А. Р. Миротин, Многомерное $\mathscr{T}$-исчисление от генераторов C_0-полугрупп, *Алгебра и анализ*, 1999, том 11, выпуск 2, 142–169

Алгебра и анализ
Том 11 (1999), вып. 2

МНОГОМЕРНОЕ $\mathcal{T}$-ИСЧИСЛЕНИЕ ОТ ГЕНЕРАТОРОВ C_0-ПОЛУГРУПП

© А. Р. Миротин

Пусть $\mathcal{T}_n$ есть класс неположительных дифференцируемых функций, определенных на $(-\infty; 0)^n$, все частные производные которых абсолютно монотонны. Для функции ψ из $\mathcal{T}_n$ и набора A, состоящего из n коммутирующих генераторов равномерно ограниченных C_0-полугрупп (голоморфных полугрупп), определяется оператор $\psi(A)$, также являющийся генератором равномерно ограниченной C_0-полугруппы (голоморфной полугруппы), и изучается возникающее при этом функциональное исчисление. Рассматриваются примеры.

§1. Введение

В настоящей работе строится функциональное исчисление („$\mathcal{T}_n$-исчисление“) от нескольких коммутирующих генераторов C_0-полугрупп на основе класса функций $\mathcal{T}_n$. Класс $\mathcal{T}_n$ состоит из неположительных дифференцируемых функций на $(-\infty; 0)^n$, все частные производные которых абсолютно монотонны. Для функций ψ из $\mathcal{T}_n$ и набора $A = (A_1; \dots; A_n)$ попарно коммутирующих генераторов равномерно ограниченных C_0-полугрупп (голоморфных полугрупп) определяется оператор $\psi(A)$, также являющийся генератором равномерно ограниченной C_0-полугруппы (голоморфной полугруппы), и изучается возникающее функциональное исчисление. Отметим, что класс $\mathcal{T}_1$ введен Шенбергом [1] и содержит ряд важных функций, в том числе (с точностью до аффинных замен переменных) положительные дробные степени, логарифм и арккосинус. При этом $\mathcal{T}_1$-исчисление содержит значительную часть теории дробных степеней операторов, и некоторые доказательства и в этом случае являются новыми. Как и всякое функциональное исчисление, $\mathcal{T}_n$-исчисление позволяет использовать при изучении операторов методы теории функций. В частности, на этом пути получается новое доказательство формулы Като для резольвенты дробной степени оператора, пригодное для обобщения на функции класса $\mathcal{T}_n$. Построенное исчисление по существу единственно, согласовано с n-мерным исчислением Хилле-Филлипса ([2, гл. XV, XVI]) и обладает хорошими аппаратными свойствами. Оно позволяет распознавать и строить генераторы C_0-полугрупп

Ключевые слова: C_0-полугруппа, голоморфная полугруппа, генератор полугруппы, функциональное исчисление (операторное исчисление).

и голоморфных полугрупп, а также вычислять генераторы некоторого класса C_0-полугрупп, включающего, например, бесселев потенциал. Отметим также, что многомерное исчисление оказалось полезным при изучении одномерного.

§2. Класс $\mathcal{T}_n$

Определение 2.1. Функция $\psi : (-\infty; 0)^n \to (-\infty; 0]$ принадлежит классу $\mathcal{T}_n$, если она дифференцируема и все ее частные производные первого порядка абсолютно монотонны на $(-\infty; 0)^n$.

Последнее равносильно тому, что $\partial^\alpha \psi \geqslant 0$ для любого мультииндекса $\alpha \neq 0$.

Следующее предложение, при $m = n = 1$ принадлежащее Шенбергу [1], повидимому, известно. Мы приводим его здесь, так как не располагаем удобным источником для ссылок.

Предложение 2.1. *Пусть m и n — натуральные числа. Для функции ψ : $(-\infty; 0)^n \to (-\infty; 0]$ следующие утверждения равносильны:*

1) $\psi \in \mathcal{T}_n$;

2)

$$\psi(s) = c_0 + c_1 \cdot s + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} - 1) d\mu(u) \tag{2.1}$$

при $s \in (-\infty; 0)^n$, где $c_0 = \psi(-0) := \lim_{s \to -0} \psi(s)$, а c_1 из $\mathbb{R}^n_+$ и положительная мера μ на $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ определяются однозначно (здесь и ниже точкой мы обозначаем скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$; запись $s \to -0$ означает, что $s_1 \to -0, \dots, s_n \to -0$);

3) *для любой абсолютно монотонной на $(-\infty; 0)^m$ функции f сложная функция $(s, r) \mapsto f(\psi(s), r)$ абсолютно монотонна на $(-\infty; 0)^{m+n-1}$ ($s \in (-\infty; 0)^n, r \in (-\infty; 0)^{m-1}$).*

Доказательство. Утверждение $1 \Rightarrow 3$ легко проверяется. Для доказательства импликации $3 \Rightarrow 1$ достаточно рассмотреть случай $f(x) = e^{vx_1}$, $v \geqslant 0$ (ср. [3, с. 257–258]).

Утверждение $2 \Rightarrow 1$ доказывается дифференцированием под знаком интеграла в (2.1).

Для доказательства импликации $1 \Rightarrow 2$ установим прежде всего, что функция $\psi_1 = -\psi$ принадлежит множеству $\mathcal{A}((-\infty; 0)^n)$ вполне альтернирующих функций в смысле [4, с. 263]. В самом деле, поскольку $\psi \in \mathcal{T}_n$, то для любых x, $h \in (-\infty; 0)^n$ найдется такое $c \in (-\infty; 0)^n$, что

$$\nabla_h \psi_1(x) := \psi_1(x) - \psi_1(x + h) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_1(c)}{\partial s_i} h^i \leqslant 0.$$

Аналогично при x, h_1, $h_2 \in (-\infty; 0)^n$ имеем

$$\nabla_{h_1}\nabla_{h_2}\psi_1(x) = -\sum_{i_1=1}^{n}\frac{\partial}{\partial s_{i_1}}(\nabla_{h_2}\psi_1)(c)h_1^{i_1} = -\sum_{i_1=1}^{n}\left(\nabla_{h_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial s_{i_1}}\right)(c)h_1^{i_1}$$
$$= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\frac{\partial^2\psi_1(c_1)}{\partial s_{i_1}\partial s_{i_2}}h_1^{i_1}h_2^{i_2} \leqslant 0$$

