А. Р. Миротин, М. А. Романова, Интерполяционные множества алгебры обобщенных аналитических функций, *Изв. вузов. Матем.*, 2007, номер 3, 51–59

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 3 (538)

УДК 517.986

А.Р. МИРОТИН, М.А. РОМАНОВА

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА АЛГЕБРЫ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Известная теорема Рудина–Карлесона (см., напр., [1], с. 125, 6.3.1) характеризует компактные подмножества окружности, интерполяционные для диск-алгебры, как множества нулевой меры Лебега. Однако уже в случае поликруга ситуация более сложна; для компакта на n-мерном торе ($n > 1$) наличие нулевой лебеговой меры (меры Хаара), продолжая быть необходимым, перестает быть достаточным условием интерполяционности (см. там же, теорема 6.3.4). Ряд достаточных условий, смысл которых в малости рассматриваемого компакта в том или ином смысле, для поликруга изложен в ([1], §§ 6.2, 6.3; [2]). Случай шара рассмотрен в [3], где имеются дальнейшие библиографические указания.

Интересное обобщение понятия аналитичности, тесно связанное с абстрактным гармоническим анализом, было предложено Р. Аренсом и И.М. Зингером в работе [4], которая породила обширную литературу. При этом основное внимание уделялось случаю архимедовой упорядоченности (см. [5], гл. VII; [6], гл. VIII). С современным состоянием этой области исследований можно познакомиться по монографии [7] и обзору [8] (см. также [9]).

Целью данной работы является исследование подмножеств компактных абелевых групп, интерполяционных для алгебры обобщенных аналитических по Аренсу–Зингеру функций. Строго говоря, понятие обобщенной аналитичности, принятое в данной работе, является несколько менее ограничительным, чем в [4], и следует подходу, предложенному в [10]. Попутно установлены некоторые свойства обобщенных аналитических функций, имеющие, возможно, самостоятельный интерес. Архимедова упорядоченность, как правило, не предполагается.

В работе доказана теорема о среднем для обобщенных аналитических функций и рассматривается свойство полиномиальной аппроксимации алгебры таких функций, даются удобные достаточные условия интерполяционности компактных множеств . Результаты статьи были частично анонсированы в [11].

1. Полухарактеры

Всюду ниже S — дискретная абелева полугруппа с сокращениями и единицей e, записываемая мультипликативно, $G = S^{-1}S$ — группа частных для S.

Полухарактером полугруппы S называется гомоморфизм ψ полугруппы S в мультипликативную полугруппу $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, не являющийся тождественным нулем. *Характерами* называются полухарактеры, равные по модулю единице.

Множество всех полухарактеров далее обозначается через $\widehat{S}$, а его подмножество, состоящее из неотрицательных полухарактеров, через $\widehat{S}_+$. Наделенные топологией поточечной сходимости это компактные топологические полугруппы по умножению с единицей 1 ($\widehat{S}$ компактно, напр., как пространство максимальных идеалов алгебры $l_1(S)$ [4]).

Компактную группу всех характеров полугруппы S будем обозначать X. Каждый характер $\chi \in X$ единственным образом продолжается до характера группы G по формуле $\chi(a^{-1}b) := \overline{\chi(a)}\chi(b)$ $(a, b \in S)$, что позволяет отождествлять X с группой характеров группы G (это специальный случай результата, установленного в [12]). Аналогично каждый полухарактер $\rho \in \widehat{S}_+$

единственным образом продолжается со своего носителя $S(\rho)$ до гомоморфизма $\widetilde{\rho}$ группы частных $G(\rho)$ полугруппы $S(\rho)$ в мультипликативную полугруппу положительных действительных чисел.

Согласно теореме 3.1 из [4] каждый полухарактер $\psi \in \widehat{S}$ может быть представлен в виде $\psi = \rho\chi$, где $\chi \in X$, а полухарактер $\rho \in \widehat{S}_+$ определяется по ψ однозначно.

С полухарактером $\rho \in \widehat{S}_+$ связаны подполугруппы $S(\rho) := \{s \in S : \rho(s) > 0\}$ и $S^\rho := \{s \in S : \rho(s) = 1\}$ полугруппы S, дополнение которых, если оно не пусто, является идеалом S. Такие идеалы называются *простыми*; это в точности те идеалы, дополнения которых являются подполугруппами полугруппы S, поскольку индикаторы (характеристические функции) дополнений простых идеалов принадлежат $\widehat{S}_+$. Простые идеалы, отличные от $S \setminus \{e\}$, будем называть *нетривиальными*. Через ω обозначим индикатор множества $\{e\}$. Наконец отметим,что степень ρ^0 по определению есть индикатор $S(\rho)$, и что $\rho^z \in \widehat{S} \setminus X$ при $\rho \in \widehat{S}_+$, $\rho \neq 1$, $\quad z \in \Pi$, где $\Pi := \{\operatorname{Re} z > 0\}$ ([4], § 7).

