A. R. Mirotin, The Paley-Wiener theorem for cones in locally compact abelian groups, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1995, Number 3, 35–44

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1995 МАТЕМАТИКА № 3 (394)

УДК 517.986

А.Р. МИРОТИН

ТЕОРЕМА ПЭЛИ–ВИНЕРА ДЛЯ КОНУСОВ В ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

§ 1. Введение

В работе описывается образ относительно преобразования Лапласа пространства $L^2(S)$, где S – конус в локально компактной абелевой группе. Возникающие при этом пространства H^2 содержат в качестве частных случаев пространства H^2 для трубчатых областей в $\mathbb{C}^n$ с коническим основанием, а также для компактных групп с линейно упорядоченной группой характеров (см. [1], [2] и [3]–[5] соответственно). Доказательство является новым и в классическом случае $S=\mathbb{R}_+$.

Рассмотрим основную идею предлагаемого доказательства для этого случая, т.е. для пространства $H^2(\Pi)$, где Π – открытая правая полуплоскость в $\mathbb{C}$. Для F из $H^2(\Pi)$ возьмем произвольно числа $r_1,r_2>0$, компакт $C\subset\mathbb{R}$ и образуем вектор-функцию $B:\Pi\cup\{0\}\longrightarrow L^2(\mathbb{R})$,

$$B(z)(x) = \mathbb{1}_C(x)e^{(r_1+r_2z)x}\mathscr{F}_{t\to x}F(r_1+r_2z-it)$$

(здесь $\mathscr{F}_{t\to x}$ обозначает преобразование Фурье по переменной t, $\mathbb{1}_C$ – индикатор множества C). Тогда B голоморфна в Π и непрерывна в $+0$. С другой стороны, полагая $\sigma=\mathrm{Re}\,z$, $\tau=\mathrm{Im}\,z$, имеем

$$\mathscr{F}_{t\to x}F(r_1+r_2z-it) = e^{-ir_2\tau x}\mathscr{F}_{t\to x}F(r_1+r_2\sigma-it),$$

а потому B не зависит от τ. Следовательно, B постоянна в Π, и по непрерывности $B(0)=$ $=B(1)$. Последнее равенство показывает, что функция

$$f(x) = e^{rx}\mathscr{F}_{t\to x}F(r-it)$$

не зависит от $r>0$. Теперь из неравенства $\|f(x)e^{-rx}\|_{L^2}\leq\|F\|_{H^2}$, справедливого при всех $r>0$, следует, что $f\in L^2(\mathbb{R}_+)$, и осталось заметить, что F есть преобразование Лапласа от f.

Далее для общего случая приведем подробное доказательство (при этом возникают дополнительные трудности, связанные с возможным наличием у полухарактеров нулей, а также с несуммируемостью полухарактеров в общем случае). Отметим, что основной результат был анонсирован в [6], где имеются некоторые неточности, которые мы здесь исправляем.

Всюду ниже G и X – двойственные друг другу локально компактные абелевы группы с мерами Хаара ν и λ соответственно, согласованными посредством равенства Парсеваля, S – подполугруппа Аренса–Зингера группы G, содержащая единицу e группы G, т.е. ([7], § 2):

(1) S замкнута в G;

(2) внутренность $\mathrm{int}\,S$ плотна в S;

(3) S порождает группу G.

Через $\hat{S}$ (соответственно $\hat{S}_+$) будем обозначать полугруппу относительно поточечного умножения всех (соответственно всех неотрицательных) полухарактеров полугруппы S, наделенную топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах S (полухарактер – это нетривиальный непрерывный гомоморфизм из S в мультипликативную полугруппу $\{z\in\mathbb{C}: |z|\le 1\}$). Пусть, далее, $\hat{S}^0=\hat{S}\setminus X$, $\hat{S}^0_+=\hat{S}_+\setminus X$. Для $\rho\in\hat{S}^0_+$ пусть $S(\rho)=\{t\in S:\rho(t)>0\}$, и $G(\rho)$ есть подгруппа группы G, порожденная $S(\rho)$. Положим также $\Pi=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re} z>0\}$, $\Pi_0=\Pi\cup\{0\}$. Знаком $\langle\cdot,\cdot\rangle$ будем обозначать скалярное произведение в пространстве $L^2(G)$. Сужение меры ν на S обозначим через μ. Черта сверху будет, как обычно, обозначать комплексное сопряжение.

§ 2. Полухарактеры

В этом параграфе приведем ряд известных свойств полухарактеров, существенно используемых в дальнейшем, а также докажем одно вспомогательное утверждение.

В силу ([7], теорема 3.1) каждый полухарактер $\zeta\in\hat{S}^0$ может быть представлен в виде $\zeta=\rho\chi$, где $\chi\in X$, а ρ из $\hat{S}^0_+$ определяется единственным образом. Кроме того, каждый полухарактер $\rho\in\hat{S}^0_+$ единственным образом продолжается с $S(\rho)$ до непрерывного гомоморфизма $\tilde{\rho}$ группы $G(\rho)$ в мультипликативную группу положительных действительных чисел ([7], § 5). Будем считать, что $\tilde{\rho}(x)=0$ при $x\in G\setminus G(\rho)$. Тогда $\tilde{\rho}\,|\,S=\rho$. По определению ρ^0 есть индикатор $\mathbb{1}_{S(\rho)}$ множества $S(\rho)$. Тогда ([7], § 7) $\rho^z\in\hat{S}^0$ при всех $z\in\Pi_0$, $\rho\in\hat{S}^0_+$.

