МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ВИДЕ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ ОТ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Е.С. Лысюк

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL SYSTEMS OF A THIRD-ORDER IN THE FORM OF EXPONENTIAL SERIES OUT OF LINEAR FRACTIONAL FUNCTIONS

A.S. Lysiuk

Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus

Рассматриваются пять автономных систем трёх дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью. Изучены вопросы о сходимости рядов, представляющих решения данных систем; об инвариантности четырёх из рассматриваемых систем при определенного вида преобразованиях; о наличии трёхпараметрических решений с подвижной особой линией.

Ключевые слова: *существенно особая точка, подвижная особая линия, область однозначности решения, ряд Дирихле, абсцисса абсолютной сходимости.*

Five autonomous systems of three differential equations with quadratic right-hand side are considered. The issues of the series of convergence which represent the solution of this systems, under a certain mode of transformations, the invariance in four of the given systems and existence of three-parameter solutions with movable singular line were studied.

Keywords: *essential singularity, movable singular line, area of the uniqueness of solution, Dirichlet series, abscissa of absolute convergence.*

Введение

Рассмотрим автономную систему третьего порядка

$$\begin{cases} x' = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz, \\ y' = a_{21}xy + a_{22}y^2 + a_{23}yz, \\ z' = a_{31}xz + a_{32}yz + a_{33}z^2 + cxy, \end{cases} \tag{0.1}$$

где x, y, z – комплекснозначные функции, $c \neq 0$. В [1] найдены условия, при которых система (0.1) имеет подвижную особую линию в случае

$$a_{13} = a_{23},\ a_{12} = a_{32},\ a_{21} = a_{31}. \tag{0.2}$$

В случаях, отличных от (0.2), в [2] получено двадцать семь систем третьего порядка вида (0.1), решения которых содержат подвижную особую линию с существенно особыми точками, ограничивающую область однозначности решения.

В настоящей работе для некоторых систем, полученных в [2]:

$$\begin{cases} x' = 2xy, \\ y' = -2y^2 + 3yz, \\ z' = 12xz - 3z^2 - 12xy; \end{cases} \tag{0.3}$$

$$\begin{cases} x' = x^2 - xy, \\ y' = 3xy + y^2 + yz, \\ z' = 2xz + \dfrac{8}{1 - 4/m^2}xy; \end{cases} \tag{0.4}$$

где $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$ или $m = \infty$;

$$\begin{cases} x' = x^2 - xy, \\ y' = 3xy + y^2 - \nu\, yz, \\ z' = 2xz + z^2 - \dfrac{8(\nu+2)}{\nu^2}xy; \end{cases} \tag{0.5}$$

$$\begin{cases} x' = x^2 - xy, \\ y' = (3+\nu)xy + y^2 - \nu\, yz, \\ z' = z^2 - \dfrac{(\nu+4)^2}{\nu^2}xy; \end{cases} \tag{0.6}$$

$$\begin{cases} x' = x^2 - xy, \\ y' = -(\nu+1)xy + y^2 + (\nu+4)yz, \\ z' = z^2 - \dfrac{\nu^2}{(\nu+4)^2}xy; \end{cases} \tag{0.7}$$

где $\nu \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, построим решения в виде рядов Дирихле и рядов по экспонентам от дробно-линейных функций.

1 Предварительные результаты

Исключая y, z в системе (0.3), получим, что компонента x определяется уравнением

$$x''' = 12xx'' - 18x'^2, \tag{1.1}$$

при этом

$$y = \frac{x'}{2x},\ z = \frac{x''}{3x'}. \tag{1.2}$$

Как известно [3], уравнение Шази (1.1) имеет подвижную особую линию.

Как и в [4], [5], представим решение уравнения (1.1) в виде ряда Дирихле

$$x = -\frac{1}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k a^k e^{-kt}. \tag{1.3}$$

Подставляя ряд (1.3) в (1.1), получим a - произвольное, $\zeta_1 = 1$, остальные коэффициенты ζ_k, $k = 2,3,4,...,$ определяются по рекуррентной формуле

$$\zeta_k = \frac{6}{k^2(k-1)} \sum_{p=1}^{k-1} (3kp - 5p^2)\zeta_p \zeta_{k-p}, \quad k = 2,3,4,... \tag{1.4}$$

Покажем, что существует $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \ln \sqrt[k]{|\zeta_k a^k|}$.

