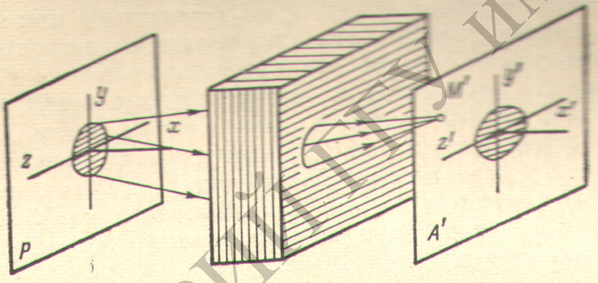
УДК 535.24.01

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСВЕЩЕННОСТИ И СВЕТОВОГО ПОТОКА С ПОМОЩЬЮ ЭЙКОНАЛА ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

И. Н. Тарнакин

Рассмотрена задача определения освещенности и светового потока в пространстве изображений центрированной оптической системы. Плоскость ламбертового источника и плоскость, где вычисляется освещенность, предполагаются оптически несопряженными. Получены в явном виде через коэффициенты точечного эйконала E выражения для освещенности от источников прямоугольной и эллиптической формы, а также формулы для светового потока через прямоугольное и эллиптическое отверстия в пространстве изображений оптической системы.

Известны [1–9] исследования распределения освещенности по полю в пространстве изображений оптической системы от источника, излучающего по закону Ламберта, в которых при вычислении освещенности точ-



ная граница области интегрирования в плоскости выходного зрачка находится в конечном счете при помощи расчета хода реальных лучей из данной точки поля, либо для приближенного определения освещенности используется теория аберраций третьего порядка.

Представляет также интерес вывод формулы для освещенности в произвольной плоскости пространства изображений, оптически несопряженной с источником, основанный на использовании свойств эйконала оптической системы [10].

Пусть плоскость P источника и плоскость A', где определяется освещенность, расположенные соответственно в пространствах предметов и изображений на конечных расстояниях от оптической системы, перпендикулярны оси симметрии оптической системы, изображенной на рисунке. Расположим начала прямоугольных систем координат x, y, z и x', y', z' соответственно в плоскостях P и A' так, чтобы оси x и x' совпадали с оптической осью центрированной оптической системы.

Для вычисления светового потока F, исходящего от плоского ламбертового источника, расположенного в плоскости P и проходящего далее через оптическую систему и площадку S' в плоскости A', воспользуемся известной фотометрической формулой

$$F = \int\limits_{s}\int\limits_{\Omega} B \cos i \, ds d\Omega, \tag{1}$$

где B — яркость источника, i — угол между осью элементарного пучка лучей, исходящих от элемента ds источника и заполняющих элементарный телесный угол $d\Omega$, с нормалью к излучающей площадке.

Интегрирование ведется по площади S источника и телесному углу Ω, в пределах которого все лучи, идущие от источника и проходящие через оптическую систему, пересекают площадку S'.

Зададим ось элементарного пучка лучей, исходящих из элемента ds, вектором $\mathbf{s}$ и пусть $|\mathbf{s}|=n$, где n — показатель преломления среды пространства предметов. Тогда проекции вектора $\mathbf{s}$ на координатные оси будут оптическими направляющими косинусами λ, μ, ν луча [11].

Выразим элементарный телесный угол $d\Omega$ как площадь поверхности сферы единичного радиуса через $d\mu$ и $d\nu$

$$d\Omega = \frac{d\mu d\nu}{n^2 \cos i}. \tag{2}$$

Используя соотношение $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = n^2$, найдем

$$\cos i = \frac{\sqrt{n^2 - \mu^2 - \nu^2}}{n}. \tag{3}$$

Подставляя значение $d\Omega$ из (2) в (1), а также учитывая, что $ds = dydz$, получим

$$F = \iiiint \frac{B}{n^2}\, dydzd\mu d\nu. \tag{4}$$

Сделаем замечания относительно двух условий, при выполнении которых будет использоваться формула (4).

Суммирование светового потока F по формуле (4) при постоянной яркости B предполагает, что равным приращениям четырехмерного дифференциала соответствуют одинаковые приращения потока F, проходящего через площадку S' независимо от выбора пучков лучей, что возможно, если переносимый каждым элементарным пучком поток dF ослабляется в одинаковой степени после прохождения через оптическую систему.

В этом случае потери потока в оптической системе в первом приближении могут быть учтены с помощью известного коэффициента пропускания τ, который определяет яркость после прохождения излучения через оптическую систему

$$F = \iiiint \frac{\tau B}{n^2}\, dydzd\mu d\nu. \tag{5}$$

Величина $\tau B/n^2$ является постоянной и может быть вынесена за знак интеграла.

Множество лучей, проходящих от источника S излучения через оптическую систему на площадку S', определяется лишь контуром источника в плоскости P. Это означает, что область определения интеграла (4) ограничивается той частью поля в пространстве изображений, для которой отсутствует виньетирование пучков лучей оправами линз и диафрагмами.