Если $S\ne G$, то полугруппа $\hat{S}^0_+$ богата в различных смыслах. А.Глисон доказал (см. [8], [9]), что для любого $r\in\,]0;1[$ и любого $t\in(\operatorname{int} S)\setminus S^{-1}$ найдется такой $\rho\in\hat{S}^0_+$, что $\rho(t)=r$; затем Дж.Тейлор в ([10], § 4.5) доказал, что единичный характер 1 есть точка прикосновения для $\hat{S}^0_+$ (еще одно утверждение такого рода см. в [11]). Непустота $\hat{S}^0_+$ является источником существенных отличий гармонического анализа на S от гармонического анализа на локально компактных абелевых группах.

ЛЕММА 2.1. *Семейство* $(G(\rho):\rho\in\hat{S}^0_+)$ *образует открытое покрытие группы* G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интерес представляет случай $S\ne G$, что мы далее и будем предполагать. Если $\rho\in\hat{S}^0_+$, то $S(\rho)$ имеет внутренние точки в G, поскольку пересечение $S(\rho)\cap\operatorname{int} S$ непусто (см. условие (2) из § 1). Следовательно, $G(\rho)$ есть открытая подгруппа группы G.

Покажем, что $S_0=(\operatorname{int} S)\setminus S^{-1}$ есть идеал полугруппы S. Если предположить, что $S_0=\varnothing$, то $\operatorname{int} S^{-1}\subset S$. Поэтому группа $G_1=(\operatorname{int} S)(\operatorname{int} S^{-1})$ содержится в S. С другой стороны, при $a\in\operatorname{int} S$ имеем $aS\subset\operatorname{int} S\subset G_1$. Но тогда $G_1\supset(aS)^{-1}(aS)=G$, что противоречит условию $S\ne G$. Теперь, если $b\in S_0$, $t\in S$, то непосредственно проверяется, что $bt\in S_0$, т.е. S_0 – идеал полугруппы S.

Пусть, наконец, $x\in G$,. $x=s^{-1}t$, где $s,t\in S$. При $b\in S_0$ имеем $bst\in S_0$. По теореме А. Глисона [8] найдется $\rho\in\hat{S}^0_+$, такой, что $\rho(bst)>0$. Тогда $s,t\in S(\rho)$, т.е. $x\in G(\rho)$, что и требовалось доказать.

§ 3. Определения и примеры

Пусть $\mathscr{F}: L^2(\mathrm{X}) \longrightarrow L^2(G)$ – преобразование Фурье, соответствующее мере Хаара λ группы X, $\mathscr{F}^{-1}$ – обратное ему преобразование, соответствующее мере Хаара ν группы G. Всюду далее $L^2(S)$ будет обозначать подпространство пространства $L^2(G)$, состоящее из функций, равных нулю на $G\setminus S$. При $f\in L^2(S)$ и $\rho\in\hat{S}_+$ произведение $f\rho$ также будем считать равным нулю на $G\setminus S$. Тогда $f\rho=f\widetilde{\rho}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Преобразование Лапласа функции $f\in L^2(S)$ определим равенством ($\rho\in\hat{S}^0_+$, $\chi\in\mathrm{X}$)

$$(\mathscr{L}f)(\rho\chi) = \mathscr{F}^{-1}(f\rho)(\chi).$$

Строго говоря, если $f\notin L^1(S)$, то $\mathscr{L}f$ не есть функция на $\hat{S}^0$ в классическом понимании; определение 3.1 необходимо понимать в том смысле, что $(\mathscr{L}f)(\rho\cdot)$ есть элемент $L^2(\mathrm{X})$, совпадающий с $\mathscr{F}^{-1}(f\rho)$ для каждого $\rho\in\hat{S}^0_+$.

Следующее определение в данной работе является основным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пространство $H^2(\hat{S}^0)$ состоит из всех функций F на $\hat{S}^0$, таких, что

1) для каждого $\rho\in\hat{S}^0_+$ срез-функция $F_\rho(\chi)=F(\rho\chi)$ принадлежит $L^2(\mathrm{X})$ и
$$\|F\| := \sup\{\|F_\rho\|_{L^2(\mathrm{X})} : \rho\in\hat{S}^0_+\} < \infty;$$

2) для любых $\rho,\rho_1\in\hat{S}^0_+$ функции $\mathscr{F}F_{\rho_1}$ и $\mathscr{F}F_{\rho_1\rho^0}$ совпадают на $G(\rho)$;

3) для любых $\rho,\rho_1\in\hat{S}^0_+$ и любого $z\in\Pi_0$ можно так определить функцию $F_{\rho^z\rho_1}(\chi) := F(\rho^z\rho_1\chi)$ для почти всех (п.в.) $\chi\in\mathrm{X}$, что

