

ГЕНЕРАТОРЫ ГОЛОМОРФНЫХ ПОЛУГРУПП КАК ФУНКЦИИ ГЕНЕРАТОРОВ C_0 -ПОЛУГРУПП

It is shown that under certain conditions the function of the Shoenberg class T of an arbitrary generator of a C_0 -semigroup in the Banach space X is a generator of a holomorphic semigroup in X .

Для произвольного генератора A равномерно ограниченной C_0 -полугруппы T в банаховом пространстве X Йосидой [1], Балакришнаном [2] и Като [3] (см. также [4, гл. IX]) доказано, что его дробная степень есть генератор голоморфной полугруппы в X . В работе предлагается способ построения генераторов голоморфных полугрупп, использующий T -исчисление генераторов C_0 -полугрупп [5] (менее полная версия T -исчисления для одномерного случая появилась ранее в [6]). Всюду ниже $\text{Gen}(X)$ и $\text{Hol}(X)$ обозначают множества генераторов равномерно ограниченных C_0 -полугрупп и голоморфных полугрупп в X соответственно. Все меры предполагаются регулярными и борелевскими.

Приведем некоторые необходимые определения и факты из [5]. Говорят, что функция $\psi: (-\infty, 0) \rightarrow (-\infty, 0]$ принадлежит классу T_1 , если она обладает абсолютно монотонной производной. Отметим, что (с точностью до аффинных замен переменных) класс T_1 содержит положительные и отрицательные дробные степени, логарифм, арккосинус, а также полилогарифмы всех порядков и представляет собой конус, замкнутый относительно операции композиции. Каждая функция ψ из T_1 имеет интегральное представление

$$\psi(s) = c_0 + c_1 s + \int_0^{\infty} (e^{-su} - 1) d\mu(u) \quad (s < 0), \quad (1)$$

причем $c_0 = \psi(0)$, $c_1 = \psi'(-\infty)$, и положительная мера μ , сосредоточенная на $(0, +\infty)$, определяется по ψ однозначно.

Для любого $t \geq 0$ функция $g_t(s) = e^{st\psi(s)}$ абсолютно монотонна и ограничена на $(-\infty, 0]$, а потому имеет интегральное представление

$$g_t(s) = \int_0^{\infty} e^{sr} dv_t(r),$$

где v_t – ограниченная положительная мера на $\mathbf{R}_+$, также определяемая однозначно.

Если оператор A из $\text{Gen}(X)$ порождает полугруппу T , то для любой функции ψ из T_1 с интегральным представлением (1) положим при $x \in D(A)$

$$\psi(A)x = c_0 x + c_1 Ax + \int_0^{\infty} (T(u) - I)x d\mu(u)$$

(I – единичный оператор в X). Известно [5, теорема 4.1], [6, теорема 1], что $\psi(A)$ расширяется до генератора равномерно ограниченной C_0 -полугруппы

$$g_t(A)x := \int_0^{\infty} T(r)x dv_t(r), \quad (2)$$

который мы также обозначаем $\psi(A)$.

Поскольку дробные степени принадлежат T_1 , естественно поставить вопрос, для каких еще функций ψ из T_1 включение $\psi(A) \in \text{Hol}(X)$ справедливо для любого оператора A из $\text{Gen}(X)$. Далее ответ на этот вопрос выводится из

подходящей оценки некоторого зависящего от параметра повторного интеграла, связанного с ψ . Рассмотрены примеры, показывающие содержательность полученного условия.

Связь Т-исчисления с исчислением Хилле–Филлипса. Наш основной результат будет следствием теоремы, связывающей Т-исчисление [5,6] с исчислением Хилле–Филлипса [7, гл. XV]. Пусть α – ограниченная комплексная мера на $\mathbf{R}_+$ и

$$g(s) = \int_0^{\infty} e^{sr} d\alpha(r) = (L\alpha)(-s) (s \leq 0)$$

(L – преобразование Лапласа). Тогда для любого оператора A из $\text{Gen}(X)$, порождающего полугруппу T , авторы [7] полагают (ср. с (2))

$$g(A)x = \int_0^{\infty} T(r)x d\alpha(r) (x \in X)$$

(наши обозначения несколько отличаются от обозначений в [7]). Далее мы будем рассматривать наиболее важный для приложений случай, когда $d\alpha(r) = f(r)dr$, где f принадлежит пространству $L^1(\mathbf{R}_+)$ функций из $L^1(\mathbf{R})$, сосредоточенных на $\mathbf{R}_+$.