и так далее. Поскольку $\mathcal{A}((-\infty;0)^n) = \mathcal{A}_0((-\infty;0)^n)$ ([4, с. 265]), то в силу теоремы 8.2.4 из [4], примененной к функции $-\psi$, имеем при любых h, $k \in (-\infty, 0)^n$

$$-\psi(h) + \psi(k) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}} (e^{u\cdot k} - e^{u\cdot h})d\mu(u) + c_1\cdot h - c_1\cdot k, \tag{2.2}$$

где все $c_1^i \leqslant 0$, μ — положительная мера на $\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$, причем c_1 и μ определяются по ψ однозначно. Здесь мы воспользовались тем, что любой ограниченный неотрицательный полухарактер ρ полугруппы $(-\infty;0)^n$ непрерывен ([5, теорема 2]), а потому имеет вид $\rho(h) = e^{u\cdot h}$ для некоторого $u \in \mathbb{R}^n_+$. Переходя теперь в (2.2) к пределу при $k \to -0$, получаем (2.1). •

§3. Основное определение (предварительный случай)

Всюду далее через $T_1,\dots,T_n$ будут обозначаться попарно коммутирующие однопараметрические C_0-полугруппы в комплексном банаховом пространстве X, удовлетворяющие условию $\|T_j(t)\| \leqslant M$ $(t \geqslant 0; j = 1,\dots,n; M = \mathrm{const})$. Через A_j обозначим генератор полугруппы T_j с областью определения $D(A_j)$ и положим $A = (A_1,\dots,A_n)$. Далее коммутирование операторов $A_1,\dots,A_n$ означает коммутирование соответствующих полугрупп.

Операторнозначная функция $T(u) := T_1(u_1)\dots T_n(u_n)$ $(u \in \mathbb{R}^n_+)$ является C_0-n-параметрической полугруппой, а потому линейное многообразие $D(A) := \bigcap\limits_{j=1}^{n} D(A_j)$ плотно в X ([6, с. 98–99]).

Определение 3.1. Определим значение функции ψ из $\mathcal{T}_n$ с интегральным представлением (2.1) на наборе $A = (A_1,\dots,A_n)$ при x из $D(A)$ формулой

$$\psi(A)x = c_0x + c_1\cdot Ax + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}} (T(u) - I)x\,d\mu(u), \tag{3.1}$$

где $c_1\cdot Ax := \sum\limits_{j=1}^{n} c_1^jA_jx$, I — единичный оператор в X.

Далее мы неоднократно воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3.1. *Для меры* μ *из интегрального представления* (2.1) *и достаточно малого* $\delta > 0$ *функция* $u \mapsto u_j$ μ*-интегрируема на* $[0;\delta)^n \setminus \{0\}$ $(j = 1,\dots,n)$ *и* $\mu(\mathbb{R}_+^n \setminus [0;\delta)^n) < \infty$.

Доказательство. Фиксируем s из $(-\infty;0)^n$. Так как $1 - e^{s\cdot u} \sim (-s)\cdot u$ при $u \to 0$ и интеграл в (2.1) сходится, то для достаточно малого $\delta > 0$ функция $s \cdot u$ μ-интегрируема на $[0;\delta)^n \setminus \{0\}$. В силу произвольности s отсюда следует μ-интегрируемость на $[0;\delta)^n \setminus \{0\}$ всех функций $u \mapsto u_j$. Далее, дифференцируя в (2.1) под знаком интеграла, получаем, что функции $u \mapsto u_j e^{s\cdot u}$ μ-интегрируемы. Пусть $E_j = \mathbb{R}_+^n \cap \{u_j \geqslant \delta\}$. Поскольку

$$\int\limits_{E_j} e^{s\cdot u} d\mu(u) \leqslant \frac{1}{\delta} \int\limits_{E_j} u_j e^{s\cdot u} d\mu(u),$$

то функция $u \mapsto e^{s\cdot u}$ μ-интегрируема на множестве $\cup_{j=1}^n E_j = \mathbb{R}_+^n \setminus [0;\delta)^n$. Снова учитывая сходимость интеграла в (2.1), получаем отсюда и последнее утверждение леммы.

Покажем теперь, что интеграл в (3.1) сходится в смысле Бохнера. Фиксируем x из $D(A)$, и пусть $B_j(u_j) := T_j(u_j) - I$. Так как $\|B_j(u_j)x\| u_j^{-1} \to \|A_j x\| < \infty$ $(u_j \to +0)$, $j = 1,\dots,n$, то, уменьшая, если нужно, δ из леммы 3.1, мы можем считать, что $\|B_j(u_j)x\| \leqslant c u_j$ при $u_j \in [0;\delta)$ $(c = \mathrm{const})$. Поэтому при $u \in [0,\delta)^n$ и $j, i_1, \dots, i_k$ из $\{1;\dots;n\}$ справедлива оценка

$$\|B_{i_1}(u_{i_1}) \dots B_{i_k}(u_{i_k}) B_j(u_j)x\| \leqslant (M+1)^k c u_j.$$

Далее, поскольку $B_j(u_j)$ коммутируют, то

$$T(u) - I = \sum_{j=1}^{n} B_j(u_j) + \sum_{i,j=1}^{n} B_i(u_i)B_j(u_j) + \dots + B_1(u_1)\dots B_n(u_n). \tag{3.2}$$

Следовательно, функция $u \mapsto \|(T(u) - I)x\|$ мажорируется на $[0;\delta)^n$ линейной комбинацией координатных функций, а потому в силу леммы 3.1 она μ-интегрируема на $[0;\delta)^n \setminus \{0\}$ в смысле Бохнера. Наконец, поскольку $\|(T(u) - I)x\| \leqslant (M^n + 1)\|x\|$, то, снова по лемме 3.1, эта же функция μ-интегрируема и на множестве $\mathbb{R}_+^n \setminus [0;\delta)^n$, что и завершает доказательство. •

Отметим, что при $X = \mathbb{C}^n$, $A = z \in \mathbb{C}^n$, $\mathrm{Re}\, z_j \leqslant 0$, $T(u) = e^{z\cdot u}$ функция $\psi(s)$ продолжается по формуле (3.1) до функции $\psi(z)$, голоморфной в области $\{\mathrm{Re}\, z_j < 0; j = 1,\dots,n\}$ из $\mathbb{C}^n$ и непрерывной в ее замыкании.

§4. Основная теорема

Пусть $\psi \in \mathcal{T}_n$ и $t \geqslant 0$. Предложение 2.1 показывает, что функция $g_t(s) := e^{t\psi(s)}$ будет абсолютно монотонной на $(-\infty; 0)^n$. Очевидно также, что $g_t(s) \leqslant 1$. В силу n-мерного варианта теоремы Бернштейна–Уиддера существует такая единственная ограниченная положительная мера ν_t на $\mathbb{R}_+^n$, что при $s \in (-\infty; 0)^n$

$$g_t(s) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{s\cdot u} d\nu_t(u) = (\mathcal{L}\nu_t)(-s), \tag{4.1}$$

где $\mathcal{L}$ обозначает n-мерное преобразование Лапласа.