Из (1.4) имеем $\zeta_2 = 3/2$. За счёт выбора a можем сделать $|\zeta_1 a| \le |a|$, $|\zeta_2 a^2| \le |a|$, если $0 < |a| \le 2/3$. Предположим, что для всех $m < k$ верно $|\zeta_m a^m| \le |a|$. Покажем, что $|\zeta_k a^k| \le |a|$.

$$|\zeta_k a^k| = \left| \frac{6a^k}{k^2(k-1)} \sum_{p=1}^{k-1} (3kp - 5p^2)\zeta_p \zeta_{k-p} \right| \le$$

$$\le \frac{6}{k^2(k-1)} \sum_{p=1}^{k-1} |3kp - 5p^2| \left|\zeta_p a^p\right| \left|\zeta_{k-p} a^{p-k}\right| \le$$

$$\le \frac{6a^2}{k^2(k-1)} \sum_{p=1}^{k-1} (3kp + 5p^2) = \frac{19k^2 - 5k}{k^2} a^2 \le |a|,$$

если $0 < |a| \le 1/19$.

На основании метода математической индукции заключаем, что $|\zeta_k a^k| \le |a|$, $k = 1,2,3,...,$ если a подчинено условию $0 < |a| \le 1/19$.

Используя полученную оценку, можем записать $\ln \sqrt[k]{|\zeta_k a^k|} \le \frac{1}{k} \ln |a|$, $k = 1,2,3,...,$ откуда следует, что справедлива

***Лемма* 1.1.** *Существует*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \ln \sqrt[k]{|\zeta_k a^k|} = \sigma, \tag{1.5}$$

где a, ζ_k, $k = 1,2,3,...$ *– коэффициенты ряда* (1.3).

Число σ является абсциссой абсолютной сходимости ряда (1.3) [6, с. 115], поэтому в полуплоскости $\operatorname{Re} t > \sigma$ ряд (1.3) сходится абсолютно, а в полуплоскости $\operatorname{Re} t < \sigma$ он расходится.

Дифференциальное уравнение (1.1) инвариантно относительно преобразования переменных

$$x(t) = f'(t)u(\tau) + \varphi(t),\ \tau = f(t),$$

где f – дробно-линейная функция от t, причём $f'' = 2f'\varphi$, $\varphi' = \varphi^2$ [7, с. 299].

Тогда, как и в [8], можно записать трёхпараметрическое решение уравнения (1.1), полагая

$$\tau = \frac{h}{t - t_0} - \ln A,$$

$$x = -\frac{1}{t-t_0} + \frac{h}{12(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}, \tag{1.6}$$

где $\theta = aA$, h, t_0 – произвольные постоянные, $\zeta_1 = 1$, остальные коэффициенты ζ_k, $k = 2,3,4,...,$ определяются по рекуррентной формуле (1.4).

Ряд (1.6) будет абсолютно сходящимся при условии $\operatorname{Re} \frac{h}{t - t_0} > \mu$, где $\mu = \sigma + \ln |A|$, σ взято из (1.5).

В [8] установлено, что ряд (1.6) имеет место в области, ограниченной подвижной особой линией с уравнением

$$\begin{gathered} 2\mu t\bar{t} - (2\mu t_0 + h)\bar{t} - (2\mu \bar{t}_0 + \bar{h})t + \\ +2\mu t_0 \bar{t}_0 + h\bar{t}_0 + \bar{h}t_0 = 0, \end{gathered} \tag{1.7}$$

определяющим окружность, радиус которой равен $\rho = |h|/(2|\mu|)$, а центр находится в точке $t_1 = t_0 + h/(2\mu)$, $\mu \ne 0$ (если $\mu = 0$, то окружность вырождается в прямую), и координаты любой точки, лежащей на подвижной особой линии, являются существенно особыми для членов ряда (1.6).

С учётом (1.2), (1.6), запишем трёхпараметрическое решение системы (0.3):

$$x = -\frac{1}{t-t_0} + \frac{h}{12(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}},$$

$$\begin{aligned} y = \Bigg(& -h(t-t_0) + 6(t-t_0)^2 + \\ & +12h(t-t_0)\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} - \\ & -6h^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \Bigg) \Bigg/ \Bigg(h(t-t_0)^2 - \\ & -12(t-t_0)^3 - 2h(t-t_0)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \Bigg), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = \Bigg(& h(t-t_0)^2 - 4h(t-t_0)^3 - 12h(t-t_0)^2 \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} + 12h^2(t-t_0)\sum_{k=1}^{\infty} k\zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} - \\ & -2h^3 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \Bigg) \Bigg/ \Bigg(-h(t-t_0)^3 + \\ & +6(t-t_0)^4 + 12h(t-t_0)^3 \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} - 6h^2(t-t_0)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \Bigg). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Рассмотрим системы (0.4)–(0.7). В [2] установлено, что одна из компонент в каждой из систем (0.4)–(0.7) определяется уравнением, решение которого содержит подвижную особую линию с существенно особыми точками, ограничивающую область однозначности решения.