а) функция $z\longmapsto F(\rho^z\rho_1\chi)$ голоморфна в Π для п.в. $\chi\in\mathrm{X}$,

б) каждая последовательность $t_n\longrightarrow+0$ содержит такую подпоследовательность t'_n, что $F(\rho^{t'_n}\rho_1\chi)\longrightarrow F(\rho^0\rho_1\chi)$ для п.в. $\chi\in\mathrm{X}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Определение 3.2 (как и определение 3.1) не является формальным. Для его формализации нужно считать, что элемент F из $H^2(\hat{S}^0)$ – это правило, которое каждому $\rho\in\hat{S}^0_+$ сопоставляет элемент $F_\rho\in L^2(\mathrm{X})$, причем имеют место свойства 1), 2), и для любых $\rho,\rho_1\in\hat{S}^0_+$ и $z=\sigma+i\tau\in\Pi_0$ сдвиг элемента $F_{\rho^\sigma\rho_1}\in L^2(\mathrm{X})$ на продолжение $\overline{\chi}_\tau\in\mathrm{X}$ характера $\widetilde{\rho}^{i\tau}$ группы $G(\rho)$ не зависит от выбора этого продолжения, и можно так выбрать представителя этого сдвига $F(\rho^z\rho_1\chi) := F_{\rho^\sigma\rho_1}(\chi_\tau\chi)$, что справедливо свойство 3).

ПРИМЕР 3.1. Пусть $S=\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}$. Тогда $\hat{S}^0$ есть открытый заполненный тор $\mathbb{D}\times\mathbb{T}$, где $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$, $\mathbb{T}=\{t\in\mathbb{C}: |t|=1\}$. В этом случае $H^2(\hat{S}^0)=H^2(\mathbb{D}\times\mathbb{T})$ состоит из таких функций F на $\mathbb{D}\times\mathbb{T}$, голоморфных на каждом сечении-диске $\mathbb{D}\times\{t\}$ $(t\in\mathbb{T})$, что срез-функция $F_r(t_1,t_2)=F(rt_1,t_2)$ принадлежит $L^2(\mathbb{T}^2)$ при каждом $r\in]0;1[$, и $\sup\{\|F_r\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} : r\in]0;1[\} < \infty$. Справедливость условия 2) определения 3.2 следует здесь из теоремы о среднем для голоморфных функций. Заметим, что $H^2(\mathbb{D}\times\mathbb{T})$ изоморфно пространству Харди $L^2(\mathbb{T})$-значных функций в $\mathbb{D}$, т.е. пространству $H^2(L^2(\mathbb{T}))$. Это утверждение легко выводится из теоремы Пэли–Винера (см. теорему 4.1 ниже).

Наряду с условиями (1)–(3) (см. § 1) рассмотрим также следующее условие выпуклости:

(4) для любого $x\in G\setminus S$ найдется такой $\rho\in\hat{S}^0_+$, что $x\in G(\rho)$ и $\tilde{\rho}(x)>1$.

ПРИМЕР 3.2. а) Подполугруппа $S=\{0;2;3;\ldots\}\subset\mathbb{Z}$ удовлетворяет условиям (1)–(3), но не (4), поскольку элементы из $\hat{S}^0_+$ имеют вид $\rho(n)=r^n$ ($r\in[0;1[$) (считаем $0^0=1$).

б) Замкнутый выпуклый телесный конус $C\subset\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям (1)–(4). Справедливость условия (4) в этом случае вытекает из теоремы Фаркаша о совпадении конуса со своим вторым сопряженным ([12], гл. VII, теорема 93). Нетрудно показать, что верно и обратное: если подполугруппа $S\subset\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям (1)–(4), то S – замкнутый выпуклый телесный конус.

в) Конус S неотрицательных элементов линейно упорядоченной локально компактной абелевой группы удовлетворяет условиям (1)–(4) (предполагаем, что порядок согласован с топологией группы).

Последние два примера оправдывают следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Подполугруппу $S\subset G$ с единицей, удовлетворяющую условиям (1)–(4), будем называть конусом в G.

§ 4. Теорема Пэли–Винера

ТЕОРЕМА 4.1. *Для любого конуса $S\subset G$ преобразование Лапласа $\mathscr{L}$ есть изометрический изоморфизм пространств $L^2(S)$ и $H^2(\hat{S}^0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьем на 4 шага.

I. Покажем, что $\mathscr{L}$ отображает $L^2(S)$ в $H^2(\hat{S}^0)$. Пусть $f\in L^2(S)$. По теореме Планшереля $(\mathscr{L}f)(\rho\cdot)\in L^2(X)$ и $\|(\mathscr{L}f)(\rho\cdot)\|_{L^2(X)}=\|f\rho\|_{L^2(S)}\le\|f\|_{L^2(S)}$ при $\rho\in\hat{S}^0_+$. Следовательно, $\mathscr{L}f$ удовлетворяет условию 1) определения 3.2. Выполнение условия 2) очевидно.