Теорема 1. Пусть функция ψ из T_1 имеет вид (1), причем $c_0 = c_1 = 0$, и $g(s) = (Lf)(-s)$, где $f \in L^1(\mathbf{R}_+)$. Если

$$k(f, \mu) := \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |f(r-u) - f(r)| dr d\mu(u) < \infty,$$

то

- 1) функция $h(s) := \psi(s)g(s)$ представима в виде $(Lb)(-s)$, где b – ограниченная комплексная мера на $\mathbf{R}_+$ полной вариации $\|b\| \leq k(f, \mu)$;
- 2) для любого оператора A из $\text{Gen}(X)$, порождающего полугруппу T с оценкой $\|T(t)\| \leq M$, имеем $h(A) = \psi(A)g(A)$ и $\|h(A)\| \leq Mk(f, \mu)$.

Доказательство. 1). Предположим сначала, что $\psi(s) = e^{-su} - 1$, $u \geq 0$. Тогда, учитывая, что f сосредоточена на $\mathbf{R}_+$,

$$\begin{aligned} (e^{-su} - 1)g(s) &= (e^{-su} - 1) \int_0^{\infty} e^{sr} f(r) dr = \int_0^{\infty} e^{s(r+u)} f(r) dr - \int_0^{\infty} e^{sr} f(r) dr = \\ &= \int_u^{\infty} e^{sr} f(r-u) dr - \int_0^{\infty} e^{sr} f(r) dr = \int_0^{\infty} e^{sr} (f(r-u) - f(r)) dr. \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае $db(r) = db^u(r) := (f(r-u) - f(r))dr$.

Пусть теперь ψ имеет представление (1) с $c_0 = c_1 = 0$. По доказанному выше

$$h(s) = \int_0^{\infty} (e^{-su} - 1)g(s) d\mu(u) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{sr} db^u(r) \right) d\mu(u). \quad (3)$$

Поскольку

$$\|b^u\| = \int_0^{\infty} |f(r-u) - f(r)| dr,$$

вектор-функция $u \mapsto b^u$ μ -интегрируема в смысле Бохнера в силу конечности $k(f, \mu)$. Поэтому

$$b := \int_0^{\infty} b^u d\mu(u)$$

есть ограниченная комплексная мера на $\mathbf{R}_+$ и

$$\|b\| \leq \int_0^\infty \|b^u\| d\mu(u) = k(f, \mu).$$

Формула (3) теперь может быть записана в виде $h(s) = (Lb)(-s)$, что и доказывает первое утверждение теоремы.

2). Так как $h(s) = (Lb)(-s)$, в силу определения меры b имеем при всех A из $\text{Gen}(X)$ и x из X

$$h(A)x = \int_0^\infty T(r)x db(r) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty T(r)x db^u(r) \right) d\mu(u).$$

При этом

$$\begin{aligned} \int_0^\infty T(r)x db^u(r) &= \int_0^\infty T(r)x(f(r-u) - f(r))dr = \\ &= \int_u^\infty T(r)x f(r-u)dr - \int_0^\infty T(r)x f(r)dr = \\ &= \int_0^\infty T(r+u)x f(r)dr - \int_0^\infty T(r)x f(r)dr = \int_0^\infty (T(u) - I)T(r)x f(r)dr = \\ &= (T(u) - I)g(A)x. \end{aligned}$$

Поэтому

$$h(A)x = \int_0^\infty (T(u) - I)g(A)x d\mu(u) = \psi(A)g(A)x.$$

Наконец, так как $\|b\| \leq k(f, \mu)$, то

$$\|h(A)\| \leq \int_0^\infty \|T(r)\| d\|b\|(r) \leq M \|b\| \leq Mk(f, \mu).$$

Замечание 1. Если дополнительно к условиям теоремы 1 предположить, что f неотрицательна и не возрастает на $\mathbf{R}_+$, то

$$k(f, \mu) = 2 \int_0^\infty \int_0^u f(r) dr d\mu(u). \quad (4)$$

Доказательство. В самом деле, как показано в доказательстве теоремы 1

$$\begin{aligned} \|b^u\| &= \int_0^\infty |f(r-u) - f(r)| dr = \int_0^u f(r)dr + \int_u^\infty (f(r-u) - f(r))dr = \\ &= \int_0^u f(r)dr + \int_0^\infty f(r)dr - \int_u^\infty f(r)dr = 2 \int_0^u f(r)dr. \end{aligned}$$

