 2006. – 207 с.
10. Мурашко, В.И. О классе конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 55–61.
11. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Бел. навука, 2003. – 254 с.

Поступила в редакцию 30.05.14.