Определение 4.1. Используя обозначения, введенные выше, положим

$$g_t(A) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T(u) d\nu_t(u) \tag{4.2}$$

(интеграл понимается в смысле Бохнера). Очевидно, что $\|g_t(A)\| \leqslant M^n e^{t\psi(-0)} \leqslant M^n$. Поскольку $g_{t+r}(s) = g_t(s) g_r(s)$, то ν_t образуют сверточную полугруппу ограниченных мер на $\mathbb{R}_+^n$. Поэтому $g(A) : t \mapsto g_t(A)$ есть равномерно ограниченная полугруппа операторов на X. В частности, $g(A)$ есть C_0-полугруппа.

Введенные выше обозначения и ограничения далее будут применяться без дополнительных пояснений.

В основе дальнейших рассмотрений лежит следующая теорема.

Теорема 4.1. *Оператор $\psi(A)$ расширяется до генератора равномерно ограниченной полугруппы $g(A)$ класса C_0.*

Доказательство. Рассмотрим прежде всего случай, когда $\partial\psi(-0)/\partial s_j \neq \infty$ при всех $j = 1, \ldots, n$, и покажем, что генератор полугруппы $g(A)$ совпадает с $\psi(A)$ на $D(A)$. Предположим сначала, что $c_0 = \psi(-0) = 0$. Дифференцируя (4.1), получаем

$$\partial\psi(s)/\partial s_j \cdot g_t(s) = \mathcal{L}(t^{-1} u_j d\nu_t(u))(-s),$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial\psi(s)}{\partial s_j} = \lim_{t\to+0} \mathcal{L}(t^{-1} u_j d\nu_t(u))(-s), \quad j = 1, \ldots, n.$$

С другой стороны, из (2.1) вытекает, что

$$\frac{\partial\psi(s)}{\partial s_j} = c_1^j + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{s\cdot u} u_j d\mu(u) = \mathcal{L}(c_1^j d\varepsilon_0(u) + u_j d\mu(u))(-s),$$

где ε_0 есть мера Дирака на $\mathbb{R}^n$, сосредоточенная в нуле. Следовательно, по теореме непрерывности (см., например, [7, с. 530, теорема 3]) имеем при $t \to +0$

$$t^{-1}u_j d\nu_t(u) \to c_1^j d\varepsilon_0(u) + u_j d\mu(u), \quad j = 1, \dots, n, \tag{4.3}$$

где сходимость понимается в узкой топологии. Далее,

$$\frac{g_t(A)x - x}{t} = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} (T(u) - I)xt^{-1} d\nu_t(u) \quad (x \in D(A)). \tag{4.4}$$

Пусть, как и выше, $B_j(u_j) = T_j(u_j) - I$. Если мы для x из $D(A)$ положим $u_j^{-1}B_j(u_j)x = A_jx$ при $u = 0$, то функция $u \mapsto u_j^{-1}B_j(u_j)x$ будет ограниченной и непрерывной на $\mathbb{R}_+^n$. В силу (4.3) имеем теперь при $t \to +0$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} B_j(u_j)xt^{-1} d\nu_t(u) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} (u_j^{-1}B_j(u_j)x)t^{-1}u_j d\nu_t(u) \\
&\qquad \longrightarrow c_1^j A_j x + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} B_j(u_j)x d\mu(u); \\
&\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} B_i(u_i)B_j(u_j)xt^{-1} d\nu_t(u) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} B_i(u_i)(u_j^{-1}B_j(u_j)x)t^{-1}u_j d\nu_t(u) \\
&\qquad \longrightarrow c_1^j B_i(0)A_j x + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} B_i(u_i)B_j(u_j)x d\mu(u) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} B_i(u_i)B_j(u_j)x d\mu(u)
\end{aligned}$$

и так далее. Поэтому, используя (4.4) и (3.2), имеем при $x \in D(A)$

$$\lim_{t \to +0} \frac{g_t(A)x - x}{t} = c_1 \cdot Ax + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} (T(u)x - x) d\mu(u) = \psi(A)x.$$

Если же $c_0 = \psi(-0) < 0$, то все сводится к предыдущему, поскольку $\psi(s) = c_0 + \psi_0(s)$, где $\psi_0 \in \mathcal{T}_n$ и $\psi_0(-0) = 0$.

Рассмотрим теперь общий случай, т. е. не будем исключать равенства $\partial\psi(-0)/\partial s_j = \infty$ при некоторых j. Пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$, причем все $\varepsilon_j > 0$, и пусть $\psi_\varepsilon(s) := \psi(s - \varepsilon)$, $s \in (-\infty; 0)^n$. Тогда $\partial\psi_\varepsilon(-0)/\partial s_j = \partial\psi(-\varepsilon)/\partial s_j \neq \infty$ при всех j, причем ψ_ε принадлежит $\mathcal{T}_n$ и имеет интегральное представление

$$\begin{aligned}
\psi_\varepsilon(s) &= c_0 + c_1 \cdot (s - \varepsilon) + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{(s-\varepsilon)\cdot u} - 1) d\mu(u) \\
&= \psi(-\varepsilon) + c_1 \cdot s + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} - 1)e^{-\varepsilon \cdot u} d\mu(u).
\end{aligned}$$

Поскольку

$$g_{\varepsilon t}(s) := e^{t\psi_\varepsilon(s)} = g_t(s-\varepsilon) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{s\cdot u} e^{-\varepsilon\cdot u} d\nu_t(u),$$

то по доказанному выше генератор C_0-полугруппы

$$g_{\varepsilon t}(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} T(u) e^{-\varepsilon\cdot u} d\nu_t(u) \tag{4.5}$$

совпадает на $D(A)$ с $\psi_\varepsilon(A)$. Обозначим его $\widetilde{\psi_\varepsilon(A)}$. Заметим, что при $x \in D(A)$

$$\psi(A)x - \psi_\varepsilon(A)x = (c_0 - \psi(-\varepsilon))x + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}} (T(u) - I)x(1 - e^{-\varepsilon\cdot u}) d\mu(u),$$

а потому

$$\|\psi(A)x - \psi_\varepsilon(A)x\| \leqslant (|c_0 - \psi(-\varepsilon)| + (M^n + 1) \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}} (1 - e^{-\varepsilon\cdot u}) d\mu(u))\|x\|. \tag{4.6}$$

