А. Р. Миротин, В. В. Мухин, Об инвариантных мерах, продолжающихся с полугруппы на группу ее частных, *Матем. заметки*, 1978, том 24, выпуск 6, 819–828

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 24, № 6 (1978)

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МЕРАХ, ПРОДОЛЖАЮЩИХСЯ С ПОЛУГРУППЫ НА ГРУППУ ЕЕ ЧАСТНЫХ

А. Р. Миротин, В. В. Мухин

1. Всюду в данной работе S — праворееверсивная полугруппа с сокращениями, G — группа ее левых частных [1]. В дальнейшем нам понадобится следующая

ЛЕММА. *Если G — топологическая группа и S имеет в G непустую внутренность, то для любого компактного $K \subset G$ существует такой $a \in S$, что $aK \subset S$.*

Доказательство. Так как внутренность S непуста, то существует такое конечное множество $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \subset G$, что

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i S.$$

Индукцией по n легко доказать существование такого $a \in S$, что $ax_i \in S$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $aK \subset S$, что и требовалось доказать.

Меру μ, определенную на кольце $\mathcal{N}$ подмножеств полугруппы S, мы будем называть левоинвариантной на S, если для всякого $a \in S$ и всякого $A \in \mathcal{N}$ $aA \in \mathcal{N}$ и $\mu(aA) = \mu(A)$. Очевидно, левоинвариантная на S мера, рассматриваемая как мера на G, может не быть левоинвариантной на G. Далее, нетрудно доказать, что продолжение μ на σ-кольцо, порожденное $\mathcal{N}$, является инвариантной мерой на S. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что мера μ определена на σ-кольце. Относительно меры мы будем пользоваться терминологией [2].

2. Левоинвариантную на G меру m, определенную на σ-кольце $\mathcal{M}$ подмножеств группы G, мы будем называть продолжением меры μ, если $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ и сужение m на $\mathcal{N}$ совпадает с μ. Если мера μ имеет продолжение, то будем называть ее продолжимой.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы мера μ была продолжимой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие* (A), *если $A, A_i \in \mathcal{N}$; $a_i \in S$ $(i = 1, 2, \ldots)$;*

$$a_i^{-1}A_i \cap a_j^{-1}A_j = \phi \quad \textit{при} \;\; i \neq j \;\; \textit{и} \;\; A = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i^{-1}A_i,$$

то $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Доказательство. Необходимость условия очевидна.

Достаточность. Рассмотрим следующую систему подмножеств группы G:

$$\mathcal{N}' = \{a^{-1}A\colon a \in S;\ A \in \mathcal{N}\}.$$

Из соотношений $a^{-1}A \cap B^{-1}B = (ca)^{-1}(cA \cap dB)$ и $a^{-1}A \triangle \triangle B^{-1}B = (ca)^{-1}(cA \triangle dB)$, где a, b, c, d — такие элементы S, что $ab^{-1} = c^{-1}d$ (в силу правореверсивности S такие элементы существуют), вытекает, что $\mathcal{N}'$ — кольцо подмножеств группы G.

Определим на $\mathcal{N}'$ функцию μ' формулой $\mu'(a^{-1}A) = \mu(A)$. Корректность определения, левоинвариантность и аддитивность функции μ' легко проверяются. Покажем, что μ' σ-аддитивна. В самом деле, пусть A, $A_i \in \mathcal{N}$; $a, a_i \in S$ $(i = 1, 2, \ldots)$; $a_i^{-1}A_i \cap a_j^{-1}A_j = \phi$ при $i \neq j$ и $a^{-1}A = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i^{-1}A_i$. Тогда

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} aa_i^{-1}A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} c_i^{-1}(d_iA_i) \quad (aa_i^{-1} = c_i^{-1}d_i).$$

Согласно условию (A),

$$\mu'(a^{-1}A) = \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(d_iA_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu'(a_i^{-1}A_i).$$

Наконец, в качестве m можно взять продолжение μ' на σ-кольце $\mathcal{M}$, порожденное $\mathcal{N}'$. Легко проверить, что мера m удовлетворяет условиям теоремы, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 1 следует, что любое продолжение меры μ определено на σ-

кольце, содержащем $\mathcal{M}$, и совпадает на $\mathcal{M}$ с m. Поэтому меру m, построенную в теореме 1, мы будем называть минимальным продолжением меры μ.

Замечание 2. При предположениях условия (А) всегда $\mu(A) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ (это следует из аддитивности функции μ'). Таким образом, для проверки выполнения условия (А) достаточно установить, что выполняется противоположное неравенство.

Замечание 3. Минимальное продолжение меры μ конечно, если конечна μ.