2. Алгебра обобщенных аналитических функций

Определение 1. Комплекснозначную функцию F на $\widehat{S} \setminus X$ будем называть *обобщенной аналитической*, если для любых полухарактеров ρ, ψ из $\widehat{S} \setminus X$, $\rho \geq 0$ отображение $z \mapsto F(\rho^z\psi)$ аналитично в открытой правой полуплоскости Π и непрерывно в $+0$.

Равномерную алгебру функций, непрерывных на $\widehat{S}$ и аналитических на $\widehat{S} \setminus X$, будем обозначать $A(\widehat{S})$. Для аддитивной полугруппы $\mathbb{Z}_+^n$ получаем поликруговую алгебру — равномерную алгебру функций, аналитических в открытом поликруге и непрерывных в его замыкании (в этом случае определение 1 гарантирует аналитичность по каждой переменной в отдельности).

Каждая аналитическая по Аренсу–Зингеру функция принадлежит $A(\widehat{S})$ (это можно доказать, как в [4], теорема 7.4). Следующий пример показывает, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 1. Если S — аддитивная полугруппа $\{0, 2, 3, \dots\}$, то функция $F(z) = z$ принадлежит $A(\widehat{S}) = A(\overline{\mathbb{D}})$, но по теореме 2.6 из [4] не аналитична по Аренсу–Зингеру, т. к. преобразование Фурье ее сужения на единичную окружность не сосредоточено на S.

Примерами функций из $A(\widehat{S})$ являются *аналитические полиномы*, т. е. функции на $\widehat{S}$ вида

$$p(\psi) := \sum_{i=1}^{n} c_i \widehat{a_i}(\psi),$$

где $c_i \in \mathbb{C}$, $\psi \in \widehat{S}$, $\widehat{a_i}(\psi) := \psi(a_i)$, $a_i \in S$.

Более общим образом, алгебре $A(\widehat{S})$ принадлежит *преобразование Лапласа* (= преобразование Гельфанда [4]) любой функции f из $l_1(S)$, т. е. $A(\widehat{S})$ содержит все функции вида

$$\widehat{f}(\psi) = \sum_{s \in S} f(s)\psi(s) \quad (\psi \in \widehat{S}).$$

В частности, зафиксируем весовую функцию $w : S \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющую условию $\sum\limits_{s \in S} w(s) = 1$. Тогда для любой ограниченной функции b на S функция $\psi \mapsto \langle \psi, b \rangle$, где $\psi \in \widehat{S}$, принадлежит $A(\widehat{S})$ (угловые скобки везде означают скалярное произведение в $l_2(S, w)$).

Теорема 1. *Пусть $F \in A(\widehat{S})$. Если полухарактеры $\rho_1, \rho_2 \in \widehat{S}_+$ удовлетворяют либо условию $S(\rho_1) = S(\rho_2)$, либо условию $S^{\rho_1} = S^{\rho_2}$, то справедливо равенство*

$$\int_X F(\rho_1\chi)d\chi = \int_X F(\rho_2\chi)d\chi,$$

где $d\chi$— нормированная мера Хаара группы X.

Доказательство. Предположим сначала, что $S(\rho_1) = S(\rho_2)$. Тогда функция

$$f(z) = \int_X F({\rho_1}^z \rho_2 \chi) d\chi$$

будет, очевидно, непрерывна в полуплоскости $\Pi = \{\operatorname{Re} z > 0\}$, а также в $+0$. Кроме того, она аналитична в Π, например, по теореме Мореры. В силу условий Коши–Римана для любого $\theta > 0$ $(z = x + iy)$ имеем

$$f'(\theta) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f(\theta)}{\partial y} = \frac{1}{i}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\biggl(\int_X F({\rho_1}^{\theta+ih}\rho_2\chi)d\chi - \int_X F({\rho_1}^{\theta}\rho_2\chi)d\chi\biggr).$$

Заметим теперь, что характер ρ_1^{ih} может быть продолжен с полугруппы $S(\rho_1)$ до некоторого характера χ_h полугруппы S (достаточно применить теорему Понтрягина к продолжению характера ρ_1^{ih} на группу частных полугруппы $S(\rho_1)$, а затем сузить полученный характер группы G на S). Поскольку $\rho_1^{\theta+ih}(s) = \rho_1^{\theta}(s)\chi_h(s)$ при всех $s \in S$, то $f'(\theta) = 0$ для любого $\theta > 0$ в силу инвариантности меры Хаара. Так как $\rho_1^0\rho_2 = \rho_2$, то с учетом непрерывности f в $+0$ имеем

$$0 = f(1) - f(0) = \int_X F(\rho_1\rho_2\chi)d\chi - \int_X F(\rho_2\chi)d\chi.$$

Симметрия между ρ_1 и ρ_2 завершает первую часть доказательства.