Используя теорему Б. Леви, получаем из (4.6), что при $\varepsilon \downarrow +0$

$$\psi_\varepsilon(A)x \to \psi(A)x \quad (x \in D(A)). \tag{4.7}$$

Неравенство (4.6) показывает также, что оператор $\psi(A) - \psi_\varepsilon(A)$ продолжается с $D(A)$ до некоторого ограниченного оператора F_ε на X. Оператор $\widetilde{\psi_\varepsilon(A)}$ замкнут, значит, замкнут и оператор $\widetilde{\psi_\varepsilon(A)} + F_\varepsilon$, являющийся расширением оператора $\psi(A)$. Следовательно, оператор $\psi(A)$ допускает замыкание, которое мы временно обозначим $\overline{\psi(A)}$. При этом $D(A)$ является ядром оператора $\overline{\psi(A)}$ в смысле [8]. Из (4.5) получаем, что $g_{\varepsilon t}(A)$ сходится по норме к $g_t(A)$ $(\varepsilon \to +0)$ равномерно по t на любом компакте из $\mathbb{R}_+$, поскольку при $0 \leqslant t \leqslant b$

$$\begin{aligned}
\|g_t(A) - g_{\varepsilon t}(A)\| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n_+} \|T(u)\|(1 - e^{-\varepsilon\cdot u}) d\nu_t(u) \\
&\leqslant M^n \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} d\nu_t(u) - \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\varepsilon\cdot u} d\nu_t(u) \right) = M^n (e^{t\psi(-0)} - e^{t\psi(-\varepsilon)}) \\
&\leqslant M^n (e^{t(\psi(-0) - \psi(-\varepsilon))} - 1) \leqslant M^n (e^{b(\psi(-0) - \psi(-\varepsilon))} - 1).
\end{aligned}$$

Кроме того, $\|g_{\varepsilon t}(A)\| \leqslant M^n$. Поэтому если G есть генератор полугруппы $g(A)$, то $R(\lambda, \widetilde{\psi_\varepsilon(A)}) \to R(\lambda, G)$ сильно при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ $(\varepsilon \to +0)$ (см., например, [9, с. 373, теорема 2]). С другой стороны, фиксируем λ из $\mathbb{C}$ с $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Если $S_\varepsilon := \widetilde{\psi_\varepsilon(A)} + F_\varepsilon$, то $\lambda \in \rho(S_\varepsilon)$ в силу теоремы IX.2.1 из [8]. Так как $U_\lambda := \overline{\psi(A)} - \lambda I \subset S_\varepsilon - \lambda I$, то $U_\lambda^{-1} \subset R(\lambda, S_\varepsilon)$. Используя ограниченность $R(\lambda, S_\varepsilon)$ и замкнутость U_λ^{-1}, выводим, что образ X_1 оператора U_λ замкнут в X. Применяя метод доказательства теоремы VIII.1.5 из [8], получаем, что $R(\lambda, \widetilde{\psi_\varepsilon(A)})x \to U_\lambda^{-1}x$ при $x \in X_1 (\varepsilon \downarrow +0)$. В самом деле, поскольку $\|g_{\varepsilon t}(A)\| \leqslant M^n$, то $\|R(\lambda, \psi_\varepsilon(A))\| \leqslant M^n/\operatorname{Re}\lambda$. Следовательно, для x из X_1, таких что $U_\lambda^{-1}x \in D(A)$, имеем при $\varepsilon \downarrow +0$

$$R(\lambda, \widetilde{\psi_\varepsilon(A)})x - U_\lambda^{-1}x = R(\lambda, \widetilde{\psi_\varepsilon(A)})(\psi_\varepsilon(A) - \overline{\psi(A)})U_\lambda^{-1}x \to 0.$$

Но множество таких x плотно в X_1, и осталось применить принцип равномерной ограниченности. Таким образом, $R(\lambda, G)x = U_\lambda^{-1}x$ при всех $x \in X_1$, а потому $\overline{\psi(A)} \subset G$, что и завершает доказательство. •

Замечание. Как следует из приведенных выше рассуждений, $\overline{\psi(A)} = G$ тогда и только тогда, когда существует регулярная точка λ оператора $\overline{\psi(A)}$ с $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Теорема 4.1 мотивирует окончательный вариант основного определения данной работы. Всюду ниже через $\operatorname{Gen}(X)$ будем обозначать множество всех генераторов равномерно ограниченных C_0-полугрупп в X.

Определение 4.2. Под значением функции ψ из $\mathcal{T}_n$ на наборе $A = (A_1, \dots, A_n)$ коммутирующих операторов из $\operatorname{Gen}(X)$ будем понимать генератор полугруппы $g(A)$. Это значение мы далее обозначаем $\psi(A)$.

Возникающее функциональное исчисление будем называть $\mathcal{T}_n$-исчислением.

Следствие. *Оператор $\psi(A)$ коммутирует с ограниченным оператором в X вместе с $A_1, \dots, A_n$.*

§5. Непрерывность и единственность $\mathcal{T}_n$-исчисления

Определение 5.1. Пусть $\psi_k \in \mathcal{T}_n$ $(k = 0, 1, \dots)$. Будем говорить, что последовательность ψ_k сходится к ψ_0 в $\mathcal{T}_n$ (обозначение: $\psi_k \to \psi_0$ в $\mathcal{T}_n$), если $\psi_k(s) \to \psi_0(s)$ при $s \in (-\infty; 0)^n$ и $\psi_k(-0) \to \psi_0(-0)$ $(k \to \infty)$.

Скажем, что последовательность S_k из $\operatorname{Gen}(x)$ сходится к S_0 из $\operatorname{Gen}(X)$ в слабом резольвентном смысле, если при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re}\lambda > 0$ последовательность резольвент $R(\lambda, S_k)$ сходится к $R(\lambda, S_0)$ в слабой операторной топологии $(k \to \infty)$.