Для нахождения оптических направляющих косинусов μ и ν используем точечный эйконал E, который определяет длину оптического пути луча между двумя произвольными оптически несопряженными точками $M(y, z)$ и $M'(y', z')$, расположенными соответственно в плоскостях P и A'.

Пусть разложение для эйконала E имеет вид

$$E = E^{(0)} + E^{(2)} + E^{(4)}, \tag{6}$$

где $E^{(0)}$, $E^{(2)}$, $E^{(4)}$ — составляющие эйконала нулевого, второго и четвертого порядков (по координатам лучей y, z и y', z').

Из (6) следует, что рассмотрение точного хода лучей через оптическую систему заменяется на рассмотрение хода лучей, определяемого математической моделью оптической системы при помощи точечного эйконала.

Для функции E сохраним обозначения, разработанные Герцбергером [11], ввиду их удобства и наибольшей формализованности

$$E = E_0 + E_1 e_1 + E_2 e_2 + E_3 e_3 + \frac{1}{2} E_{11} e_1^2 + E_{12} e_1 e_2 + E_{13} e_1 e_3 + \frac{1}{2} E_{22} e_2^2 + E_{23} e_2 e_3 + \frac{1}{2} E_{33} e_3^2, \tag{7}$$

где инвариантные переменные e_1, e_2, e_3 определяются как

$$2e_1 = y^2 + z^2; \quad e_2 = yy' + zz'; \quad 2e_3 = y'^2 + z'^2. \tag{8}$$

Для нахождения μ и ν используем свойства производных эйконала

$$\left.\begin{aligned} \mu &= -\frac{\partial E}{\partial y} = -(E_1 + E_{11} e_1 + E_{12} e_2 + E_{13} e_3)\, y - (E_2 + E_{12} e_1 + E_{22} e_2 + E_{23} e_3)\, y', \\ \nu &= -\frac{\partial E}{\partial z} = -(E_1 + E_{11} e_1 + E_{12} e_2 + E_{13} e_3)\, z - (E_2 + E_{12} e_1 + E_{22} e_2 + E_{23} e_3)\, z'. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Из (9) следует, что при фиксированных значениях координат y и z луча в плоскости P величины μ и ν являются функциями координат y' и z' луча в плоскости A'. Поэтому при вычислении интеграла (5) нужно от переменных интегрирования μ и ν перейти к переменным y' и z'. Используя замену переменных, получим

$$F = \frac{\tau B}{n^2} \iiiint \left(\frac{\partial \mu}{\partial y'} \frac{\partial \nu}{\partial z'} - \frac{\partial \mu}{\partial z'} \frac{\partial \nu}{\partial y'} \right) dy\, dz\, dy'\, dz'. \tag{10}$$

Из (10) находим выражение для освещенности E' малой площадки конечных размеров в окрестности точки M' с координатами y' и z'

$$E'(y', z') = \frac{\tau B}{n^2} \iint \left(\frac{\partial \mu}{\partial y'} \frac{\partial \nu}{\partial z'} - \frac{\partial \mu}{\partial z'} \frac{\partial \nu}{\partial y'} \right) dy\, dz. \tag{11}$$

Частные производные, входящие в (11), вычисляются дифференцированием соотношений (9).

Приведем результаты интегрирования для частных случаев определения освещенности и светового потока.

Источник S — прямоугольник со сторонами $2y \times 2z$, расположенный симметрично относительно осей координат y и z

$$E'(y', z') = \frac{\tau B}{n^2} 4yz \left\{ \left[\frac{3}{20}(y^4 + z^4) + \frac{1}{6} y^2 z^2 \right] E_{12}^2 + \frac{1}{3} (y^2 - z^2)(y'^2 - z'^2) E_{13} E_{22} + \frac{2}{3} (y^2 y'^2 + z^2 z'^2) E_{22}^2 + \frac{1}{6} \left[y^2 (3y'^2 + 5z'^2) + z^2 (5y'^2 + 3z'^2) \right] E_{12} E_{23} + \frac{3}{4} (y'^2 + z'^2)^2 E_{23}^2 + \frac{2}{3} (y^2 + z^2) E_{12} E_2 + 2 (y'^2 + z'^2) E_{23} E_2 + E_2^2 \right\}. \tag{12}$$

Световой поток F через прямоугольник S' со сторонами $2y' \times 2z'$, расположенный симметрично относительно осей координат y' и z'

Интегрируя выражение (12) для E' по площади S', получим

$$F = \frac{\tau B}{n^2} 16 yzy'z' \left\{ \left[\frac{3}{20}(y^4 + z^4) + \frac{1}{6} y^2 z^2 \right] E_{12}^2 + \frac{1}{9} (y^2 - z^2)(y'^2 - z'^2) E_{13} E_{22} + \frac{2}{9} (y^2 y'^2 + z^2 z'^2) E_{22}^2 + \frac{1}{18} \left[y^2 (3y'^2 + 5z'^2) + z^2 (5y'^2 + 3z'^2) \right] E_{12} E_{23} + \left(\frac{3}{20} y'^4 + \frac{1}{6} y'^2 z'^2 + \frac{3}{20} z'^4 \right) E_{23}^2 + \frac{2}{3} (y^2 + z^2) E_{12} E_2 + \frac{2}{3} (y'^2 + z'^2) E_{23} E_2 + E_2^2 \right\}. \tag{13}$$