Предположим, наконец, что $S^{\rho_1} = S^{\rho_2}$. Обозначая через ω_1 индикатор этой подполугруппы и применяя результат первой части к полухарактерам ρ_i и ρ_i^n, имеем в силу теоремы Лебега о мажорированной сходимости $(i = 1, 2)$

$$\int_X F(\rho_i\chi)d\chi = \int_X F({\rho_i}^n\chi)d\chi \to \int_X F(\omega_1\chi)d\chi \quad (n \to \infty). \quad \square$$

Из предыдущей теоремы легко вытекает следующий вариант теоремы о среднем для функций из $A(\widehat{S})$. Напомним, что через ω обозначается индикатор одноточечного множества $\{e\}$, который принадлежит $\widehat{S}_+$, если (и только если) $S^{-1} \cap S = \{e\}$.

Теорема 2. *Пусть $S^{-1} \cap S = \{e\}$. Если существует такой полухарактер $\rho_1 \in \widehat{S}_+$, что $0 < \rho_1(s) < 1$ при всех $s \in S$, $s \neq e$, то при всех $F \in A(\widehat{S})$*

$$\int_X F(\chi)d\chi = F(\omega).$$

Доказательство. Заметим, что $S(1) = S(\rho_1)$, $S^{\rho_1} = S^{\omega}$. Следовательно,

$$\int_X F(1\cdot\chi)d\chi = \int_X F(\rho_1\chi)d\chi = \int_X F(\omega\chi)d\chi = F(\omega). \quad \square$$

Определение 2. Будем говорить, что алгебра $A(\widehat{S})$ *обладает свойством полиномиальной аппроксимации*, если произвольная функция F из $A(\widehat{S})$ может быть равномерно приближена на $\widehat{S}$ аналитическими полиномами.

Поликруговая алгебра обладает этим свойством. Следующая теорема показывает, в частности, что и в случае, когда полугруппа S архимедово и линейно упорядочивает группу G (что равносильно тому, что G есть подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$ и $S = G \cap \mathbb{R}_+$, см. [5]), алгебра $A(\widehat{S})$ тоже обладает свойством полиномиальной аппроксимации. В соответствии с [10] полугруппу S будем называть конусом в G, если для любого $x \in G$ найдется такой $\rho \in \widehat{S}_+$, что $\widetilde{\rho}(x) > 1$.

Теорема 3. *Пусть S — конус в G, $S^{-1} \cap S = \{e\}$, полугруппа S не содержит нетривиальных простых идеалов. Тогда алгебра $A(\widehat{S})$ обладает свойством полиномиальной аппроксимации.*

Доказательство. Заметим сначала, что множество $A(\widehat{S})$ содержится в пространстве $H^2(\widehat{S}\setminus X)$, определенном в [10], т. е. каждая функция $F\in A(\widehat{S})$ обладает следующими свойствами:

1) для каждого $\rho\in\widehat{S}_+\setminus X$ функция $F_\rho:\chi\mapsto F(\rho\chi)$ принадлежит $L^2(X)$ и нормы всех таких функций в $L^2(X)$ ограничены в совокупности;

2) для любых $\rho,\rho_1\in\widehat{S}_+\setminus X$ преобразования Фурье $\mathcal{F}F_{\rho_1}$ и $\mathcal{F}F_{\rho_1\rho^0}$ совпадают на группе частных полугруппы $S(\rho)$;

3) F обобщенная аналитическая в смысле определения 1.

Действительно, в доказательстве нуждается лишь свойство 2, которое достаточно проверить для единственного полухарактера $\rho=\omega$, принимающего нулевые значения. Но в этом случае оно сразу следует из теоремы 2, примененной к функции $\psi\mapsto F(\rho_1\psi)$.

Если теперь положим $F^*=F|X$, то следствие 5.2 из [10] покажет, что спектр (т. е. носитель преобразования Фурье) функции F^* содержится в S. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдется аналитический полином p такой, что

$$|p(\chi)-F(\chi)|<\varepsilon \;\text{ для всех }\; \chi\in X.$$

Пусть $\Phi(\psi)=p(\psi)-F(\psi)$ $(\psi\in\widehat{S})$, и предположим, что $\max\limits_{\widehat{S}}|\Phi|=|\Phi(\psi_1)|$, где $\psi_1=\rho_1\chi_1\in\widehat{S}\setminus X$. Здесь $\rho_1\neq 1$, кроме того, можно считать, что $\rho_1\neq\omega$, поскольку в силу теоремы 2 $|\Phi(\omega)|\le\max\limits_X|\Phi|$. Обозначим через $\varkappa$ отображение множества $\Pi\cup\{0\}$ в $\widehat{S}$, заданное формулой $\varkappa(z)=\rho_1^z\chi_1$. Тогда модуль аналитической в Π функции $\Phi\circ\varkappa$ достигает своего максимума в точке $z=1$, а потому $\Phi\circ\varkappa=\mathrm{const}$ в Π. С учетом непрерывности получаем $\Phi\circ\varkappa(0)=\Phi\circ\varkappa(1)$, т. е. $\Phi(\psi_1)=\Phi(\chi_1)$, т. к. $\rho_1^0=1$. Таким образом,