Обозначим через $\mathcal{M}_S$ σ-кольцо подмножеств полугруппы S, являющихся элементами $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}_S$ может не совпадать с $\mathcal{N}$.

Будем говорить, что множество $A \in \mathcal{N}$ удовлетворяет условию (В), если из соотношения $a^{-1}A \subset S$ $(a \in S)$ вытекает соотношение $a^{-1}A \in \mathcal{N}$.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы меру μ можно было продолжить до левоинвариантной на G меры m, определенной на σ-кольце $\mathcal{M}$ подмножеств группы G, так, чтобы $\mathcal{M}_S = \mathcal{N}$, необходимо и достаточно, чтобы все множества из $\mathcal{N}$ удовлетворяли условию* (В).

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Заметим, что требование, чтобы все множества из $\mathcal{N}$ удовлетворяли условию (В), влечет условие (А). Следовательно, по теореме 1 μ продолжима до левоинвариантной на G меры m, определенной на σ-кольце $\mathcal{M}$ подмножеств группы G. Покажем, что $\mathcal{M}$ совпадает с системой множеств

$$\mathcal{L} = \left\{A\colon\ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n;\ A'_n \in \mathcal{N}';\ n = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Для этого установим сначала, что кольцо $\mathcal{N}'$ замкнуто относительно счетных пересечений. Пусть $A_i \in \mathcal{N}$, $a_i \in S$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} a_i^{-1} A_i = a_1^{-1}\left[A_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^{\infty} a_i a_i^{-1} A_i\right)\right] =$$

$$= a_1^{-1}\left[\bigcap_{i=2}^{\infty} (A_1 \cap q_i^{-1} B_i)\right],$$

где $a_1 a_i^{-1} = q_i^{-1} p_i$, $p_i A_i = B_i \in \mathcal{N}$ $(i = 2, 3, \ldots)$. Но

$A_1 \cap q_i^{-1}B_i = q_i^{-1}(q_iA_i \cap B_i) \subset S, \qquad q_iA_1 \cap B_i \in \mathcal{N}$, поэтому, согласно (B), $A_1 \cap q_i^{-1}B_i \in \mathcal{N}$, Так как $\mathcal{N}$ — σ-кольцо, то $B = \bigcap_{i=2}^{\infty} (A_i \cap q_i^{-1}B_i) \in \mathcal{N}$, $A = a_i^{-1}B \in \mathcal{N}'$, что доказывает наше утверждение.

Теперь соотношения

$$A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} (A_n' \cap B_m'), \quad A \setminus B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} (A_n' \setminus B_m')\right],$$

где $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'$, $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m'$, и тот факт, что система множеств $\mathcal{L}$ замкнута относительно не более чем счетных объединений, показывают, что $\mathcal{L}$ — σ-кольцо. Очевидно, $\mathcal{L}$ — минимальное σ-кольцо, содержащее $\mathcal{N}'$, т. е. $\mathcal{L} = \mathcal{M}$.

Пусть теперь $A \in \mathcal{M}_S$, т. е. $A \in \mathcal{M}$ и $A \subset S$. Тогда $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'$, где $A_i' \in \mathcal{N}'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $A_i' \subset S$. Поэтому, согласно (B), $A_i' \in \mathcal{N}$ и, значит, $A \in \mathcal{N}$; тем самым доказательство теоремы полностью завершено.

3. Рассмотрим некоторые классы продолжимых мер, связанных с топологией полугруппы S.

ТЕОРЕМА 3. *Если в S существует топология такая, что левые сдвиги λ_a: $x \mapsto ax$ $(a \in S)$ — непрерывные отображения, и мера μ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *каждое измеримое множество либо удовлетворяет условию* (B), *либо внешне регулярно*;

2) *для любой последовательности открытых множеств $(V_i)_{i \geqslant 1}$ и для любого измеримого множества A таких, что $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, существует такая последовательность измеримых множеств $(W_i)_{i \geqslant 1}$, что $W_i \subset V_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$; то мера μ продолжима.*

Доказательство. Проверим (A). Пусть $a_i^{-1} A_i \cap a_j^{-1}A_j = \varnothing$ при $i \neq j$; $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i^{-1}A_i$; $A, A_i \in \mathcal{N}$; $a_i \in S$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Если $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \infty$, то $\mu(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, т. е. (A) выполняется. Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \infty$, и пусть $\{I, J\}$ — такое разбиение множества натуральных чисел, что A_i удовлетворяют условию (B) при $i \in I$ и A_j внешне регулярны при $j \in J$. Тогда для $i \in I$ $a_i^{-1} A_i \in \mathcal{N}$ и мы будем иметь

$$\mathcal{N} \ni B = A \setminus \bigcup_{i \in I} a_i^{-1} A_i = \bigcup_{j \in J} a_j^{-1} A_j.$$