Источник излучения — эллипс в плоскости P, описываемый уравнением $y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$.

$$E'(y', z') = \frac{\tau B}{n^2} \pi ab \left\{ \frac{1}{16}\left(\frac{3}{2}a^4 + a^2b^2 + \frac{3}{2}b^4\right) E_{12}^2 + \frac{1}{4}(a^2 - b^2)(y'^2 - z'^2) E_{13}E_{22} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}(a^2y'^2 + b^2z'^2) E_{22}^2 + \frac{1}{8}\left[y'^2(3a^2 + 5b^2) + z'^2(5a^2 + 3b^2)\right] E_{12}F_{23} +$$

$$\left. + \frac{3}{4}(y'^2 + z'^2) E_{23}^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) E_{12}E_2 + 2(y'^2 + z'^2) E_{23}E_2 + E_2^2 \right\}. \qquad (14)$$

Если источник имеет форму круга ($a = b$), то формула упрощается

$$E'(y', z') = \frac{\tau B}{n^2} \pi a^2 \left\{ \frac{1}{4}(2E_2 + a^2E_{12})^2 + \left[E_{23}(a^2E_{12} + 2E_2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}a^2E_{22}^2\right](y'^2 + z'^2) + \frac{3}{4}(y'^2 + z'^2)^2 E_{23}^2 \right\}. \qquad (15)$$

Если выполнено условие

$$E_{22} = E_{23} = 0, \qquad (16)$$

то $E'(y', z') = \text{const}$.

Световой поток от источника S эллиптической формы через эллиптическое отверстие s', описываемое уравнением $y'^2/A^2 + z'^2/B^2 = 1$.

$$F = \frac{\tau B}{n^2} \pi^2 abAB \left\{ \frac{1}{16}\left(\frac{3}{2}a^4 + a^2b^2 + \frac{3}{2}b^4\right) E_{12}^2 + \frac{1}{16}(a^2 - b^2)(A^2 - B^2) E_{13}E_{22} + \right.$$

$$+ \frac{1}{8}(a^2A^2 + b^2B^2) E_{22}^2 + \frac{1}{32}\left[A^2(3a^2 + 5b^2) + B^2(5a^2 + 3b^2)\right] E_{12}E_{23} +$$

$$+ \frac{3}{16}\left(\frac{1}{2}A^4 + \frac{1}{3}A^2B^2 + \frac{1}{2}B^4\right) E_{23}^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) E_{12}E_2 +$$

$$\left. + \frac{1}{2}(A^2 + B^2) E_{23}E_2 + E_2^2 \right\}. \qquad (17)$$

Если источник S является кругом радиуса a, а отверстие S' — кругом радиуса A, то из (17) следует,

$$F = \frac{\tau B}{n^2} \pi^2 a^2 A^2 \left\{ \frac{1}{4}(2E_2 + a^2E_{12})^2 + \frac{1}{2}\left[(2E_2 + a^2E_{12}) E_{23} + \right.\right. \qquad (18)$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}a^2E_{22}^2\right] A^2 + \frac{1}{4}A^4E_{23}^2 \right\}.$$

Отметим, что коэффициенты эйконала E, входящие в формулы для освещенности и светового потока, могут быть также выражены через коэффициенты аберраций третьего порядка с помощью известных соотношений [12].

Литература

[1] Г. Г. Слюсарев. Оптико-механич. промышл., № 12, 1, 1940.
[2] М. А. Шесминцев. Оптико-механич. промышл., № 4, 1, 1941.
[3] А. И. Тудоровский. ЖТФ, *13*, 596, 1943.
[4] M. Reiss. J. Opt. Soc. Am., *35*, 283, 1945.
[5] M. Reiss. J. Opt. Soc. Am., *38*, 980, 1948.
[6] М. М. Русинов. Техническая оптика. Физматгиз, М.—Л., 1961.
[7] Д. С. Волосов. Фотографическая оптика. «Искусство», М., 1971.
[8] И. В. Пейсахсон, В. П. Тогулев. Оптико-механич. промышл., № 5, 73, 1975.
[9] В. П. Тогулев. Оптико-механич. промышл., № 2, 28, 1976.
[10] Г. Г. Слюсарев. Методы расчета оптических систем. «Машиностроение», Л., 1969.
[11] М. Герцбергер. Современная геометрическая оптика. ИЛ, М., 1962.
[12] А. И. Тудоровский. Теория оптических приборов, т. 1. АН СССР, М.—Л., 1948.

Поступило в Редакцию 22 июня 1977 г.