$$|p(\psi)-F(\psi)|<\varepsilon \text{ для всех } \psi\in\widehat{S}. \quad \square$$

Теорема 4. *Пусть алгебра $A(\widehat{S})$ обладает свойством полиномиальной аппроксимации. Тогда пространство максимальных идеалов $M_{A(\widehat{S})}$ этой алгебры гомеоморфно $\widehat{S}$, а ее граница Шилова $\partial_{A(\widehat{S})}$ гомеоморфна X.*

Доказательство. Для $\varphi\in M_{A(\widehat{S})}$ положим $\psi(a):=\varphi(\widehat{a})$, $a\in S$. Тогда $\psi\in\widehat{S}$, причем $\widehat{a}(\psi)=\varphi(\widehat{a})$. Если $p=\sum\limits_{i=1}^n c_i\widehat{a}_i$ $(c_i\in\mathbb{C},\ a_i\in S)$ — аналитический полином, то

$$\varphi(p)=\sum_{i=1}^n c_i\varphi(\widehat{a}_i)=\sum_{i=1}^n c_i\widehat{a}_i(\psi)=p(\psi).$$

Для произвольной функции F из $A(\widehat{S})$ имеем $F=\lim\limits_{n\to\infty}p_n$, где p_n — аналитические полиномы. Поэтому

$$\varphi(F)=\lim_{n\to\infty}\varphi(p_n)=\lim_{n\to\infty}p_n(\psi)=F(\psi).$$

Рассмотрим отображение $\Lambda:\widehat{S}\longrightarrow M_{A(\widehat{S})}$, которое каждому ψ из $\widehat{S}$ сопоставляет комплексный гомоморфизм φ_ψ из $M_{A(\widehat{S})}$ по формуле $\varphi_\psi(F)=F(\psi)$. Тогда Λ — гомеоморфизм. Действительно, если $\psi_1,\psi_2\in\widehat{S}$, $\psi_1\neq\psi_2$, то $\varphi_{\psi_1}(\widehat{a})\neq\varphi_{\psi_2}(\widehat{a})$ для некоторого $a\in S$, и отображение Λ является сюръективным по доказанному выше. Таким образом, оно биективно. Для доказательства его непрерывности рассмотрим последовательность $\psi_n\in\widehat{S}$, сходящуюся к $\psi\in\widehat{S}$. Тогда $\Lambda(\psi_n)$ сходится к $\Lambda(\psi)$, т. к. при $F\in A(\widehat{S})$ имеем $\varphi_{\psi_n}(F)\to\varphi_\psi(F)$ в силу непрерывности F. Поскольку $\widehat{S}$ — компакт, то Λ — гомеоморфизм.

Докажем второе утверждение теоремы. Покажем сначала, что $\partial_{A(\widehat{S})}\subset X$. Для этого достаточно доказать, что X является границей. Если это не так, то

$$M:=\max_{\widehat{S}}|F|>m:=\max_X|F|$$

для некоторой функции $F \in A(\widehat{S})$. Для $\varepsilon < (M-m)/2$ подберем аналитический полином p таким образом, чтобы $\max\limits_{\widehat{S}} |F-p| < \varepsilon$. Тогда $|p(\chi)| < |F(\chi)| + \varepsilon \leq m + \varepsilon$ при всех $\chi \in X$. Так как любой комплексный гомоморфизм из границы Шилова алгебры $l_1(S)$ продолжается до комплексного гомоморфизма содержащей ее алгебры $l_1(G)$, то X содержит границу Шилова алгебры $l_1(S)$. А т. к. для любого $\zeta \in \widehat{S}$ отображение $f \mapsto \widehat{f}(\zeta)$ есть комплексный гомоморфизм алгебры $l_1(S)$, то $M_{l_1(S)} \supseteq \widehat{S}$ (действительно, имеет место равенство). Поэтому $\max\limits_{\widehat{S}} |p| = \max\limits_{X} |p|$ (аналитические полиномы являются преобразованиями Гельфанда функций из $l_1(S)$ с конечными носителями). Таким образом, $\max\limits_{\widehat{S}} |p| \leq m + \varepsilon$.