Для проверки условия 3а) определения 3.2 заметим, что отображение $\alpha:z\mapsto f\rho^z:\Pi\to L^2(S)$ голоморфно для любого $\rho\in\hat{S}^0_+$ (напр., оно слабо голоморфно по теореме Мореры). Но тогда отображение $z\longmapsto\mathscr{F}^{-1}\alpha(z):\Pi\to L^2(X)$ также голоморфно. Таким образом, вектор-функция $z\longmapsto\mathscr{F}^{-1}(f\rho^z\rho_1):\Pi\to L^2(X)$ голоморфна, и по лемме 3.2 из [13] для любого $z\in\Pi$ можно так определить $\mathscr{F}^{-1}(f\rho^z\rho_1)(\chi)$ для п.в. $\chi\in X$, что для п.в. $\chi\in X$ функция $z\longmapsto\mathscr{F}^{-1}(f\rho^z\rho_1)(\chi)$ голоморфна в Π.

Для проверки условия 3б) определения 3.2 возьмем последовательность $t_n\to+0$. Тогда $f\rho^{t_n}\rho_1\to f\rho^0\rho_1$ в пространстве $L^2(S)$. Следовательно, $\mathscr{F}^{-1}(f\rho^{t_n}\rho_1)\to\mathscr{F}^{-1}(f\rho^0\rho_1)$ в $L^2(X)$, и найдется подпоследовательность t'_n такая, что $\mathscr{F}^{-1}(f\rho^{t'_n}\rho_1)(\chi)\to\mathscr{F}^{-1}(f\rho^0\rho_1)(\chi)$ для п.в. $\chi\in X$. Итак, $\mathscr{L}f\in H^2(\hat{S}^0)$.

II. Докажем, что отображение $\mathscr{L}:L^2(S)\to H^2(\hat{S}^0)$ изометрическое. Если $f\in L^2(S)$, $\rho\in\hat{S}^0_+$, то

$$\|(\mathscr{L}f)(\rho\cdot)\|_{L^2(X)}=\|\mathscr{F}^{-1}(f\rho)\|_{L^2(X)}=\|f\rho\|_{L^2(S)}\le\|f\|_{L^2(S)},$$

а потому $\|\mathscr{L}f\| \leq \|f\|_{L^2(S)}$. Кроме того, как отмечалось выше ([10], § 4.5), существует направленность $\rho_\alpha \in \hat{S}^0_+$, сходящаяся к 1 в $\hat{S}$. Поэтому

$$\|(\mathscr{L}f)\| = \sup\{\|f\rho\|_{L^2(S)} : \rho \in \hat{S}^0_+\} \geq \lim_\alpha \|f\rho_\alpha\|_{L^2(S)} = \|f\|_{L^2(S)}.$$

III. Нам осталось доказать сюръективность отображения $\mathscr{L}$. Пусть $F \in H^2(\hat{S}^0)$; $\rho, \rho_1 \in \hat{S}^0_+$; $z = \sigma + i\tau \in \Pi_0$; χ_τ – некоторое продолжение характера $\tilde{\rho}^{i\tau}$ группы $G(\rho)$ до характера группы G. Тогда $\rho^z = \rho^\sigma \chi_\tau | S$, и функция

$$F_{\rho^z\rho_1} : \chi \longmapsto F(\rho^z\rho_1\chi) = F_{\rho^\sigma\rho_1}(\chi_\tau\chi)$$

принадлежит $L^2(X)$.

Для $C \subset G$ и функции h на G положим $h_C(x) = h(x)$ при $x \in C$ и $h(x) = 0$ при $x \in G \setminus C$.

ЛЕММА 4.1. *Пусть $F \in H^2(\hat{S}^0)$, C – компактное подмножество группы $G(\rho) \cap G(\rho_1)$. Тогда для любого $g \in L^2(G)$ функция*

$$\beta(z) = \langle (\tilde{\rho}_1^{-1}\tilde{\rho}^{-z}\mathscr{F}F_{\rho^z\rho_1})_C, g\rangle \quad (z \in \Pi_0)$$

голоморфна в Π, *и для некоторой последовательности* $t_n \to 0$, $t_n > 0$, *имеем* $\beta(t_n) \to \beta(0)$.

Считая пока это техническое утверждение доказанным, заметим с другой стороны, что, поскольку $F_{\rho^z\rho_1}$ есть сдвиг функции $F_{\rho^\sigma\rho_1}$ на $\overline{\chi}_\tau$, то при $C \subset G(\rho) \cap G(\rho_1)$ имеем

$$(\tilde{\rho}_1^{-1}\tilde{\rho}^{-z}\mathscr{F}F_{\rho^z\rho_1})_C = (\tilde{\rho}_1^{-1}\tilde{\rho}^{-\sigma}\mathscr{F}F_{\rho^\sigma\rho_1})_C,$$