Теорема 5.1. *Если $\psi_k \in \mathcal{T}_n$ $(k = 0, 1, \dots)$ и $\psi_k \to \psi_0$ в $\mathcal{T}_n$, то для любого набора коммутирующих операторов A_j из $\operatorname{Gen}(X)$ последовательность $\psi_k(A)$ сходится к $\psi_0(A)$ в слабом резольвентном смысле $(k \to \infty)$.*

Доказательство. При $t \geqslant 0$; $k = 0, 1, \ldots$ положим $g_t^k(s) := e^{t\psi_k(s)}$, $s \in (-\infty; 0)^n$. В силу (4.1) $g_t^k(s) = (\mathcal{L}\nu_t^k)(-s)$, где ν_t^k — ограниченная положительная мера на $\mathbb{R}_+^n$, причем последнее равенство остается справедливым и при $s = 0$, если взять $g_t^k(0) := e^{t\psi_k(-0)}$. По условию теоремы последовательность $\mathcal{L}\nu_t^k$ сходится поточечно на $(-\infty; 0)^n \cup \{0\}$ к функции $\mathcal{L}\nu_t^0$, непрерывной в нуле. По теореме 3 из [7, с. 530] при $S = (-\infty; 0)^n \cup \{0\}$; $X = (-\infty; 0]^n$; $M = \mathbb{R}_+^n$ последовательность ν_t^k узко сходится к ν_t^0. Из (4.2) следует тогда, что $g_t^k(A)$ сходится к $g_t^0(A)$ в слабой операторной топологии, и для завершения доказательства осталось воспользоваться равенством $R(\lambda, \psi_k(A)) = \mathcal{L}(g_t^k(A))(\lambda)$ и теоремой Лебега об ограниченной сходимости ($\|g_t^k(A)\| \leqslant M^n$). •

Теорема 5.2. *Для фиксированного набора $A = (A_1, \ldots, A_n)$ коммутирующих операторов из* $\mathrm{Gen}(X)$ *имеется единственное отображение* $\Phi_A : \mathcal{T}_n \to \mathrm{Gen}(X)$, *такое что*

а) Φ_A *непрерывно при наделении* $\mathcal{T}_n$ *и* $\mathrm{Gen}(X)$ *топологиями сходимости в* $\mathcal{T}_n$ *и слабой резольвентной сходимости соответственно*;

б) Φ_A *аддитивно и положительно-однородно, а именно*

$$\Phi_A(\psi_1 + \psi_2) = \Phi_A(\psi_1) + \Phi_A(\psi_2), \Phi_A(\lambda\psi) = \lambda\Phi_A(\psi)(\lambda > 0);$$

в) $\Phi_A(-1) = -I$, $\Phi_A(s_j) = A_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ *и* $\Phi_A(e^{s\cdot u} - 1) = T(u) - I$, *где* $s_1, \ldots, s_n$ *есть координатные функции на* $\mathbb{R}^n$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $u \in \mathbb{R}_+^n$.

Доказательство. Положим $\Phi_A(\psi) := \psi(A)$ $(\psi \in \mathcal{T}_n)$. Справедливость а) тогда следует из теоремы 5.1. Далее, $\psi := \psi_1 + \psi_2 \in \mathcal{T}_n$, причем $g_t(s) = e^{t\psi(s)} = \mathcal{L}(\nu_t^1 * \nu_t^2)$ $(-s)$, где ν_t^j соответствует g_t^j по формуле (4.1). Поэтому

$$g_t(A) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T(u)d(\nu_t^1 * \nu_t^2)(u) = g_t^1(A)g_t^2(A).$$

По [2, теорема 10.10.2] (4) (при $\xi_k = 1$) генератор $\psi(A)$ полугруппы $g(A)$ есть $\psi_1(A) + \psi_2(A)$, что и доказывает первое из свойств б). Второе свойство б) очевидно. Первое из равенств в) также очевидно. Для доказательства второго положим $\psi(s) = s_j$. Тогда $g_t(s) = e^{ts_j} = \mathcal{L}(\varepsilon_{te_j})(-s)$, где $\{e_j : j = 1, \ldots, n\}$ есть стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. В силу (4.1) $g_t(A) = T_j(t)$, и полугруппа $g(A)$ имеет генератор A_j, т. е. $\psi(A) = A_j$. Наконец, по определению 3.1 $\Phi_A(e^{u\cdot s} - 1)x = (T(u) - I)x$ при $x \in D(A)$. Переходя к замыканиям, имеем последнюю из формул в).

Докажем единственность отображения Φ_A. Пусть Φ_A и Φ'_A — два отображения, удовлетворяющие условиям теоремы. В силу (2.1) функцию ψ из $\mathcal{T}_n$ можно сколь угодно точно аппроксимировать в смысле сходимости в $\mathcal{T}_n$ суммами вида

$$\sigma(s) = c_0 + c_1 \cdot s + \sum_{i=1}^{m}(e^{s\cdot u_i} - 1)\alpha_i, \quad \alpha_i > 0.$$

В силу свойств б) и в) $\Phi_A(\sigma) = \Phi'_A(\sigma)$, и для завершения доказательства осталось воспользоваться свойством а). •

§6. Теорема о сложной функции

Композиция функций сохраняет принадлежность к классу $\mathcal{T} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$. Точнее, если $\psi_1(s) \in \mathcal{T}_n$ и $\psi_2(r) \in \mathcal{T}_m$, то, например, функция $\psi(r, 's) := \psi_1(\psi_2(r), 's)$ принадлежит $\mathcal{T}_{m+n-1}$ (мы полагаем $'s = (s_2, \dots, s_n)$). Это проверяется непосредственно с учетом утверждения 3 предложения 2.1. При этом справедлива

Теорема 6.1. *Пусть* $\psi_1 \in \mathcal{T}_n$, $\psi_2 \in \mathcal{T}_m$ *и* $\psi(r, 's) = \psi_1(\psi_2(r), 's)$, *где* $r \in (-\infty; 0)^m$, $s \in (-\infty; 0)^n$, $s = (s_2, \dots, s_n)$. *Тогда для любого набора* $A = (A_1, \dots, A_{m+n-1})$ *коммутирующих операторов из* $\mathrm{Gen}(X)$ *имеем*

$$\psi(A) = \psi_1(\psi_2(A_1, \dots, A_m), A_{m+1}, \dots, A_{m+n-1}).$$

Доказательство. Для w из $\mathbb{R}_+^{m+n-1}$ пусть

$$w' = (w_1, \dots, w_m), \qquad w'' = (w_{m+1}, \dots, w_{m+n-1}).$$

Если $e^{t\psi_j(s)(s)} = (\mathcal{L}\nu_t^j)(-s)$, $j = 1, 2$, то положим

$$\nu_t(w) = \int_0^{\infty} \nu_p^2(w') \nu_t^1(dp, w'')$$

(меру в $\mathbb{R}_+^q$ и соответствующую ей функцию распределения мы обозначаем одинаково). Легко проверить, что ν_t есть функция распределения некоторой ограниченной борелевской меры в $\mathbb{R}_+^{m+n-1}$. Далее, для любых борелевских $E_1 \subset \mathbb{R}_+^m$ и $E_2 \subset \mathbb{R}_+^{n-1}$ имеем

$$\nu_t(E_1 \times E_2) = \int_0^{\infty} \nu_p^2(E_1) \nu_t^1(dp, E_2), \tag{6.1}$$