С другой стороны, $|p(\psi)| > |F(\psi)| - \varepsilon$ при всех $\psi \in \widehat{S}$, а потому $\max\limits_{\widehat{S}} |p| \geq M - \varepsilon$, что противоречит выбору ε. Это доказывает требуемое включение.

Наконец, т. к. алгебра $A(\widehat{S})$ инвариантна относительно естественного действия группы X (умножения на характеры являются автоморфизмами полугруппы $\widehat{S}$), то такова и ее граница Шилова, а потому эта граница совпадает с X. $\square$

Замечание. Утверждение теоремы может быть выведено также из результатов работы [4].

Ниже $A(X)$ будет обозначать равномерную алгебру, состоящую из сужений на X функций из $A(\widehat{S})$.

Следствие. Пусть алгебра $A(\widehat{S})$ обладает свойством полиномиальной аппроксимации. Тогда она изометрически изоморфна алгебре $A(X)$.

Действительно, требуемым изоморфизмом будет отображение сужения на X. $\square$

3. Интерполяционные множества для алгебры $A(\widehat{S})$

Далее через $\mathcal{M}(X)$ будем обозначать алгебру всех регулярных комплексных борелевских мер на компакте X. Для меры $\nu \in \mathcal{M}(X)$ запись $\nu \perp A(\widehat{S})$ будет означать, что $\displaystyle\int F d\nu = 0$ для всех $F \in A(\widehat{S})$. Через $\mathcal{M}_\omega$ обозначим множество всех вероятностных мер из $\mathcal{M}(X)$, представляющих функционал $F \mapsto F(\omega)$, $F \in A(\widehat{S})$. Теорема 2 в точности означает, что мера Хаара σ группы X принадлежит $\mathcal{M}_\omega$.

По аналогии со случаем шара ([3], гл. 10) введем шесть символов (I), (PI), (Z), (P), (N), (TN) для обозначения свойств, которыми может обладать компакт $K \subset X$ по отношению к алгебре $A(\widehat{S})$.

K будем называть (I)-*множеством* (*интерполяционным множеством*), если любая комплекснозначная непрерывная функция на K допускает продолжение до функции из $A(\widehat{S})$.

K будем называть (PI)-*множеством* (*пик-интерполяционным множеством*), если для любого $g \in C(K), g \not\equiv 0$, существует функция $h \in A(\widehat{S})$ такая, что $g(\chi) = h(\chi)$ для всякого $\chi \in K$, а для любого $\psi \in \widehat{S} \setminus K$ выполняется неравенство $|h(\psi)| < \|g\|_K$, где $\|g\|_K = \max\limits_K |g|$.

K будем называть (Z)-*множеством* (*нулевым множеством*), если существует $f \in A(\widehat{S})$ такая, что $f(\chi) = 0$ для любого $\chi \in K$, и $f(\psi) \neq 0$ для любого $\psi \in \widehat{S} \setminus K$.

K будем называть (P)-*множеством* (*множеством пика*), если найдется функция $h \in A(\widehat{S})$ такая, что $h(\chi) = 1$ для любого $\chi \in K$, и $|h(\psi)| < 1$ для любого $\psi \in \widehat{S} \setminus K$ (h — пик-функция для K).

K будем называть (N)-*множеством* (*нуль-множеством для любой меры ν на X, аннулирующей $A(\widehat{S})$*), если равенство $|\nu|(K) = 0$ выполняется для любой меры $\nu \in \mathcal{M}(X)$ такой, что $\nu \perp A(\widehat{S})$.

K будем называть (TN)-*множеством* (*вполне нулевым множеством*), если равенство $\mu(K) = 0$ выполняется для любой представляющей меры $\mu \in \mathcal{M}_\omega$.

Аналогичные понятия (кроме свойства (TN)) можно ввести и для алгебры $A(X)$.

Теорема 5. *Пусть алгебра $A(\widehat{S})$ обладает свойством полиномиальной аппроксимации. Для любого компакта $K \subset X$ типа G_δ такого, что дополнение $\widehat{S} \setminus K$ односвязно, свойства (I), (PI), (Z), (P), (N) равносильны и влекут свойство (TN).*

Доказательство. Равносильность будем доказывать по схеме

$$(I) \Rightarrow (N) \Rightarrow (PI) \Rightarrow (Z) \Rightarrow (P) \Rightarrow (I).$$

$(I) \Rightarrow (N)$. Если S счетно, то любой элемент $\chi \in X$ будет точкой пика для $A(\widehat{S})$ (а потому и для $A(X)$), что показывает пик-функция

$$\psi \mapsto 1/2(1 + \langle \psi, \chi \rangle),$$

построенная для веса $w > 0$. Так как (I)-множество K алгебры $A(\widehat{S})$ будет (I)-множеством и для алгебры $A(X)$, то требуемая импликация сразу следует из теоремы Варопулоса ([3], теорема 10.2.2), примененной к алгебре $A(X)$. В случае произвольного S можно воспользоваться методом из ([1], с. 114–115).