а потому эта функция не зависит от τ. Вместе с голоморфностью β это означает, что β постоянна на Π. Поэтому $\beta(1) = \lim_n \beta(t_n) = \beta(0)$, т.е. в силу произвольности C и g имеем $\tilde{\rho}_1^{-1}\tilde{\rho}^{-1}\mathscr{F}F_{\rho_1\rho} = \tilde{\rho}_1^{-1}\mathscr{F}F_{\rho_1\rho^0}$ на $G(\rho) \cap G(\rho_1)$. С учетом условия 2) определения 3.2 и произвольности ρ и ρ_1 отсюда следует, что

$$\tilde{\rho}_1^{-1}\mathscr{F}F_{\rho_1} = \tilde{\rho}^{-1}\mathscr{F}F_\rho \quad \text{на } G(\rho) \cap G(\rho_1).$$

Следовательно, полагая

$$f = \tilde{\rho}^{-1}\mathscr{F}F_\rho \quad \text{на } G(\rho),$$

получаем (измеримую) функцию f, корректно определенную на $\bigcup\{G(\rho) : \rho \in \hat{S}^0_+\} = G$ (лемма 2.1). При этом на $G(\rho)$

$$f\tilde{\rho} = \mathscr{F}F_\rho. \tag{4.1}$$

Применяя оператор $\mathscr{F}$ к равенству

$$F_\rho(\chi_0\chi) = F_\rho(\chi),$$

справедливому при $\rho \in \hat{S}^0_+$, $\chi \in X$ и всех χ_0 из аннулятора подгруппы $G(\rho)$, получаем, что функция $\mathscr{F}F_\rho$ равна нулю на $G \setminus G(\rho)$. Поэтому равенство (4.1) справедливо на всей группе G (напомним, что по определению $\tilde{\rho}(x) = 0$ при $x \in G \setminus G(\rho)$).

Покажем, что f равна нулю на $G \setminus S$. Если это не так, то найдутся компактное $A \subset G \setminus S$ положительной ν-меры и число $b > 0$ такие, что $|f(x)| > b$ при $x \in A$. Для некоторого $x_0 \in A$ имеем $\nu(U \cap A) > 0$ для любой окрестности U точки x_0. Пусть $\rho \in \hat{S}^0_+$ таково, что $\tilde{\rho}(x_0) > 1$ (см. условие (4) из § 3). Выберем окрестность U точки x_0 так, что $\tilde{\rho}(x)>k>1$ при всех $x\in U$. Тогда для любого натурального n

$$\int_G |f|^2\tilde{\rho}^{2n}d\nu \geq \int_{A\cap U} |f|^2\tilde{\rho}^{2n}d\nu \geq b^2k^{2n}\nu(A\cap U),$$

что противоречит неравенству

$$\|f\tilde{\rho}^n\|_{L^2(G)} = \|F_{\rho^n}\|_{L^2(X)} \leq \|F\|, \tag{4.2}$$

вытекающему из (4.1).

Из (4.2) следует также, что $f\in L^2(G)$. В самом деле, если $f\notin L^2(G)$, то при некотором компактном $D\subset S$ имеем $\int_D |f|^2d\nu\geq 2\|F\|$. Но тогда $\int_D |f|^2\rho^2d\nu > \|F\|$ для $\rho\in\hat{S}^0_+$ такого, что $\rho^2(x)>2/3$ при $x\in D$ (такое ρ существует снова в силу ([10], § 4.5)), что невозможно ввиду (4.2).

Итак, $f\in L^2(S)$. Так как $f\tilde{\rho}=f\rho$, то равенство (4.1) принимает вид $f\rho=\mathscr{F}F_\rho$ на G, откуда сразу следует, что $\mathscr{L}f=F$, т.е. оператор $\mathscr{L}$ сюръективен.

IV. Для завершения доказательства теоремы необходимо убедиться в справедливости леммы 4.1. Заметим, прежде всего, что в силу унитарности преобразования Фурье

$$\beta(z) = \int_G (\tilde{\rho}_1^{-1}\tilde{\rho}^{-z}\mathscr{F}F_{\rho^z\rho_1})_C\,\bar{g}\,d\nu = \int_X F_{\rho^z\rho_1}\,\overline{\mathscr{F}^{-1}(\tilde{\rho}_1^{-1}\tilde{\rho}^{-\bar{z}}g)_C}\,d\lambda.$$

Рассмотрим сначала функцию

$$\gamma_z(\chi) = \overline{\mathscr{F}^{-1}(\tilde{\rho}_1^{-1}\tilde{\rho}^{-\bar{z}}g)_C(\chi)} = \int_C \tilde{\rho}_1^{-1}\tilde{\rho}^{-z}\overline{g\chi}\,d\nu.$$

Тогда при $z\in\Pi_0$ имеем $\gamma_z\in L^2(X)$, для любого компакта $E\subset\Pi$ функция $\gamma_z(\chi)$ совместно измерима и ограничена по совокупности переменных на $E\times X$, и для любого $\chi\in X$ функция $z\longmapsto\gamma_z(\chi)$ голоморфна в Π (напр., по теореме Мореры).

Для каждого компактного $K\subset X$ положим

$$\beta_K(z) = \int_K F_{\rho^z\rho_1}\gamma_z\,d\lambda$$

и проверим применимость к этой функции теоремы Мореры в Π.