что нетрудно доказать, рассмотрев сначала случай, когда E_i параллелепипеды. Если теперь $F_1(w')$ и $F_2(w'')$ — две непрерывные ограниченные функции на $\mathbb{R}_+^m$ и $\mathbb{R}_+^{n-1}$ соответственно, значения которых — ограниченные операторы в X (или числа), то из формулы (6.1) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}_+^{m+n-1}} F_1(w') F_2(w'') d\nu_t(w) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\int_{\mathbb{R}_+^m} F_1(w') d\nu_p^2(w') \right) F_2(w'') d\nu_t^1(p, w''), \tag{6.2}$$

поскольку (6.2) сразу сводится к (6.1), когда F_i — простые функции. Из (6.2) получаем, что

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}\nu_t)(-r,-'s) &= \int_{\mathbb{R}_+^{m+n-1}} e^{r\cdot w'+'s\cdot w''}\,d\nu_t(w)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n}\left(\int_{\mathbb{R}_+^m} e^{r\cdot w'}\,d\nu_p^2(w')\right)e^{'s\cdot w''}\,d\nu_t^1(p,w'')\\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{\psi_2(r)p+'s\cdot w''}\,d\nu_t^1(p,w'') = e^{t\psi_1(\psi_2(r),'s)}\\
&= e^{t\psi(r,'s)}.
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

В силу определения 4.2 полугруппа ($A' := (A_n,\dots,A_m)$),

$$
g_p^2(A') := \int_{\mathbb{R}_+^m} T(r)d\nu_p^2(r)
$$

имеет генератор $\psi_2(A')$. Аналогично полугруппа

$$
\begin{aligned}
&g_t^1(\psi_2(A'),A_{m+1},\dots,A_{m+n-1})\\
&:= \int_{\mathbb{R}_+^n} g_p^2(A')\prod_{i=m+1}^{m+n-1} T_i(w_i)d\nu_t^1(p,w'')
\end{aligned}
$$

имеет генератор $\psi_1(\psi_2(A'),\ A_{m+1},\dots,A_{m+n-1})$. С другой стороны, снова используя (6.2), имеем

$$
\begin{aligned}
&g_t^1(\psi_2(A'),A_{m+1},\dots,A_{m+n-1})\\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n}\left(\int_{\mathbb{R}_+^m} T(r)d\nu_p^2(r)\right)\prod_{i=m+1}^{m+n-1} T_i(w_i)d\nu_t^1(p,w'')\\
&= \int_{\mathbb{R}_+^{m+n-1}} T(r,w'')d\nu_t(r,w'').
\end{aligned}
$$

Поэтому с учетом (6.3) и определения 4.2 последняя полугруппа имеет генератор $\psi(A)$, что и завершает доказательство. •

§7. Голоморфность полугруппы $g(A)$

Теорема 7.1. *Пусть $\psi \in \mathcal{T}_n$. Если коммутирующие операторы $A_1,\dots,A_n$ из $\mathrm{Gen}(X)$ являются генераторами голоморфных полугрупп, то и $\psi(A)$ является генератором голоморфной полугруппы.*

Доказательство. Можно считать, что $c_0 = 0$. Рассмотрим два случая.

1) $c_1^1 \neq 0, \ldots, c_1^n \neq 0$. Заметим, что

$$T(u) - I = \sum_{j=1}^{n} T_1(u_1) \ldots T_{j-1}(u_{j-1})(T_j(u_j) - I),$$

причем при всех $x \in D(A_j)$

$$(T_j(u_j) - I)x = \int\limits_0^{u_j} T_j(\xi_j) A_j x d\xi_j. \tag{7.1}$$

Следовательно, с учетом (3.1) получаем при x из $D(A)$

$$\psi(A)x = \sum_{j=1}^{n} \Big(c_1^j A_j x + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} \Big(\int_0^{u_j} \prod_{i=1}^{j-1} T_i(u_i) T_j(\xi_j) A_j x d\xi_j \Big) d\mu(u) \Big). \tag{7.2}$$

Покажем, что оператор, стоящий под знаком суммы в (7.2), является генератором голоморфной полугруппы. При $\delta > 0$, $x \in D(A_j)$

$$\int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} \Big(\int_0^{u_j} \prod_{i=1}^{j-1} T_i(u_i) T_j(\xi_j) A_j x d\xi_j \Big) d\mu(u)$$
$$= \int_{[0,\delta)^n \setminus \{0\}} + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus [0,\delta)^n} \Big(\int_0^{u_j} \prod_{i=1}^{j-1} T_i(u_i) T_j(\xi_j) A_j x d\xi_j \Big) d\mu(u). \tag{7.3}$$

В силу неравенства

$$\Big\| \int_0^{u_j} \prod_{i=1}^{j-1} T_i(u_i) T_j(\xi_j) A_j x d\xi_j \Big\| \leqslant M^j \|A_j x\| u_j$$

первое слагаемое в правой части (7.3) оценивается по норме величиной

$$\Big(\frac{M^j}{|c_1^j|} \int_{[0,\delta)^n \setminus \{0\}} u_j d\mu(u) \Big) \|c_1^j A_j x\|,$$

причем

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{[0,\delta)^n \setminus \{0\}} u_j d\mu(u) = 0$$

по лемме 3.1. С другой стороны, в силу (7.1)

$$\left\| \int_0^{u_j} \prod_{i=1}^{j-1} T_i(u_i) T_j(\xi_j) A_j x d\xi_j \right\| = \left\| \prod_{i=1}^{j-1} T_i(u_i)(T_j(u_j) - I)x \right\| \\ \leqslant M^{j-1}(M+1)\|x\|,$$

а потому второе слагаемое в правой части (7.3) оценивается по норме величиной $M^{j-1}(M+1)\mu(\mathbb{R}^n_+ \setminus [0;\delta)^n)\|x\|$. Таким образом, каждое слагаемое в (7.2) удовлетворяет условиям следствия IX.2.5 из [8] и, значит, является генератором голоморфной полугруппы. По теореме 10.10.2 (4) из [2] их сумма также является генератором голоморфной полугруппы, что и завершает доказательство в рассматриваемом случае.