Замечание 2. Пусть в дополнение к условиям теоремы 1 f неотрицательна, непрерывна на $\mathbf{R}_+$, а также возрастает при $0 < r < r_0$ и убывает при $r > r_0$. Если для $u > 0$ мы обозначим через $r(u)$ (единственный) корень уравнения $f(r-u) = f(r)$, то $u < r(u) < r_0 + u$ и

$$k(f, \mu) = 2 \int_0^\infty \int_{r(u)-u}^{r(u)} f(r) dr d\mu(u). \quad (5)$$

Доказательство. Существование, единственность и свойства $r(u)$ сразу следуют из свойств функции f . Далее,

$$|f(r-u)-f(r)| = \begin{cases} f(r), 0 < r \leq u \\ f(r)-f(r-u), u < r \leq r(u) \\ f(r-u)-f(r), r > r(u). \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(r-u)-f(r)| dr &= \int_0^u f(r) dr + \int_u^{r(u)} (f(r)-f(r-u)) dr + \\ &+ \int_{r(u)}^\infty (f(r-u)-f(r)) dr = \int_0^u f(r) dr + \int_u^\infty (f(r-u)-f(r)) dr + \\ &+ \int_{r(u)}^u (f(r-u)-f(r)) dr + \int_u^{r(u)} (f(r)-f(r-u)) dr = \\ &= 2 \int_0^u f(r) dr + 2 \int_u^{r(u)} (f(r)-f(r-u)) dr = 2 \int_0^{r(u)} f(r) dr - 2 \int_u^{r(u)} f(r-u) dr = \\ &= 2 \int_0^{r(u)} f(r) dr - 2 \int_0^{r(u)-u} f(r) dr = 2 \int_{r(u)-u}^{r(u)} f(r) dr, \end{aligned}$$

что и доказывает наше утверждение.

Основной результат. Примеры. Наш основной результат легко выводится из теоремы 1. Напомним, что $g_t(s) = e^{t\psi(s)}$, $t \geq 0$.

Теорема 2. Пусть функция ψ из T_1 имеет представление (1) с $c_0 = c_1 = 0$; $g_t(s) = (L f_t)(-s)$, где $f_t \in L^1(\mathbf{R}_+)$, $t \geq 0$. Если $k(f_t, \mu) \leq C/t$ при $0 < t < 1$ с некоторой константой $C > 0$, то $\psi(A) \in \text{Hol}(X)$ для любого оператора A из $\text{Gen}(X)$.

Доказательство. Как отмечено выше, $\psi(A)$ есть генератор C_0 -полугруппы $\mathcal{L}(A)$. Поскольку $(d/dt)g_t(A)x = \psi(A)g_t(A)x$, то теорема 1 дает оценку $\|(d/dt)g_t(A)\| \leq M k(f_t, \mu) \leq CM/t$, $0 < t < 1$, что и обеспечивает голоморфность полугруппы $\mathcal{L}(A)$ в силу [4, с. 351].

Пример 1 [6, пример 2]. Функция $\psi(s) = -\log(1-s)$, $s < 0$, принадлежит T_1 , причем $d\mu(u) = u^{-1}e^{-u}du$; $f_t(r) = \Gamma(t)^{-1}r^{t-1}e^{-r}$ ($r > 0$). Очевидно, что при $0 < t < 1$ функция f_t принадлежит $L^1(\mathbf{R}_+)$ и убывает на $\mathbf{R}_+$. Для оценки $k(f_t, \mu)$ воспользуемся замечанием 1. Имеем при $0 < t < 1$

$$\begin{aligned} k(f_t, \mu) &= 2 \int_0^\infty \left(\int_0^u \Gamma(t)^{-1} r^{t-1} e^{-r} dr \right) u^{-1} e^{-u} du \leq \\ &< 2\Gamma(t)^{-1} \int_0^\infty \left(\int_0^u r^{t-1} dr \right) u^{-1} e^{-u} du = 2/t. \end{aligned}$$

Таким образом, $-\log(I-A) \in \text{Hol}(X) \forall A \in \text{Gen}(X)$.