В силу условия 1), для $\forall \varepsilon > 0$ существуют открытые измеримые $U_j \supset A_j$ такие, что

$$\mu(U_j) \leqslant \mu(A_j) + \varepsilon/2^j \quad (j \in J).$$

Пусть $V_j = \lambda_{a_j}^{-1}(U_j)$, V_j — открытые подмножества S и $B \subset \bigcup_{j \in J} V_j$. В силу условия 2), существуют измеримые $W_j \subset V_j$ такие, что $B \subset \bigcup_{j \in J} W_j$. Тогда, так как $a_j W_j \subset \subset U_j$, то

$$\mu(B) \leqslant \sum_{j \in J} \mu(W_j) = \sum_{j \in J} \mu(a_j W_j) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j \in J} \mu(U_j) \leqslant \sum_{j \in J} \mu(A_j) + \varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно и $\mu(B) = \mu(A) - \sum_{i \in I} \mu(A_i)$, то $\mu(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Если топология S локально компактна, λ_a — непрерывные отображения, а μ — борелевская мера, удовлетворяющая условию* 1) *теоремы* 3, *то μ продолжима.*

В самом деле, если A — борелевское множество, $(V_i)_{i \geqslant 1}$ — последовательность открытых множеств и $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, то можно взять $W_i = V_i \cap U$, где U — открытое борелевское множество, содержащее A.

ТЕОРЕМА 4. *Если в S существует топология такая, что λ_a $(a \in S)$ — непрерывные отображения, а μ — регулярная мера, то μ продолжима.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3, пусть $a_i^{-1} A_i \cap a_j^{-1} A_j = \phi$ при $i \neq j$;

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i^{-1} A_i; \qquad A, A_i \in \mathcal{N}; \qquad a_i \in S \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

В силу регулярности меры μ, для $\forall \varepsilon > 0$ существуют такие открытые измеримые $U_i \supset A_i$, что

$$\mu(U_i) \leqslant \mu(A_i) + \varepsilon/2^i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Если $V_i = \lambda_{a_i}^{-1}(U_i)$, то V_i открыты в S и $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i$. Пусть K измеримо и компактно и $K \subset A$. Так как $(V_i)_{i \geqslant 1}$ — открытое покрытие K, то существует его конечное подпокрытие $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Согласно лемме, существует $a \in S$ такой, что $b_i = aa_i^{-1} \in S$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Тогда

$$aK \subset \bigcup_{i=1}^{n} aV_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} b_i U_i,$$

$$\mu(K) = \mu(aK) \leqslant \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mu(b_i U_i) \leqslant \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \varepsilon,$$

что вместе с регулярностью μ и произвольностью ε влечет $\mu(A) \leqslant \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. Таким образом, мера μ удовлетворяет условию (A), что требовалось доказать.

Следствие. *Если топология S локально компактна, λ_a — непрерывные отображения, а μ — бэровская мера, то μ продолжима.*

Следующая теорема доставляет нам еще один пример продолжимой меры.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть S — полугруппа, погружающаяся с непустой внутренностью в локально компактную группу G своих левых частных. Тогда на S существует единственная с точностью до пропорциональности левоинвариантная на S ненулевая борелевская мера. Минимальное продолжение этой меры есть левая мера Хаара группы G.*

Мы докажем эту теорему с помощью нижеследующих предложений, имеющих и самостоятельный интерес. Заметим, что эти предложения являются обобщениями соответствующих предложений для мер Радона [3, глава III, § 3, предложение 1], [4, глава VII, § 1, предложение 9].

Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, U — открытое подмножество X и μ — борелевская мера на X. Так как каждое компактное множество в индуцированной на U топологии компактно в X, то σ-кольцо $\mathscr{B}(U)$ борелевских множеств U является подмножеством σ-кольца $\mathscr{B}(X)$ борелевских множеств X и сужение меры μ на $\mathscr{B}(U)$ является борелевской мерой на U.

Предложение 1. *Пусть* $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ — *открытое покрытие локально компактного пространства* X, *и пусть на каждом подпространстве* U_α *задана борелевская мера* μ_α *так, что для любой пары* (α, β) *сужение мер* μ_α *и* μ_β *на* $U_\alpha \cap U_\beta$ *совпадают. При этих условиях существует, и притом только одна, борелевская мера* μ *на* X, *сужение которой на* U_α *равно* μ_α *для любого индекса* $\alpha \in \Lambda$.