а) Возьмем ограниченную область $E\subset\Pi$. Для любого измеримого $A\subset K$, $z\in E$, в силу неравенства Коши–Буняковского, ограниченности $\gamma_z(\chi)$ на $E\times X$ и определения $H^2(\hat{S}^0)$ имеем

$$\int_A |F_{\rho^z\rho_1}\gamma_z|\,d\lambda \leq \sqrt{\lambda(A)}\,\|F_{\rho^z\rho_1}\gamma_z\|_{L^2(X)} \leq \mathrm{const}\sqrt{\lambda(A)}, \tag{4.3}$$

и β_K непрерывна на E в силу теоремы Витали о предельном переходе под знаком интеграла.

б) Пусть Δ – контур треугольника в Π. Неравенство (4.3) при $A=K$ показывает, что к интегралу

$$\int_\Delta dz\int_K F_{\rho^z\rho_1}\gamma_z\,d\lambda = \int_\Delta \beta_K(z)\,dz$$

применима теорема Фубини и, следовательно, он равен нулю.

Таким образом, β_K принадлежит пространству $H(\Pi)$ функций, голоморфных в Π. Далее, множество $\{\beta_K : K$ компактно в $X\}$ ограничено в $H(\Pi)$, т.к. для любого компакта $E\subset\Pi$ при $z\in E$ имеем

$$|\beta_K(z)| \le \int_X |F_{\rho^z\rho_1}\gamma_z|\,d\lambda \le \|F_{\rho^\sigma\rho_1}\|_{L^2(X)}\|\gamma_z\|_{L^2(X)} \le \|F\|\,\|(\tilde\rho_1^{-1}\tilde\rho^{-\bar z}g)_C\|_{L^2(G)} \le$$

$$\le \|F\|\,\|g\|_{L^2(G)}\max\{|\tilde\rho_1^{-1}(x)\tilde\rho^{-\bar z}(x)| : (x;z)\in C\times E\}.$$

Следовательно, направленность (β_K) содержит сходящуюся в $H(\Pi)$ поднаправленность $(\beta_{K'})$ (множество $\{K\}$ всех компактных подмножеств X считаем направленным по возрастанию). А т.к. $\beta_K(z)\to\beta(z)$ поточечно $(z\in\Pi)$, то $\beta\in H(\Pi)$.

Пусть, наконец, последовательность $t_n\to 0$, $t_n>0$, такова, что $F(\rho^{t_n}\rho_1\chi)\to F(\rho^0\rho_1\chi)$ для п.в. $\chi\in X$. Как и при доказательстве неравенства (4.3), получаем для $A\subset K$

$$\int_A |F_{\rho^{t_n}\rho_1} - F_{\rho^0\rho_1}|\,d\lambda \le \sqrt{\lambda(A)}\cdot 2\|F\|.$$

Поэтому снова по теореме Битали

$$\int_K |F_{\rho^{t_n}\rho_1} - F_{\rho^0\rho_1}|\,d\lambda \to 0$$

для любого компакта $K\subset X$. Следовательно,

$$\int_X |F_{\rho^{t_n}\rho_1} - F_{\rho^0\rho_1}|\,Q\,d\lambda \to 0 \tag{4.4}$$

для любой простой функции Q на X.

Далее,

$$\|\gamma_{t_n}-\gamma_0\|_{L^2(X)} = \|(\tilde\rho_1^{-1}\tilde\rho^{-t_n}g)_C - (\tilde\rho_1^{-1}\tilde\rho^0 g)_C\|_{L^2(G)} = \|\tilde\rho_1^{-1}g(\tilde\rho^{-t_n}-\tilde\rho^0)\|_{L^2(C)} \to 0. \tag{4.5}$$

Дважды применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$|\beta(t_n)-\beta(0)| \le \int_X |F_{\rho^{t_n}\rho_1}\gamma_{t_n} - F_{\rho^0\rho_1}\gamma_0|\,d\lambda \le \int_X |F_{\rho^{t_n}\rho_1}\gamma_{t_n} - F_{\rho^{t_n}\rho_1}\gamma_0|\,d\lambda +$$

$$+ \int_X |F_{\rho^{t_n}\rho_1}\gamma_0 - F_{\rho^0\rho_1}\gamma_0|\,d\lambda \le \|F\|\,\|\gamma_{t_n}-\gamma_0\|_{L^2(X)} + \int_X |F_{\rho^{t_n}\rho_1} - F_{\rho^0\rho_1}|\,|Q|\,d\lambda +$$

$$+ \int_X |F_{\rho^{t_n}\rho_1} - F_{\rho^0\rho_1}|\,|\gamma_0-Q|\,d\lambda \le \|F\|\,\|\gamma_{t_n}-\gamma_0\|_{L^2(X)} +$$

$$+ 2\|F\|\,\|\gamma_0-Q\|_{L^2(X)} + \int_X |F_{\rho^{t_n}\rho_1} - F_{\rho^0\rho_1}|\,|Q|\,d\lambda.$$