Будем искать решения систем (0.4)–(0.7) в виде рядов Дирихле

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k a^k e^{-kt}, \\ y &= \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k b^k e^{-kt}, \\ z &= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k g^k e^{-kt}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

***Замечание* 1.1.** Систему (0.4) рассмотрим в случае $m = \infty$. При $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$ рассуждения аналогичны.

Подставляя ряды (1.9) в систему (0.4), получим a – произвольное, $\alpha_0 = \beta_0 = -1/4$, $\gamma_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -3$, $\gamma_1 = -12$, $b = g = a$, остальные коэффициенты α_k, β_k, g_k, $k = 2,3,4,...$, находятся по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} \alpha_k = \frac{1}{8k^2(k-1)}\Bigg(& (8k^2 - 6k - 3)\sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p}(\beta_p - \alpha_p) + \\ & +(2k-1)\sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p}(3\alpha_p + \beta_p + \gamma_p) + \\ & +\sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p}(4\beta_p + \gamma_p)\Bigg), \\ \beta_k = \frac{1}{8k^2(k-1)}\Bigg(& (-8k^2 + 6k - 1)\times \\ & \times\sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p}(3\alpha_p + \beta_p + \gamma_p) + \\ & +(6k-3)\sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p}(\beta_p - \alpha_p) - \\ & -(4k-1)\sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p}(4\beta_p + \gamma_p)\Bigg), \\ \gamma_k = \frac{1}{2k^2(k-1)}\Bigg(& (-4k^2 + 2k - 1)\sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p}(4\beta_p + \gamma_p) - \\ & -(4k-1)\sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p}(3\alpha_p + \beta_p + \gamma_p) + \\ & +3\sum_{k=1}^{p-1} \alpha_{k-p}(\beta_p - \alpha_p)\Bigg), \quad k = 2,3,4,.... \end{aligned} \tag{1.10}$$

Для системы (0.5) имеем следующие значения коэффициентов рядов (1.9): a – произвольное, $\alpha_0 = \beta_0 = -\nu/(4(\nu+2))$, $\gamma_0 = -1/(\nu+2)$, $b = g = a$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -(3\nu+8)/\nu$, $\gamma_1 = 4(3\nu^2 + 12\nu + 16)/\nu^3$, остальные коэффициенты α_k, β_k, g_k, $k = 2,3,4,\ldots$, находятся по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} \alpha_k = \frac{1}{16(\nu+2)^2 k^2 (k-1)}\Bigg(& (16(\nu+2)^2 k^2 - \\ & -4(3\nu+8)(\nu+2)k - 2\nu(3\nu+4))\sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p}(\beta_p - \alpha_p) + \\ & +\nu(4(\nu+2)k - 2\nu - 8)\sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p}(3\alpha_p + \beta_p - \nu\gamma_p) - \\ & -\nu^3\sum_{p=1}^{k-1}\left(\alpha_{k-p}\left(2\gamma_p - \frac{8(\nu+2)}{\nu^2}\beta_p\right) + \gamma_p\gamma_{k-p}\right)\Bigg), \\ \beta_k = \frac{1}{16(\nu+2)^2 k^2 (k-1)}\Bigg(& (16(\nu+2)^2 k^2 - \\ & -4(3\nu+8)(\nu+2)k + 2\nu(\nu+4))\times \\ & \times\sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p}(\nu\gamma_p - 3\alpha_p - \beta_p) + \nu(12(\nu+2)k - \\ & -2(3\nu+4))\sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p}(\beta_p - \alpha_p) + \\ & +\nu^2(4(\nu+2)k - \nu)\times \\ & \times\sum_{p=1}^{k-1}\left(\alpha_{k-p}\left(2\gamma_p - \frac{8(\nu+2)}{\nu^2}\beta_p\right) + \gamma_p\gamma_{k-p}\right)\Bigg), \\ \gamma_k = \frac{1}{4\nu(\nu+2)^2 k^2 (k-1)}\Bigg(& (4\nu(\nu+2)^2 k^2 - \\ & -2\nu^2(\nu+2)k + \nu^3)\sum_{p=1}^{k-1}\left(\alpha_{k-p}\left(\frac{8(\nu+2)}{\nu^2}\beta_p - \right.\right. \\ & \left.\left. -2\gamma_p\right) - \gamma_p\gamma_{k-p}\right) + (16(\nu+2)k + 2\nu(3\nu+4))\times \\ & \times\sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p}(\alpha_p - \beta_p) + + (8(\nu+2)^2 k - \\ & -2\nu(\nu+4))\sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p}(3\alpha_p + \beta_p - \nu\gamma_p)\Bigg), k = 2,3,4,.... \end{aligned} \tag{1.11}$$