Пример 2 [6, пример 1]. Пусть $\psi(s) = -(-s)^{1/2}$. Тогда $\psi \in T_1$, причем $d\mu(u) = 2^{-1}\pi^{-1/2}u^{-3/2}du$. Известно [4, с. 358, 369], что $g_t(s) = (L f_t)(-s)$, где $f_t(r) = 2^{-1}\pi^{-1/2}t r^{-3/2}e^{-t^2/4r}$. Легко проверить, что функция f_t удовлетворяет условиям замечания 2 с $r_0 = t^2/6$, $f_t(r_0) = C/t^2$ (здесь и ниже все $C_i = \text{const}$). В силу (5)

$$k(f_t, \mu) = 2 \int_0^{r_0} \left(\int_{r(u)-u}^{r(u)} f_t(r) dr \right) d\mu(u) + 2 \int_{r_0}^\infty \left(\int_{r(u)-u}^{r(u)} f_t(r) dr \right) d\mu(u). \quad (6)$$

Поскольку $\int_{r(u)-u}^{r(u)} f_t(r) dr < f_t(r_0)u = C_1 u / t^2$, первое слагаемое в (6) меньше, чем $2^{-1} \pi^{-1/2} C_1 t^{-3} \int_0^{t^2/6} u^{-1/2} du = C_2/t$. Далее,

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{\infty} \left(\int_{r(u)-u}^{r(u)} f_t(r) dr \right) d\mu(u) &\leq \int_{r_0}^{\infty} \left(\int_0^u + \int_u^{r(u)} f_t(r) dr \right) d\mu(u) \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} \int_0^u f_t(r) dr d\mu(u) + \int_{r_0}^{\infty} \int_u^{r(u)} f_t(r) dr d\mu(u), \end{aligned}$$

причем по теореме Фубини

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^u f_t(r) dr d\mu(u) &= \int_0^{\infty} \int_r^{\infty} d\mu(u) f_t(r) dr = \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-t^2/4}^{\infty} e^{-t^2/4r} e^{-3/2} dr \right) e^{-t^2/4r} r^{-3/2} dr - \frac{t}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-t^2/4r} r^{-2} dr = C_3/t. \end{aligned}$$

Наконец, поскольку $f_t(r)$ убывает при $r > r_0$, то при $u > r_0$

$$\int_u^{r(u)} f_t(r) dr \leq f_t(u)(r(u) - u) < r_0 f_t(u).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{\infty} \int_u^{r(u)} f_t(r) dr d\mu(u) &\leq r_0 \int_{r_0}^{\infty} f_t(u) d\mu(u) = \frac{t^3}{24\pi} \int_{t^2/6}^{\infty} \frac{e^{-t^2/4u}}{u \cdot u^2} du \leq \\ &\leq \frac{t^3}{24\pi} \cdot \frac{6}{t^2} \int_{t^2/6}^{\infty} \frac{e^{-t^2/4u}}{u^2} du = C_4/t. \end{aligned}$$

Следовательно, все условия теоремы 2 выполнены, и $-(-A)^{1/2} \text{Hol}(X) \forall A \in \text{Gen}(X)$.

1. Yosida K. // Proc. Japan Acad. 1960. Vol. 36. P. 81.
2. Balakrishnan V. // Pacific J. Math. 1960. Vol. 10. P. 419.
3. Kato T. // Proc. Japan Acad. 1960. Vol. 36. P. 94.
4. Иосида К. Функциональный анализ. М. 1967.
5. Миротин А. Р. // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. N 2. С. 142.
6. Он же. // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39. N 3. С. 571.
7. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

Поступила в редакцию 11.09.99.

УДК 519.1

О.И.МЕЛЬНИКОВ, А.Н.ШИЛАК

ПОСТРОЕНИЕ ТРАНЗИТИВНОЙ РЕДУКЦИИ АЦИКЛИЧЕСКОГО ОРГРАФА

In the paper an algorithm of complexity $O(|VH|^2)$ for constructing the transitive reduction of an acyclic digraph is presented.

Пусть задан ориентированный граф $G=(V, E)$, где V – множество вершин, E – множество дуг. Пусть $|V|=n$, $|E|=m$.

Транзитивным замыканием орграфа G называется орграф $\tilde{G}=(V, \tilde{E})$, у которого дуга $(u, v) \in \tilde{E}$ тогда и только тогда, когда в орграфе G существует путь из вершины u в вершину v .