$(N) \Rightarrow (PI)$. В силу следствия теоремы 4 отображение сужения на X есть изометрический изоморфизм алгебр $A(\widehat{S})$ и $A(X)$, а потому $A(X)$ замкнута в $C(X)$. Теорема Бишопа ([3], теорема 10.3.1), примененная к алгебре $A(X)$, показывает теперь, что каждое (N)-множество K будет (PI)-множеством для алгебры $A(X)$, а следовательно, и для $A(\widehat{S})$.

$(PI) \Rightarrow (Z)$. Это утверждение очевидно.

$(Z) \Rightarrow (P)$. Пусть F — функция из $A(\widehat{S})$ с множеством нулей K, причем $\max\limits_{\widehat{S}} |F| < 1$. Так как $\widehat{S} \setminus K$ односвязно, то F обладает непрерывным логарифмом g на этом множестве, который, очевидно, аналитичен на $\widehat{S} \setminus X$. Кроме того, $\operatorname{Re} g < 0$ и $\operatorname{Re} g(\psi) \to -\infty$, когда ψ стремится к некоторой точке из K. Следовательно, функция $h = g/(g-1)$ на $\widehat{S} \setminus K$ и $h = 1$ на K принадлежит $A(\widehat{S})$ и имеет пик на K.

$(P) \Rightarrow (I)$. Пусть $R : A(\widehat{S}) \to C(K)$ — отображение сужения на K, $A_K = \operatorname{Im} R$. Нужно доказать, что $A_K = C(K)$, если K — (P)-множество.

Если J — идеал функций из $A(\widehat{S})$, равных нулю на K, то фактор-алгебра $A(\widehat{S})/J$ изометрически изоморфна A_K (требуемым изоморфизмом служит $F + J \mapsto F|K$ (см., напр.,[13], с. 120)), а потому A_K замкнуто в $C(K)$.

Покажем, что M_{A_K} можно отождествить с K. Если $\varphi \in M_{A_K}$, то $\varphi R \in M_{A(\widehat{S})}$, и, как показано в доказательстве теоремы 4, существует такой $\psi \in \widehat{S}$, что $(\varphi R)(F) = F(\psi)$ для любого $F \in A(\widehat{S})$. Если h — пик-функция для K, то Rh есть единица алгебры A_K, а потому $h(\psi) = (\varphi R)(h) = 1$. Значит, $\psi \in K$. Если $g \in A_K$, то $g = RF$ для некоторого $F \in A(\widehat{S})$, и, следовательно,

$$\varphi(g) = (\varphi R)(F) = F(\psi) = g(\psi),$$

причем ψ с таким свойством единственно, т. к. A_K разделяет точки K. Отождествляя φ с ψ, получаем равенство $M_{A_K} = K$.

Для $a \in S$ положим теперь $\widehat{a}_K := \widehat{a}|K$. Поскольку элементы $\widehat{a}_K$ не обращаются в нуль на $M_{A_K} = K$ $(|\widehat{a}_K| = 1)$, то они обратимы в алгебре A_K, причем $(\widehat{a}_K)^{-1} = \overline{\widehat{a}_K}$. Поэтому подалгебра в A_K, порожденная элементами $\widehat{a}_K, \overline{\widehat{a}_K}$, $a \in S$, симметрична. Так как она, очевидно, разделяет точки K, то $A_K = C(K)$ по теореме Вейерштрасса–Стоуна.

Покажем, наконец, что $(P) \Rightarrow (TN)$. Действительно, если h — пик-функция для K, то для любого натурального n и для любой меры $\mu \in \mathcal{M}_\omega$ имеем

$$h^n(\omega) = \int_X h^n(\chi) d\mu(\chi).$$

Полагая здесь $n \to \infty$, получаем $0 = \mu(K)$. $\square$

Теорема 5 обобщает известные результаты для поликруга ([1], теорема 6.1.2). Как и в [1], получаем также

Следствие 1. Любое компактное G_δ-подмножество (Z)-множества в X будет (Z)-множеством в X. Любое компактное G_δ-подмножество множества X, являющееся счетным объединением (PI)-множеств, будет (PI)-множеством в X.

Действительно, оба свойства очевидны для (N)-множеств.

Следствие 2. $\sigma(K) = 0$ для любого (I)-множества K (σ — мера Хаара группы X).

Это следует из включения $\sigma \in \mathcal{M}_\omega$ (теорема 2).

Для любого $\zeta \in \widehat{S}$ существует такая регулярная борелевская мера m_ζ на X, что справедливо следующее обобщение формулы Пуассона [4]:

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_X \widehat{f} dm_\zeta \quad (f \in l_1(S)).$$

При этом имеет место

Следствие 3. $m_\zeta(K) = 0$ для любого (I)-множества K, если $\zeta \in \widehat{S} \setminus K$.