Подставляя ряды (1.9) в систему (0.6), получим a – произвольное, $\alpha_0 = \beta_0 = -\nu/(4(\nu+2))$, $\gamma_0 = -(\nu+4)/(4(\nu+2))$, $b = g = a$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -(3\nu+8)/\nu$, $\gamma_1 = (\nu+4)^3/\nu^3$, остальные коэффициенты α_k, β_k, g_k, $k = 2,3,4,...$, находятся по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} \alpha_k = \frac{1}{16(\nu+2)^2 k^2 (k-1)}\Bigg(& (\nu+2)(16(\nu+2)k^2 - \\ & -4(3\nu+8)k - \nu(\nu+4))\sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p}(\beta_p - \alpha_p) + \\ & +\nu(4(\nu+2)k - 2\nu - 8)\sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p}((\nu+3)\alpha_p + \beta_p - \nu\gamma_p) + \\ & +\nu^3\sum_{p=1}^{k-1}\left(\frac{(\nu+4)^2}{\nu^2}\alpha_p\beta_{k-p} - \gamma_p\gamma_{k-p}\right)\Bigg), \\ \beta_k = \frac{1}{16(\nu+2)^2 k^2 (k-1)}\Bigg(& (16(\nu+2)^2 k^2 - \\ & -4(3\nu+8)(\nu+2)k + 2\nu(\nu+4))\times \end{aligned}$$

$$\times\sum_{p=1}^{k-1}\beta_{k-p}(\nu\gamma_p-(\nu+3)\alpha_p-\beta_p)+ \qquad (1.12)$$
$$+\nu(\nu+2)(4(\nu+3)k-\nu-4)\times$$
$$\times\sum_{p=1}^{k-1}\alpha_{k-p}(\beta_p-\alpha_p)+\nu^2(4(\nu+2)k-\nu)\times$$
$$\times\sum_{p=1}^{k-1}\left(\gamma_p\gamma_{k-p}-\frac{(\nu+4)^2}{\nu^2}\alpha_p\beta_{k-p}\right)\Bigg),$$
$$\gamma_k=\frac{1}{16\nu(\nu+2)^2k^2(k-1)}\Bigg(\nu(16(\nu+2)^2k^2-$$
$$-8\nu(\nu+2)k+\nu^2(\nu+4))\times$$
$$\times\sum_{p=1}^{k-1}\left(\frac{(\nu+4)^2}{\nu^2}\alpha_p\beta_{k-p}-\gamma_p\gamma_{k-p}\right)+$$
$$+(\nu+2)(\nu+4)^2(4k+\nu)\sum_{p=1}^{k-1}\alpha_{k-p}(\alpha_p-\beta_p)+$$
$$+2(\nu+4)^2(2(\nu+2)k-\nu)\times$$
$$\times\sum_{p=1}^{k-1}\beta_{k-p}((\nu+3)\alpha_p+\beta_p-\nu\gamma_p)\Bigg),\ k=2,3,4,....$$

Для системы (0.7) имеем следующие значения коэффициентов рядов (1.9): a – произвольное, $\alpha_0=\beta_0=-(\nu+4)/(4(\nu+2))$, $\gamma_0=-\nu/(4(\nu+2))$, $b=g=a$, $\alpha_1=1$, $\beta_1=-(3\nu+4)/(\nu+4)$, $\gamma_1==\nu^3/(\nu+4)^3$, остальные коэффициенты α_k, β_k, g_k, $k=2,3,4,...$, находятся по рекуррентным формулам