2) Среди чисел c_1^j имеются нулевые. Пусть, для определенности, в точности $c_1^1 = 0, \ldots, c_1^m = 0$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$. При $\alpha > 0$ оператор $\alpha \sum_{i=1}^m A_i + \psi(A)$ по теореме 10.10.2 (4) из [2] порождает полугруппу $g_t^\alpha(A) = \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) g_t(A)$, которая голоморфна по доказанному выше. По критерию голоморфности из [9, с. 351] найдется такая константа K_1, что при $t \in (0;1]$

$$\left\| \frac{d}{dt} g_t^\alpha(A) \right\| = \left\| \Big(\alpha \sum_{i=1}^m A_i + \psi(A)\Big) \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) g_t(A) \right\| \leqslant \frac{K_1}{t}.$$

Далее, в силу того же критерия найдется константа K_2, такая что $\|A_i T_i(t)\| \leqslant K_2/t$ при $i = 1, \ldots, m$; $t \in (0;1]$. Но тогда

$$\|\alpha A_i T_i(\alpha t)\| = \alpha \|T_i'(\alpha t)\| \leqslant \alpha \frac{K_2}{\alpha t} = \frac{K_2}{t},$$

и мы имеем

$$\left\| \alpha \Big(\sum_{i=1}^m A_i\Big) \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^m M^{m-1} \|\alpha A_i T_i(\alpha t)\| \leqslant \frac{m M^{m-1} K_2}{t}.$$

Поскольку

$$\Big(\alpha \sum_{i=1}^m A_i + \psi(A)\Big) \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) g_t(A) \\ = \Big(\alpha \sum_{i=1}^m A_i\Big) \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) g_t(A) + \psi(A) \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) g_t(A),$$

причем в правой части стоит сумма ограниченных операторов, то при $t \in (0;1]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
&\left\|\psi(A)\prod_{j=1}^{m}T_j(\alpha t)g_t(A)\right\| \\
&\quad\leqslant \left\|\left(\alpha\sum_{i=1}^{m}A_i+\psi(A)\right)\prod_{j=1}^{m}T_j(\alpha t)g_t(A)\right\| + \left\|\alpha\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)\prod_{j=1}^{m}T_j(\alpha t)g_t(A)\right\| \\
&\quad\leqslant \frac{K_1+mM^{m+n-1}K_2}{t}.
\end{aligned}$$

Таким образом, полагая $C = K_1 + mM^{m+n-1}K_2$, имеем при $t \in (0;1]$

$$\left\|\psi(A)g_t(A)\prod_{j=1}^{m}T_j(\alpha t)x\right\| \leqslant \frac{C\|x\|}{t} \quad (x \in X).$$

Учитывая C_0-свойство полугрупп T_j и ограниченность оператора $\psi(A)g_t(A) = d/dtg_t(A)$, получаем отсюда при $\alpha \to +0$

$$\|\psi(A)g_t(A)x\| \leqslant \frac{C\|x\|}{t} \quad (t \in (0;1],\ x \in X),$$

что и завершает доказательство. •

§8. Связь с n-мерным исчислением Хилле–Филлипса. Теорема об отображении совместного спектра

Для доказательства теоремы об отображении спектра в $\mathcal{T}_n$-исчислении нам понадобится n-мерный вариант функционального исчисления из [2, гл. XV, XVI], построение которого вполне аналогично одномерному. Опишем некоторые определения и свойства этого исчисления, ограничившись достаточным для наших целей случаем равномерно ограниченных C_0-полугрупп и ограниченных мер.

Определение 8.1. Пусть a есть ограниченная регулярная борелевская мера на $\mathbb{R}^n_+$, $\psi(s) = (\mathcal{L}a)(-s)$, $s \in (-\infty;0)^n$. Определим значение функции ψ на наборе $A = (A_1,\ldots,A_n)$ коммутирующих операторов из $\mathrm{Gen}(X)$ формулой

$$\Psi(a,A) = \int_{\mathbb{R}^n_+} T(u)\,da(u).$$

Подобным образом в §4 вводились операторы $g_t(A)$.

Покажем, что это исчисление согласовано с $\mathcal{T}_n$-исчислением.

Теорема 8.1. *Функция* ψ *из* $\mathcal{T}_n$ *имеет вид* $s \mapsto (\mathcal{L}a)(-s)$ *тогда и только тогда, когда* $\psi(-\infty) \neq -\infty$. *При этом* $\psi(A) = \Psi(a, A)$.

Доказательство. Пусть $\psi(s) = (\mathcal{L}a)(-s)$, $s \in (-\infty; 0)^n$. Тогда в силу тауберовой теоремы для преобразования Лапласа $\psi(-\infty) = a(\{0\}) \neq -\infty$.

Обратно, пусть $\psi \in \mathcal{T}_n$ и $\psi(-\infty) \neq -\infty$. Тогда $c_1 = 0$ и мера μ из (2.1) ограничена. Последнее следует из того, что, когда все $s_j \downarrow -\infty$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (e^{s \cdot u} - 1) d\mu(u) \to -\mu(\mathbb{R}^n_+)$$

по теореме Б. Леви. Следовательно, $\psi(s) = (\mathcal{L}a)(-s)$, где $a = \mu + (c_0 - \|\mu\|)\varepsilon_0$. Поэтому при $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} \psi(A)x &= c_0 x + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (T(u) - I) x d\mu(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} T(u) x da(u) \\ &= \Psi(a, A)x. \end{aligned}$$

Так как оператор $\Psi(a, A)$ ограничен, последнее равенство справедливо при всех $x \in X$, что и требовалось доказать. •

Теорема 8.1 позволяет сводить многие рассмотрения к случаю $\psi(-\infty) = -\infty$.

Для определения совместного спектра набора A нам потребуется некоторая подготовка. Обозначим через $\mathfrak{B}$ бикоммутант семейства операторов $\{T_j(t) : t \geqslant 0; j = 1, \ldots, n\}$ в алгебре $\mathfrak{L}(X)$ всех ограниченных операторов в X. Тогда $\mathfrak{B}$ есть сильно замкнутая коммутативная наполненная подалгебра алгебры $\mathfrak{L}(X)$ с единицей, содержащая все операторы $T_j(t)$. Как и в [2, теорема 16.3.1], получаем, что при любом j спектр алгебры $\mathfrak{B}$ разбивается на два подмножества $\mathcal{W}_j$ и $\mathcal{U}_j$, и существует непрерывная функция α_j на $\mathcal{W}_j$ такая, что для любого комплексного гомоморфизма φ алгебры $\mathfrak{B}$

$$\varphi(R(\lambda, A_j)) = \begin{cases} (\lambda - \alpha_j(\varphi))^{-1}, & \varphi \in \mathcal{W}_j, \\ 0, & \varphi \in \mathcal{U}_j \end{cases}$$

для всех $\lambda \notin \sigma(A_j)$, причем спектр $\sigma(A_j) = \alpha_j(\mathcal{W}_j)$.