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{B}(U_\alpha)$ совокупность борелевских подмножеств подпространства U_α, и пусть $\mathscr{A} = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{B}(U_\alpha)$. Покажем, что $\mathscr{A}$ — полукольцо подмножеств множества X. В самом деле, пусть $A \in \mathscr{A}$ и $B \in \mathscr{A}$. Тогда существуют такие α и β из Λ, что $A \in \mathscr{B}(U_\alpha)$ и $B \in \mathscr{B}(U_\beta)$. Но $\mathscr{B}(U_\alpha) = \mathscr{S}(\mathscr{K})$ и $\mathscr{B}(U_\beta) = \mathscr{S}(\mathscr{K}')$, где $\mathscr{K} = (K_i)_{i\in I}$ и $\mathscr{K}' = (K_j')_{j\in I}$ — семейства всех компактных подмножеств пространств U_α и U_β соответственно ($\mathscr{S}(\mathscr{E})$ — σ-кольцо, порожденное системой множеств $\mathscr{E}$). Тогда, используя [2, глава I, § 5, теорема 5], имеем

$$B \cap K_i \in \mathscr{S}(\mathscr{K}' \cap K_i) \subset \mathscr{B}(U_\beta),$$

так как $\mathscr{K}' \cap K_i = (K_j' \cap K_i)_{j\in J} \subset \mathscr{K}'$. Поэтому $A \cap B \in \mathscr{S}(\mathscr{K} \cap B) \subset \mathscr{B}(U_\alpha)$, т. е. $A \cap B \in \mathscr{A}$. Далее, если $A \supset B$, то $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \in \mathscr{B}(U_\alpha) \subset \mathscr{A}$. Итак, $\mathscr{A}$ — полукольцо.

Пусть $A \in \mathscr{A}$. Тогда существует $\alpha \in \Lambda$ такой, что $A \in \mathscr{B}(U_\alpha)$. Положим $\mu(A) = \mu_\alpha(A)$. Это определение корректно, так как если $A \in \mathscr{B}(U_\beta)$, то $A \in \mathscr{B}(U_\alpha \cap U_\beta)$ и, значит, по предложению $\mu_\alpha(A) = \mu_\beta(A)$. Если $A \in \mathscr{A}$, $A_i \in \mathscr{A}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то, как было показано выше, из того, что $A \in \mathscr{B}(U_\alpha)$, следует, что все $A_i \in \mathscr{B}(U_\alpha)$. Поэтому из счетной аддитивности меры μ_α вытекает, что

$$\mu(A) = \mu_\alpha(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\alpha(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Меру μ можно продолжить на σ-кольцо $\mathscr{B}$, порожденное $\mathscr{A}$. Покажем, что $\mathscr{B}$ совпадает с классом $\mathscr{B}(X)$ всех борелевских подмножеств X. Так как $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}(X)$, то достаточно доказать, что каждое компактное подмножество X принадлежит $\mathscr{B}$. Пусть K компактно в X. Так как

$(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ — открытое покрытие K, то существует его конечное подпокрытие $(U_{\alpha_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$. Тогда, согласно [2, глава X, § 50, теорема 1], существуют такие компактные $K_i \subset \subset U_{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, что $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \in \mathscr{B}$. Значит, $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X)$. Итак, μ — мера на σ-кольце всех борелевских подмножеств X, и сужение μ на U_α равно μ_α для всех $\alpha \in \Lambda$. Наконец, заметим, что для всякого компактного $K \subset X$

$$\mu(K) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu_{\alpha_i}(K_i) < \infty,$$

так как μ_α — борелевские меры. Тем самым μ — борелевская мера, удовлетворяющая условиям теоремы. Единственность μ следует из того, что на $\mathscr{A}$ μ, как мы видели, определяется однозначно и $\mathscr{B}(X) = \mathscr{S}(\mathscr{A})$. Таким образом, доказательство предложения полностью завершено.

Предложение 2. *Пусть X — локально компактная группа, V — ее открытое подмножество и μ — ненулевая борелевская мера на V, обладающая следующим свойством: если U — открытое подмножество V и $B \subset \subset U$ — борелевское подмножество V, то при любом $x \in \in X$ таком, что $xU \subset V$, выполняется равенство $\mu(B) = = \mu(xB)$. Тогда существует, и притом единственная, левая мера Хаара λ на X такая, что ее сужение на V есть μ.*