$$\alpha_k=\frac{1}{16(\nu+2)^2k^2(k-1)}\Bigg((\nu+2)(16(\nu+2)k^2-$$
$$-4(3\nu+4)k+\nu(\nu+4))\sum_{p=1}^{k-1}\alpha_{k-p}(\beta_p-\alpha_p)+$$
$$+(\nu+4)(4(\nu+2)k-2\nu)\times$$
$$\times\sum_{p=1}^{k-1}\beta_{k-p}(-(\nu+1)\alpha_p+\beta_p+(\nu+4)\gamma_p)+$$
$$+(\nu+4)^3\sum_{p=1}^{k-1}\left(-\frac{\nu^2}{(\nu+4)^2}\alpha_p\beta_{k-p}+\gamma_p\gamma_{k-p}\right)\Bigg),$$
$$\beta_k=\frac{1}{16(\nu+2)^2k^2(k-1)}\Bigg((\nu+4)(\nu+2)\times$$
$$\times(4(\nu+1)k-\nu)\sum_{p=1}^{k-1}\alpha_{k-p}(\alpha_p-\beta_p)+$$
$$+(16(\nu+2)^2k^2-4(\nu+2)(3\nu+4)k+ \qquad (1.13)$$
$$+2\nu(\nu+4))\sum_{p=1}^{k-1}\beta_{k-p}((\nu+1)\alpha_p-\beta_p-$$
$$-(\nu+4)\gamma_p)-(\nu+4)^2(4(\nu+2)k-\nu-4)\times$$
$$\times\sum_{p=1}^{k-1}\left(-\frac{\nu^2}{(\nu+4)^2}\alpha_p\beta_{k-p}+\gamma_p\gamma_{k-p}\right)\Bigg),$$
$$\gamma_k=\frac{1}{16(\nu+2)^2(\nu+4)k^2(k-1)}\times$$
$$\times\Bigg(\nu^2(\nu+2)(4k-\nu-4)\sum_{p=1}^{k-1}\alpha_{k-p}(\alpha_p-\beta_p)+$$
$$+\nu^2(4(\nu+2)k-2\nu-8)\sum_{p=1}^{k-1}\beta_{k-p}(-(\nu+1)\alpha_p+$$
$$+\beta_p+(\nu+4)\gamma_p)-(16(\nu+4)(\nu+2)^2k^2-$$
$$-8(\nu+2)(\nu+4)^2k-\nu(\nu+4)^3)\times$$
$$\times\sum_{p=1}^{k-1}\left(-\frac{\nu^2}{(\nu+4)^2}\alpha_p\beta_{k-p}+\gamma_p\gamma_{k-p}\right)\Bigg),\ k=2,3,4,.....$$

Покажем, что для каждого из наборов коэффициентов (1.10)–(1.13) существуют
$$\varlimsup_{k\to\infty}\ln\sqrt[k]{|\alpha_k a^k|},\ \varlimsup_{k\to\infty}\ln\sqrt[k]{|\beta_k b^k|},\ \varlimsup_{k\to\infty}\ln\sqrt[k]{|\gamma_k g^k|}.$$

Из (1.10) имеем $\alpha_2=1/2$, $\beta_2=-39/2$, $\gamma_2=6$. За счёт выбора a можем сделать $\left|\alpha_k a^k\right|\le\xi$, $\left|\beta_k b^k\right|\le\xi$, $\left|\gamma_k g^k\right|\le\xi$, $k=1,2$. Предположим, что для всех $m<k$ верно $\left|\alpha_m a^m\right|\le\xi$, $\left|\beta_m b^m\right|\le\xi$, $\left|\gamma_m g^m\right|\le\xi$. Покажем, что $\left|\alpha_k a^k\right|\le\xi$, $\left|\beta_k b^k\right|\le\xi$, $\left|\gamma_k g^k\right|\le\xi$.

$$\left|\alpha_k a^k\right|=\Bigg|a^k\frac{1}{8k^2(k-1)}\times$$
$$\times\Bigg((8k^2-6k-3)\sum_{p=1}^{k-1}\alpha_{k-p}(\beta_p-\alpha_p)+$$
$$+(2k-1)\sum_{p=1}^{k-1}\beta_{k-p}(3\alpha_p+\beta_p+\gamma_p)+$$
$$+\sum_{p=1}^{k-1}\alpha_{k-p}(4\beta_p+\gamma_p)\Bigg)\Bigg|\le$$
$$\le\frac{1}{8k^2(k-1)}\Bigg((8k^2-6k-3)\sum_{p=1}^{k-1}\left|\alpha_{k-p}(\beta_p-\alpha_p)a^k\right|+$$
$$+(2k-1)\sum_{p=1}^{k-1}\left|\beta_{k-p}(3\alpha_p+\beta_p+\gamma_p)a^k\right|+$$
$$+\sum_{p=1}^{k-1}\left|\alpha_{k-p}(4\beta_p+\gamma_p)a^k\right|\Bigg)\le\frac{\xi^2}{8k^2(k-1)}\times$$
$$\times\Big(2(8k^2-6k-3)(k-1)+5(2k-1)(k-1)+5(k-1)\Big)=$$
$$=\frac{(16k^2-2k-6)\xi^2}{8k^2}\le\xi,\ \text{если}\ 0<\xi\le1/2.$$
$$\left|\beta_k b^k\right|=\Bigg|b^k\frac{1}{8k^2(k-1)}\Bigg((-8k^2+6k-1)\times$$
$$\times\sum_{p=1}^{k-1}\beta_{k-p}(3\alpha_p+\beta_p+\gamma_p)+$$
$$+(6k-3)\sum_{p=1}^{k-1}\alpha_{k-p}(\beta_p-\alpha_p)-$$
$$-(4k-1)\sum_{p=1}^{k-1}\alpha_{k-p}(4\beta_p+\gamma_p)\Bigg)\Bigg|\le$$