Доказательство. Пусть K — множество нулей функции $F \in A(\widehat{S})$. Если $m_\zeta(K) > 0$, то

$$\int_X \log |F| dm_\zeta = -\infty,$$

и в силу теоремы 3.5 из [14] $F(\zeta) = 0$, что противоречит выбору ζ. $\square$

С помощью теоремы 5 можно описать (I)-множества в X в случае, когда S линейно и архимедово упорядочивает группу G. При этом, не нарушая общности, будем считать, что G есть подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$, $S = G \cap \mathbb{R}_+$. Тогда $\mathbb{R}$ изоморфна некоторой подгруппе группы X, которую тоже обозначим $\mathbb{R}$ (см. [5], гл. 7, § 4). В этой ситуации групповую операцию в X принято записывать аддитивно.

Следствие 4 (ср. [5], сс. 254, 255). Пусть S линейно и архимедово упорядочивает группу G. Компактное G_δ-подмножество K множества X будет (I)-множеством тогда и только тогда, когда для любого $\chi \in X$ пересечение $K \cap (\chi + \mathbb{R})$ имеет нулевую линейную меру.

Доказательство. Алгебра $A(\widehat{S})$ обладает свойством полиномиальной аппроксимации, например, по теореме 3 (условия этой теоремы выполняются в силу свойств полухарактеров полугруппы S, установленных в ([15], с. 449). Тогда $M_{A(\widehat{S})} = \widehat{S}$. Покажем, что для любого подмножества $K \subset X$ множество $\widehat{S} \setminus K$ односвязно. Известно ([5], теорема 7.4.1), что $\widehat{S}$ можно отождествить с пространством

$$\operatorname{con} X := X \times [0,1]/X \times \{0\},$$

и при этом группа X отождествляется с $X \times \{1\}$. Точку из $\operatorname{con} X$, отвечающую $X \times \{0\}$, обозначим ω. Заметим, что тождественное отображение множества $\operatorname{con} X \setminus K$ гомотопно постоянному отображению этого множества в ω. Требуемую гомотопию дает отображение $f_t : \operatorname{con} X \to \operatorname{con} X$, определяемое формулой $f_t(\chi, r) = (\chi, tr)$ при $t, r \in [0,1]$, $\chi \in X$. Таким образом, множество $\operatorname{con} X \setminus K$ стягиваемо, а потому односвязно. В силу теоремы 5 свойства (I) и (N) равносильны, и осталось воспользоваться следствием 7.5.2 из [5]. $\square$

Следствие 5. Пусть замкнутая подгруппа $H \subset X$ такова, что группа X/H метризуема. Тогда H будет (I)-множеством, если и только если множество $H^\perp \cap S$ (рассматриваемое как множество функций на X/H) разделяет точки X/H.

Это вытекает из теорем 5, 6 в [16].

Теорема 5 позволяет также установить аналог теоремы Деви-Эксендала (см. [3], теорема 10.4.3), дающий достаточный признак интерполяционности множества в терминах его покрытий. Для $\zeta \in X$, $\delta > 0$ и веса $w > 0$ положим

$$V(\zeta, \delta) = \{\chi \in X : |1 - \langle \chi, \zeta \rangle| < \delta\}$$

(угловые скобки обозначают, как и раньше, скалярное произведение в $l_2(S, w)$).

Теорема 6. *В условиях теоремы* 5 *предположим, что* S *счетно, и компакт* K *обладает также следующим свойством*:

для любого $\varepsilon > 0$ *существует конечное число множеств* $V(\zeta_i, \delta_i)$, $i = 1, \ldots, m$, *с* $\zeta_i \in K$ *и* $\sum \delta_i < \varepsilon$ *таких, что*

$$K \subset V(\zeta_1, \delta_1) \cup \cdots \cup V(\zeta_m, \delta_m).$$

Тогда K *есть* (PI)*-множество.*

Действительно, по существу повторяя доказательство теоремы Деви–Эксендала, получаем, что K является (N)-множеством. $\square$

При $S = \mathbb{Z}_+^n$ теорема 6 есть ослабленный вариант теоремы Форелли ([1], с. 126, следствие).

Укажем также следующее применение теоремы 6. Ниже $I = [0, 1]$, w — фиксированный положительный вес на счетной полугруппе S.