Соотношения (4.4) и (4.5) показывают, что, выбирая простую функцию Q, аппроксимирующую γ_0, а затем достаточно большое n, мы можем сделать последнюю сумму сколь угодно малой, что и завершает доказательство теоремы 4.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если полугруппа S с единицей удовлетворяет условиям (1)–(3), но не (4), то утверждение теоремы 4.1 неверно, в чем убеждает пример 3.2 а). В самом деле, пусть $G=\mathbb{Z}$, $S=\{0;2;3;4;\dots\}$. Поскольку полухарактеры полугруппы S суть в точности функции вида $n\to z^n$, где $|z|\le 1$, то

$$(\mathcal{L}f)(z) = f(0)+\sum_{n=2}^{\infty} f(n)z^n,$$

и $H^2(\hat{S}^0)=H^2(\mathbb{D})$, а потому $\mathscr{L}$ не сюръективно.

В то же время, условие выпуклости (4) использовалось лишь при доказательстве того, что f сосредоточена на S (см. часть III доказательства). Если полугруппа S с единицей удовлетворяет только условиям (1)-(3), то с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в доказательстве теоремы 4.1, получаем, что $f\in L^2(G)$, f сосредоточена на множестве $S_1=\{x\in G:\tilde{\rho}(x)\le 1$ при всех $\rho\in\hat{S}^0_+$ таких, что $x\in G(\rho)\}$, и в силу формулы (4.1) для $F\in H^2(\hat{S}^0)$ справедливо представление $F_\rho=\mathscr{F}^{-1}(f\tilde{\rho})$.

§ 5. Некоторые следствия теоремы Пэли-Винера

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что S есть конус в G.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Пространство $H^2(\hat{S}^0)$ гильбертово.*

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Для $F\in H^2(\hat{S}^0)$ существует граничная функция $F^*\in L^2(\mathrm{X})$ в том смысле, что F_{ρ_α} сходится к F^* в $L^2(\mathrm{X})$ для любой направленности $\rho_\alpha\in\hat{S}^0_+$, сходящейся к 1 в $\hat{S}$. При этом $F=\mathscr{L}\mathscr{F}F^*$, и отображение $F\longmapsto F^*$ есть изометрический изоморфизм пространства $H^2(\hat{S}^0)$ на подпространство*

$$H^2_S(\mathrm{X}) = \{\Phi\in L^2(\mathrm{X}):\mathscr{F}\Phi=0 \text{ на } G\setminus S\}$$

пространства $L^2(\mathrm{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F=\mathscr{L}f$, где $f\in L^2(S)$, $\rho_\alpha\to 1$ в $\hat{S}$. Тогда $f\rho_\alpha\to f$ в $L^2(G)$, а потому $F_{\rho_\alpha}=\mathscr{F}^{-1}(f\rho_\alpha)\to\mathscr{F}^{-1}f=F^*$ в $L^2(\mathrm{X})$. Следовательно, $F^*\in H^2_S(\mathrm{X})$, $F=\mathscr{L}f=\mathscr{L}\mathscr{F}F^*$. Последнее утверждение следствия вытекает из свойств операторов $\mathscr{F}$ и $\mathscr{L}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Пример 3.2 в) и следствие 5.2 показывают, что в случае, когда S линейно упорядочивает G, определение 3.2 равносильно определению Хелсона и Лауденслегера (см. [3]-[5]).

Следующая формула есть обобщение интегрального представления Коши-Бохнера [1] (см. также ([2], гл. III, теорема 3.2)).

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *Пусть $\psi\in L^2(S)\cap\hat{S}^0$, $\xi\in\mathrm{X}$. Определим ядро Коши-Бохнера равенством*

$$\mathscr{K}(\psi,\xi) = \overline{\mathscr{F}^{-1}(\bar{\psi})(\xi)}.$$

Тогда для любой функции $F\in H^2(\hat{S}^0)$ имеем

$$F(\psi) = \int_{\mathrm{X}}\mathscr{K}(\psi,\xi)F^*(\xi)d\lambda(\xi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi=\rho\chi$, $\rho\in\hat{S}^0_+\cap L^2(S)$, $\chi\in X$. Так как $\mathscr{F}F^*\cdot\rho\in L^1(S)$, то

$$F(\rho\chi) = \mathscr{L}(\mathscr{F}F^*)(\rho\chi) = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}F^*\cdot\rho)(\chi) = \int\mathscr{F}F^*\cdot\rho\chi\, d\nu = \int F^*\overline{\mathscr{F}^{-1}(\rho\bar{\chi})}\, d\lambda.$$