$$\le \frac{1}{8k^2(k-1)}\Bigg((8k^2+6k-1)\times$$

$$\times\sum_{p=1}^{k-1}\left|\beta_{k-p}(3\alpha_p+\beta_p+\gamma_p)b^k\right|+$$

$$+(6k-3)\sum_{p=1}^{k-1}\left|\alpha_{k-p}(\beta_p-\alpha_p)b^k\right|+$$

$$+(4k-1)\sum_{p=1}^{k-1}\left|\alpha_{k-p}(4\beta_p+\gamma_p)b^k\right|\Bigg)\le$$

$$\le\frac{\xi^2}{8k^2(k-1)}\Big(5(8k^2+6k-1)(k-1)+$$

$$+2(6k-3)(k-1)+5(4k-1)(k-1)\Big)=$$

$$=\frac{\xi^2(40k^2+62k-16)}{8k^2}\le\xi,\ \text{если}\ 0<\xi\le 1/5.$$

$$\left|\gamma_k g^k\right|=\Bigg|g^k\frac{1}{2k^2(k-1)}\Bigg((-4k^2+2k-1)\times$$

$$\times\sum_{p=1}^{k-1}\alpha_{k-p}(4\beta_p+\gamma_p)-(4k-1)\sum_{p=1}^{k-1}\beta_{k-p}(3\alpha_p+\beta_p+\gamma_p)+$$

$$+3\sum_{k=1}^{p-1}\alpha_{k-p}(\beta_p-\alpha_p)\Bigg)\Bigg|\le\frac{1}{2k^2(k-1)}\times$$

$$\times\Bigg((4k^2+2k-1)\sum_{p=1}^{k-1}\left|\alpha_{k-p}(4\beta_p+\gamma_p)g^k\right|+$$

$$+(4k-1)\sum_{p=1}^{k-1}\left|\beta_{k-p}(3\alpha_p+\beta_p+\gamma_p)g^k\right|+$$

$$+3\sum_{k=1}^{p-1}\left|\alpha_{k-p}(\beta_p-\alpha_p)g^k\right|\Bigg)\le\frac{\xi^2}{2k^2(k-1)}\times$$

$$\times\Big(5(4k^2+2k-1)(k-1)+5(4k-1)(k-1)+6(k-1)\Big)=$$

$$=\frac{\xi^2(20k^2+30k-4)}{2k^2}\le\xi,\ \text{если}\ 0<\xi\le 1/10.$$

На основании метода математической индукции получаем, что $\left|\alpha_k a^k\right|\le\xi$, $\left|\beta_k b^k\right|\le\xi$, $\left|\gamma_k g^k\right|\le\xi$, $k=1,2,3,...$, если ξ удовлетворяет условию $0<\xi\le 1/10$. Используя полученные оценки, можем записать

$$\ln|\alpha_k a^k|^{\frac{1}{k}}\le\frac{1}{k}\ln\xi,\quad \ln|\beta_k b^k|^{\frac{1}{k}}\le\frac{1}{k}\ln\xi,$$

$$\ln|\gamma_k g^k|^{\frac{1}{k}}\le\frac{1}{k}\ln\xi,\quad k=1,2,3,.... \tag{1.14}$$

Аналогично можно показать, что имеют место оценки вида (1.14) для коэффициентов рядов (1.9), определяющих формальные решения систем (0.5), (0.6), (0.7).

Значит, верна

Лемма 1.2. *Для каждого из наборов коэффициентов* (1.10)–(1.13) *существуют*

$$\varlimsup_{k\to\infty}\ln\sqrt[k]{|\alpha_k a^k|}=\sigma_1,\quad \varlimsup_{k\to\infty}\ln\sqrt[k]{|\beta_k b^k|}=\sigma_2,$$

$$\varlimsup_{k\to\infty}\ln\sqrt[k]{|\gamma_k g^k|}=\sigma_3.$$

Числа $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ являются абсциссами абсолютной сходимости рядов (1.9) соответственно. Пусть

$$\sigma=\max_{\nu=1,2,3}\{\sigma_\nu\}. \tag{1.15}$$

Ряды (1.9) являются абсолютно сходящимися в области $\operatorname{Re}t>\sigma$.