Определение 3. Отображение $\gamma : I \to l_2(S, w)$ класса C^1 будем называть *комплексно-касательной кривой на* X, если $\gamma(I) \subset X$, и при всех $t \in I$

$$\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Теорема 7. *Пусть* S *счетно. В условиях теоремы* 5 *образ* $K = \gamma(I)$ *комплексно-касательной кривой* γ *на* X *будет* (PI)*-множеством.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что $\gamma(I)$ удовлетворяет условию теоремы 6. Пусть $M > \max\limits_{s,t \in I} |\langle \gamma'(s), \gamma'(t) \rangle|$. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим разбиение $\{a_i\}$ отрезка I на $m > M/\varepsilon$ равных частей, и для любого $t \in I$ выберем $a_i \leq t$ так, что $t - a_i \leq 1/m$. Теорема будет доказана, если установим, что $\gamma(t) \in V(\gamma(a_i), \delta)$, где $\delta = M/m^2$. Но это вытекает из следующей оценки:

$$\begin{aligned}
|1 - \langle \gamma(t), \gamma(a_i) \rangle| = |\langle \gamma(t), \gamma(t) - \gamma(a_i) \rangle| = \left| \Big\langle \gamma(t), \int_{a_i}^t \gamma'(s) ds \Big\rangle \right| = \\
= \left| \int_{a_i}^t \langle \gamma(t), \gamma'(s) \rangle ds \right| = \left| \int_{a_i}^t \langle \gamma(t) - \gamma(s), \gamma'(s) \rangle ds \right| = \\
= \left| \int_{a_i}^t \Big\langle \int_s^t \gamma'(r) dr, \gamma'(s) \Big\rangle ds \right| = \left| \int_{a_i}^t ds \int_s^t \langle \gamma'(r), \gamma'(s) \rangle dr \right| \leq \\
\leq \int_{a_i}^t ds \int_s^t |\langle \gamma'(r), \gamma'(s) \rangle| dr < M(t - a_i)^2 \leq \delta. \quad \square
\end{aligned}$$

Отметим, что не всякая кривая на X класса C^1 является (I)-множеством, в чем нас убеждает следующий

Пример 2. Пусть существует такой полухарактер $\rho \in \widehat{S}_+$, что $1 > \rho(s) > 0$ при всех $s \in S$, $s \neq e$. Тогда отображение $\gamma : I \to l_2(S, w)$, заданное формулой $\gamma(t) = \rho^{it}$, есть кривая класса C^1 на X, но $\gamma(I)$ не является (Z)-множеством. Действительно, пусть $F \in A(\widehat{S})$, $F|\gamma(I) = 0$. Тогда функция $f(z) := F(\rho^z)$ будет аналитической в открытой правой полуплоскости, непрерывной в ее замыкании и равной нулю на отрезке iI. Следовательно, $f = 0$ по граничной теореме единственности.

Литература

1. Рудин У. *Теория функций в поликруге.* – М.: Мир, 1974. – 160 с.
2. Вальский Р.Э. *О мерах, ортогональных аналитическим функциям в* $\mathbb{C}^n$ // ДАН СССР. – 1971. – Т. 198. – № 3. – С. 502–505.
3. Рудин У. *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
4. Arens R, Singer I.M. *Generalised analytic functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V. 81. – № 2. – P. 379–393.
5. Гамелин Т. *Равномерные алгебры.* – М.: Мир, 1973. – 336 с.
6. Rudin W. *Fourier analysis on groups.* – N. Y.: Interscience Publishers, 1962. – 285 p.
7. Tonev T. *Big planes, boundaries and function algebras.* – North-Holland, Amsterdam, 1992. – 232 p.
8. Tonev T., Grigoryan S.A. *Analytic functions on compact groups and their applications to almost periodic functions* // Function spaces (K. Jarosz, ed.), Contemporary Math. – 2003. – V. 328. – P. 299–322.
9. Григорян С.А. *Обобщенные аналитические функции* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57. – № 1. – С. 147–166.
10. Миротин А.Р. *Теорема Пэли–Винера для конусов в локально компактных абелевых группах* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 3. – С. 35–44.
11. Миротин А.Р., Романова М.А. *Пространство максимальных идеалов алгебры обобщенных аналитических функций* // Творчество молодых. 2004. Сб. научных работ. – Гомель, 2004. – С. 82–84.
12. Mirotin A.R. *Every invariant measure semigroup contanes an ideal which is embeddable in a group* // Semigroup Forum. – 1999. – V. 59. – № 3. – P. 354–361.
13. Бурбаки Н. *Спектральная теория.* – М.: Мир, 1972. – 184 с.
14. Arens R. *The boundary integral of* $\log|\phi|$ *for generalized analytic functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1957. – V. 86. – № 1. – P. 57–69.
15. Hoffman K. *Boundary behevior of generalized analytic functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1958. – V. 87. – P. 447–466.
16. Grigoryan S.A., Tonev T. *Shift-invariant algebras on groups* // Contemporary Math. – 2004. – V. 363. – P. 111-127.

Гомельский государственный университет

Поступила 14.06.2005