Из теоремы 4.1 легко также выводятся обобщения формул Пуассона и Сеге.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *Для $\psi\in L^1(S)\cap\hat{S}^0$, $\xi\in\mathrm{X}$ определим ядро Пуассона формулой*

$$\mathscr{P}(\psi,\xi) = |\mathscr{K}(\psi,\xi)|^2\Big/\int|\psi|^2d\nu.$$

Тогда для любой функции $F\in H^2(\hat{S}^0)$ имеем

$$F(\psi) = \int\mathscr{P}(\psi,\xi)F^*(\xi)d\lambda(\xi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $g\in L^1(S)$ преобразование Лапласа определяется следующим образом

$$(\mathscr{L}g)(\zeta) = \int g\zeta\, d\mu \quad (\zeta \in \hat{S}).$$

Тогда $|(\mathscr{L}g)(\zeta)| \leq \|g\|_{L^1(S)}$, и для любых $\rho, \rho_1 \in \hat{S}^0_+$, $\chi \in X$ функция $z \longrightarrow (\mathscr{L}g)(\rho^z \rho_1 \chi)$ голоморфна в П и непрерывна в +0 ([7], теорема 7.4). Поэтому при $F \in H^2(\hat{S}^0)$ имеем $F \cdot \mathscr{L}g \in H^2(\hat{S}^0)$. Если $\psi \in L^1(S) \cap \hat{S}^0$, то $\psi \in L^2(S)$, и по следствию 5.3

$$F(\psi) \cdot (\mathscr{L}g)(\psi) = \int \mathscr{K}(\psi,\xi) F^*(\xi)(\mathscr{F}^{-1}g)(\xi) d\lambda(\xi).$$

Полагая здесь $g = \overline{\psi}$, получаем требуемое равенство.

Множество $E \subset \hat{S}^0$ будем называть множеством единственности для пространства $H^2(\hat{S}^0)$, если для $F \in H^2(\hat{S}^0)$ из $F|E=0$ следует $F=0$. Для такого E рассмотрим пространство сужений $H^2(E) = H^2(\hat{S}^0)|E$, наделенное скалярным произведением

$$\langle F_1, F_2 \rangle_{H^2(E)} = \langle F'_1, F'_2 \rangle_{H^2(\hat{S}^0)},$$

где $F_j = F'_j | E$, $F'_j \in H^2(\hat{S}^0)$, $j = 1, 2$.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. *Пусть пересечение* $E = L^2(S) \cap \hat{S}^0$ *есть множество единственности для пространства* $H^2(\hat{S}^0)$. *Тогда функция*

$$\mathscr{S}(\zeta,\psi) = (\mathscr{L}\overline{\zeta})(\psi) \quad (\zeta, \psi \in E)$$

является воспроизводящим ядром (Сеге) пространства $H^2(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [13], лемма 5.1). Если $\zeta \in L^2(S)$, то $\mathscr{S}(\zeta,\cdot) = (\mathscr{L}\overline{\zeta})|E \in H^2(E)$. Для $F \in H^2(E)$ существует такая функция $f \in L^2(S)$, что $F = (\mathscr{L}f)|E$. Следовательно,

$$\langle F, \mathscr{S}(\zeta,\cdot)\rangle_{H^2(E)} = \langle \mathscr{L}f, \mathscr{L}\overline{\zeta}\rangle_{H^2(\hat{S}^0)} = \langle f, \overline{\zeta}\rangle_{L^2(S)} = (\mathscr{L}f)(\zeta) = F(\zeta),$$

что и завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Возможно, интересно было бы получить утверждения, аналогичные следствиям 5.3–5.5, без предположений о суммируемости полухарактеров с использованием гармонических мер μ_ζ из ([7], § 5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bochner S. *Group invariance of Cauchy's formula in several variables* // Ann. math. – 1944. – V.45. – № 3. – P.686–707.

2. Стейн И., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* – М.: Мир, 1974. – 336 с.

3. Helson H., Lowdenslager D. *Prediction theory and Fourier series in several variables* // Acta math. – 1958. – V.99. – № 3–4. – P.165–202.

4. Helson H., Lowdenslager D. *Prediction theory and Fourier series in several variables*. II // Acta math. – 1961. – V.106. – № 3–4. – P.175–213.

5. Rudin W. *Fourier analysis on groups.* – New York–London: Interscience, 1962. – 285 p.

6. Миротин А.Р. *Классы Харди на пространствах полухарактеров полугрупп* // XIV школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тез. докл. – Новгород, 1989. – Ч. II. – С.77.

7. Arens R.F., Singer I.M. *Generalized analytic functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V.81. – № 2. – P.379–393.

8. Rieffel M.A. *A characterization of commutative group algebras and measure algebras* // Trans. Amer. Math. Soc. - 1965. - V.116. - № 4. - P.32-65.

9. Kaufman R. *Semicharacters on subsemigroups of an abelian topological group* // Proc. Amer. Math. Soc. - 1966. - V. 17. - № 5. - P.1097-1098.

10. Teylor J.L. *Measure algebras* // Regional Conf. Ser. in Math. № 16. - Providence, 1973. - 108 p.

11. Миротин А.Р. *Положительные полухарактеры и преобразование Лапласа* // Укр. матем. журн. - 1992. - Т.44. - № 5. - С.647-653.

12. Глазман И.М., Любич Ю.И. *Конечномерный линейный анализ в задачах.* - М.: Наука, 1969. - 475 с.

13. Korányi A., Stein E.M. *H^2 spaces of generalized half-planes* // Studia math. - 1972. - T.44. - № 4. - P.379-388.

Гомельский государственный университет
(Беларусь)

Поступила
22.07.1993