Лемма 1.3. *Системы* (0.4), (0.5) *инвариантны относительно преобразования переменных*

$$x(t)=f'(t)u(\tau)+\varphi(t),\ \tau=f(t),$$

$$x(t)y(t)=f'^2(t)u(\tau)\mathrm{v}(\tau),\ \tau=f(t),$$

$$z(t)=f'(t)w(\tau),\ \tau=f(t),$$

где f – дробно-линейная функция от t, причём $f''=2f'\varphi,\ \ \varphi'=\varphi^2$.

Лемма 1.4. *Системы* (0.6), (0.7) *инвариантны при преобразовании переменных*

$$x(t)=f'(t)u(\tau)+\varphi(t),\ \tau=f(t),$$

$$x(t)y(t)=f'^2(t)u(\tau)\mathrm{v}(\tau),\ \tau=f(t),$$

$$z(t)=f'(t)w(\tau)+\varphi(t),\ \tau=f(t),$$

где f – дробно-линейная функция от t, причём $f''=2f'\varphi,\ \ \varphi'=\varphi^2$.

Справедливость лемм 1.3, 1.4 легко проверить непосредственно.

Используя лемму 1.3, полагая $\tau=\dfrac{h}{t-t_0}-\ln A$, запишем трёхпараметрическое решение системы (0.4)

$$x=-\frac{1}{t-t_0}+\frac{h}{4(t-t_0)^2}-\frac{h}{(t-t_0)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}, \tag{1.16}$$

$$y=h^2\Bigg(1-4\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k+\beta_k)\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}+$$

$$+16\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{p=1}^{k-1}\alpha_p\beta_{k-p}\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}\Bigg)\Bigg/\Bigg(4h(t-t_0)^2-$$

$$-16(t-t_0)^3-16h(t-t_0)^2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}\Bigg),$$

$$z=-\frac{h}{(t-t_0)^2}-\frac{h}{(t-t_0)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}},$$

и трёхпараметрическое решение системы (0.5)

$$x=-\frac{1}{t-t_0}+\frac{\nu h}{4(\nu+2)(t-t_0)^2}-\frac{h}{(t-t_0)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}, \tag{1.17}$$

$$y=h^2\Bigg(\frac{\nu^2}{(\nu+2)^2}-\frac{4\nu}{\nu+2}\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k+\beta_k)\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}+$$

$$+16\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{p=1}^{k-1}\alpha_p\beta_{k-p}\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}\Bigg)\Big/\Bigg(\frac{4\nu h}{\nu+2}(t-t_0)^2-$$

$$-16(t-t_0)^3-16h(t-t_0)^2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}\Bigg),$$

$$z=\frac{h}{(\nu+2)(t-t_0)^2}-\frac{h}{(t-t_0)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}.$$

Здесь $\theta=aA,\ h,\ t_0$ – произвольные постоянные. Для рядов (1.16) $\alpha_1=1,\ \beta_1=-3,\ \gamma_1=-12,$ остальные коэффициенты $\alpha_k,\ \beta_k,\ g_k,\ k=2,3,4,\ldots,$ находятся по рекуррентным формулам (1.10). Для рядов (1.17) $\alpha_1=1,\ \beta_1=-(3\nu+8)/\nu,$ $\gamma_1=4(3\nu^2+12\nu+16)/\nu^3$, остальные коэффициенты $\alpha_k,\ \beta_k,\ g_k,\ k=2,3,4,...,$ находятся по рекуррентным формулам (1.11).

Используя лемму 1.4, полагая $\tau=\dfrac{h}{t-t_0}-\ln A,$ запишем трёхпараметрическое решение системы (0.6)

$$x=-\frac{1}{t-t_0}+\frac{\nu h}{4(\nu+2)(t-t_0)^2}-\frac{h}{(t-t_0)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}},\tag{1.18}$$

$$y=h^2\Bigg(\frac{\nu^2}{(\nu+2)^2}-\frac{4\nu}{\nu+2}\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k+\beta_k)\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}+$$

$$+16\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{p=1}^{k-1}\alpha_p\beta_{k-p}\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}\Bigg)\Big/\Bigg(\frac{4\nu h}{\nu+2}(t-t_0)^2-$$

$$-16(t-t_0)^3-16h(t-t_0)^2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}\Bigg),$$

$$z=-\frac{1}{t-t_0}+\frac{(\nu+4)h}{4(\nu+2)(t-t_0)^2}-\frac{h}{(t-t_0)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}},$$