Доказательство. Обозначим через μ_s для любого $s \in X$ образ меры μ при гомеоморфизме $x \mapsto sx$ множества V на sV. Пусть B — борелевское подмножество из $sV \cap tV$. Тогда $s^{-1}B$ — борелевское в V, $s^{-1}B \subset V \cap \cap s^{-1}tV = U \subset V$, и по определению $\mu_s(B) = \mu(s^{-1}B)$. Но $t^{-1}sU = t^{-1}sV \cap V \subset V$. Следовательно, по предположению $\mu(s^{-1}B) = \mu(t^{-1}ss^{-1}B) = \mu(t^{-1}B) = \mu_t(B)$. Значит, $(sV)_{s\in X}$ и μ_s удовлетворяют условиям предложения 1. Пусть λ — единственная борелевская мера на X, сужение которой на sV есть μ_s при любом s. Покажем, что λ левоинвариантна. Пусть B — борелевское подмножество X. Тогда, как следует из доказательства предложения 1, $B \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$ и нетрудно убедиться, что $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, где $B_i \in \mathscr{B}(s_iV)$ для некоторой последовательности $(s_i)_{i\geqslant 1} \subset \subset X$. Кроме того, мы можем считать, что множества B_i попарно не пересекаются.

Тогда имеем

$$\lambda(B)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_{s_i}(B_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(s_i^{-1}B_i).$$

Если $t\in X$, то

$$\lambda(tB)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_{ts_i}(tB_i)=$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(s^{-1}t^{-1}tB_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(s_i^{-1}B_i)=\lambda(B).$$

Ясно, что сужение λ на V совпадает с $\mu_e=\mu$ (e — единица группы X), что требовалось доказать.

Следствие. *Всякая борелевская мера на V, удовлетворяющая условиям предложения 2, как сужение регулярной меры является регулярной мерой.*

Доказательство теоремы 5. Единственность. Пусть μ — ненулевая левоинвариантная борелевская мера на S, S — внутренность S в G. Тогда для любого компактного $K\subset S$ и элемента $a\in\mathring{S}$ $aK\subset\mathring{S}$ и, кроме того, $\mu(K)=\mu(aK)$. Следовательно, мера μ полностью определена своими значениями на борелевских подмножествах из $\mathring{S}$. Пусть U — открытое подмножество S и $x\in G$ таков, что $xU\subset\mathring{S}$. Тогда для всякого борелевского $B\subset U$ xB — борелевское в xU, а значит, и в $\mathring{S}$. Если $x=a^{-1}b$ (a, $b\in S$), то, в силу инвариантности меры μ,

$$\mu(B)=\mu(bB)=\mu(aa^{-1}bB)=\mu(a^{-1}bB)=\mu(xB).$$

Следовательно, по предложению 2 существует левая мера Хаара λ на G такая, что сужение λ на $\mathring{S}$ совпадает с сужением μ на $\mathring{S}$. Но тогда сужение λ на S совпадает с μ, а любые две левые меры Хаара совпадают с точностью до пропорциональности.

Существование. Сужение левой меры Хаара группы G на σ-кольцо борелевских подмножеств полугруппы S есть левоинвариантная мера на S.

Для доказательства последнего утверждения теоремы достаточно теперь показать, что всякое компактное $K\subset G$ принадлежит области определения $\mathcal{M}$ минимального продолжения меры μ. Действительно, если $a\in S$ таков, что $K_1=aK\subset S$, то $K=a^{-1}K_1\in\mathcal{M}$, так как K_1 — компактное подмножество S. Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 6. *При условиях теоремы* 5 *пусть* μ — *левоинвариантная на* S *борелевская мера. Тогда, если при некотором* $a \in S$ $\mu(\{a\}) > 0$, *то* S *дискретна; если* $\mu_*(S) < \infty$ *и* $\mu \neq 0$, *то* S — *компактная группа.*

Доказательство. Пусть $\mu(\{a\}) > 0$. Если λ — левая мера Хаара, сужение которой на S совпадает с μ, то $\lambda(\{a\}) > 0$. Следовательно, G — дискретная группа, а тогда и S дискретна как подпространство G.

Пусть $\mu_*(S) < \infty$. Тогда по теореме 5 и замечанию 3 к теореме 1 $\lambda_*(G) < \infty$. Значит, G — компактная группа. Заметим, что $\lambda_*(S) > 0$. Следовательно [4, глава VII, § 1, упражнение 21], S — подгруппа группы G, а так как G есть группа левых частных S, то $S = G$. Тем самым теорема 6 полностью доказана.

Гомельский государственный университет

Поступило 14.VI.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, т. 1, М., «Мир», 1972.
[2] Халмош П., Теория меры, М., «Наука», 1953.
[3] Бурбаки Н., Интегрирование (Меры, интегрирование мер), М., «Наука», 1967.
[4] Бурбаки Н., Интегрирование (Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления), М., «Наука», 1970.