и трёхпараметрическое решение системы (0.7)

$$x=-\frac{1}{t-t_0}+\frac{(\nu+4)h}{4(\nu+2)(t-t_0)^2}-\frac{h}{(t-t_0)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}},\tag{1.19}$$

$$y=h^2\Bigg(\frac{(\nu+4)^2}{(\nu+2)^2}-$$

$$-\frac{4(\nu+4)}{(\nu+2)}\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k+\beta_k)\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}+$$

$$+16\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{p=1}^{k-1}\alpha_p\beta_{k-p}\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}\Bigg)\Big/\Bigg(\frac{4(\nu+4)h}{\nu+2}(t-t_0)^2-$$

$$-16(t-t_0)^3-16h(t-t_0)^2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}\Bigg),$$

$$z=-\frac{1}{t-t_0}+\frac{\nu h}{4(\nu+2)(t-t_0)^2}-$$

$$-\frac{h}{(t-t_0)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}.$$

Здесь $\theta=aA,\ h,\ t_0$ – произвольные постоянные. Для рядов (1.18) $\alpha_1=1,\ \beta_1=-(3\nu+8)/\nu,$ $\gamma_1=(\nu+4)^3/\nu^3$, остальные коэффициенты α_k, $\beta_k,\ g_k,\ k=2,3,4,...,$ находятся по рекуррентным формулам (1.12). Для рядов (1.19) $\alpha_1=1,$ $\beta_1=-(3\nu+4)/(\nu+4),\quad \gamma_1=\nu^3/(\nu+4)^3,$ остальные коэффициенты $\alpha_k,\ \beta_k,\ g_k,\ k=2,3,4,...,$ находятся по рекуррентным формулам (1.13).

Ряды (1.16)–(1.19) являются абсолютно сходящимися при условии

$$\mathrm{Re}\frac{h}{t-t_0}>\mu,$$

где $\mu=\sigma+\ln|A|,\ \sigma$ взято из (1.15).

Аналогично, как и для ряда (1.6), используя результаты, полученные в [8], заключаем, что ряды (1.16)–(1.19) имеют место в области, ограниченной подвижной особой линией с уравнением (1.7). Координаты любой точки, лежащей на подвижной особой линии, являются существенно особыми для членов рядов (1.16)–(1.19).

2 Теорема о представлении решений дифференциальных систем (0.3)–(0.7)

Таким образом, с учётом леммы 1.1, леммы 1.2, заключаем, что справедлива

***Теорема* 2.1.** *Ряды* (1.8), (1.16)–(1.19), *имеющие место в области, ограниченной подвижной особой линией с уравнением* (1.7), *представляют общее решение систем* (0.3)–(0.7) *соответственно. Координаты любой точки, лежащей на подвижной особой линии, являются существенно особыми для членов рядов* (1.8), (1.16)–(1.19) *соответственно.*

***Замечание* 2.1.** Аналогично можно построить трёхпараметрические решения и для некоторых других систем, полученных в работе [2].

Заключение

В работе для систем уравнений (0.3)–(0.7) построены решения в виде рядов Дирихле и рядов по экспонентам от дробно-линейных функций; установлено наличие трёхпараметрических решений с подвижной особой линией.

Полученные результаты исследования могут быть применены в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартынов*, *И.П.* О системах третьего порядка с подвижной особой линией / И.П. Мартынов // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 2. – С. 227–232.

2. *Андреева*, *Т.К.* О решениях с подвижной особой линией системы трёх дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью / Т.К. Андреева, Е.С. Лысюк, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Веснік ГрДУ. – Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2014. – № 1 (170).– С. 34–41.

3. *Shazy*, *J.* Sur les equation differentielles du troisieme ordre et d'ordre suprieur, dont l'integrable a ses points critiques fixes / J. Shazy // Acta Math. – 1911. – Vol. 4. – P. 317–385.

4. *Кравченко*, *Т.К.* Решение бесконечной граничной задачи для одного уравнения третьего порядка / Т.К. Кравченко, А.И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1965. – Т. 1, № 3. – С. 327–329.

5. *Кравченко*, *Т.К.* Об одной краевой задаче на полубесконечном отрезке / Т.К. Кравченко, А.И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т. 8, № 12. – С. 2180–2186.

6. *Леонтьев*, *А.Ф.* Ряды экспонент / А.Ф. Леонтьев. – М. : Наука, 1976. – 536 с.

7. *Мартынов*, *И.П.* Аналитическая теория нелинейных уравнений и систем : пособие / И.П. Мартынов, Н.С. Берёзкина, В.А. Пронько. – Гродно : ГрГУ, 2009. – 395 с.

8. *Ванькова*, *Т.Н.* Об одном обобщении уравнения Шази с подвижной особой линией / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1085–1094.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (*Грант* №Ф14М–148).

Поступила в редакцию 28.04.14.