Определение 8.2. Используя предыдущие обозначения, определим совместный спектр $\sigma(A)$ набора A равенством

$$\sigma(A) = \{(\alpha_1(\varphi), \ldots, \alpha_n(\varphi)) : \varphi \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{W}_j\}$$

(мы считаем, что $\sigma(A) = \varnothing$, если $\bigcap_{j=1}^n \mathcal{W}_j = \varnothing$).

Ясно, что $\sigma(A) \subset \sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_n)$. Повторяя доказательство теоремы 16.4.1 из [2], убеждаемся в справедливости следующего результата.

Предложение 8.1. *Если все полугруппы T_j непрерывны в равномерной операторной топологии и операторы A_j неограничены, то для функции $\psi(s) = (\mathcal{L}a)(-s)$ имеем*

$$\psi(\sigma(A)) \cup a(\{0\}) = \sigma(\Psi(a, A)). \tag{8.1}$$

Пример функции $\psi(s) = e^s - 1$ из $\mathcal{T}_1$ показывает, что теорема об отображении спектра в $\mathcal{T}_n$-исчислении, вообще говоря, неверна (см., например, [6, с. 218–219]). Покажем, что она справедлива для голоморфных полугрупп.

Теорема 8.2. *Пусть все T_j есть голоморфные полугруппы, а операторы A_j неограничены. Если $\psi \in \mathcal{T}_n$ и $\psi(-\infty) = -\infty$, то*

$$\sigma(\psi(A)) = \psi(\sigma(A)).$$

Доказательство. В силу голоморфности полугруппы $g(A)$ (теорема 7.1) и T_j непрерывны в равномерной операторной топологии $t > 0$ ([2, теорема 3.10.1]). Поэтому (см., например, [6, предложение 8.5]) при всех $t > 0$

$$e^{t\sigma(\psi(A))} = \sigma(g_t(A)) \setminus \{0\}.$$

Далее, из (8.1) при $a = \nu_t$, $\psi(s) = g_t(s)$, $\Psi(a, A) = g_t(A)$ имеем

$$\sigma(g_t(A)) = e^{t\psi(\sigma(A))} \cup \{0\},$$

поскольку $\nu_t(\{0\}) = g_t(-\infty) = 0$ по тауберовой теореме. Сопоставляя два последних равенства, получаем при $t > 0$

$$e^{t\sigma(\psi(A))} = e^{t\psi(\sigma(A))}. \tag{8.2}$$

По причине голоморфности соответствующих полугрупп спектры $\sigma(A_j)$ и $\sigma(\psi(A))$ лежат внутри некоторого сектора

$$Y = \{s_1 + iy_1 : |y_1| \leqslant k(-s_1), s_1 \leqslant 0\},$$

где $k > 0$ фиксировано. Поэтому $\sigma(A) \subset \sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_n) \subset Y^n$. Фиксируем $s_1^0 \leqslant 0$ и обозначим через E и P сечения множеств $\sigma(\psi(A))$ и $\psi(\sigma(A))$ соответственно при помощи прямой $\{s_1 = s_1^0\}$. Множество E ограничено. Докажем ограниченность множества P. При $s \in (-\infty; 0)^n$, $u \in (0; +\infty)^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $s + iy \in Y^n$, имеем

$$\left|\frac{e^{s\cdot u}\sin(y\cdot u)}{e^{s\cdot u}\cos(y\cdot u) - 1}\right| = \frac{|\sin(y\cdot u)|}{e^{-s\cdot u} - \cos(y\cdot u)} \leqslant \frac{|y\cdot u|}{(1 - s\cdot u) - 1} \leqslant k.$$

Кроме того, $|c_1 \cdot y| \leqslant kc_1 \cdot (-s)$. Из (3.1), где положено $A = z = s + iy$, $T(u) = e^{z \cdot u}$, выводим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\psi(z) &= c_0 + c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}^n_+} (e^{s \cdot u}\cos(y \cdot u) - 1)d\mu(u) \leqslant 0, \\ \operatorname{Im}\psi(z) &= c_1 \cdot y + \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{s \cdot u}\sin(y \cdot u)d\mu(u). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Поэтому предыдущие неравенства показывают, что $|\operatorname{Im}\psi(z)| \leqslant k(-\operatorname{Re}\psi(z))$. Следовательно, $\psi(Y^n) \cap \{s_1 = s_1^0\} \subset \{s_1^0\} \times [ks_1^0; -ks_1^0]$. В частности, $\psi(\sigma(A))$ имеет ограниченное сечение P. Из (8.2) следует, что $e^{tiE} = e^{tiP}$. Выбирая теперь $t > 0$ настолько малым, чтобы функция $\zeta \mapsto e^{t\zeta}$ была однолистна в горизонтальной полосе, содержащей $i(E \cup P)$, получаем, что $E = P$. Теорема доказана. •

§9. Формула для резольвенты

Сейчас мы установим формулу, выражающую резольвенту $R(\lambda, \psi(A))$ оператора $\psi(A)$ через $R(\lambda, A_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Для дробных степеней оператора соответствующий результат получен Т. Като (см., например, [10, с. 144, (5.19)]).

Теорема 9.1. *Пусть для любого $\lambda > 0$ существует положительная мера τ_λ на $\mathbb{R}^n_+$ с преобразованием Стилтьеса*

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{d\tau_\lambda(\xi)}{(\xi_1 + z_1)\ldots(\xi_n + z_n)} = \frac{1}{\lambda - \psi(-z)} \quad (\operatorname{Re} z_j > 0;\ j = 1, \ldots, n). \tag{9.1}$$

Тогда при $\lambda > 0$ справедливо равенство $(x \in X)$

$$R(\lambda, \psi(A))x = \int_{\mathbb{R}^n_+} R(\xi, A)x\,d\tau_\lambda(\xi), \tag{9.2}$$

где положено $R(\xi, A) = R(\xi_1, A_1)\ldots R(\xi_n, A_n)$.

Доказательство. Из (8.3) следует, что $\operatorname{Re}\psi(-z) \leqslant 0$, если все $\operatorname{Re} z_j > 0$. Поэтому при $\lambda > 0$

$$\frac{1}{\lambda - \psi(-z)} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{t\psi(-z)}dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-z \cdot u}d\nu_t(u)\right)dt.$$

С другой стороны, в силу (9.1)

$$\frac{1}{\lambda - \psi(-z)} = \int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-z \cdot u}e^{-\xi \cdot u}du\right)d\tau_\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-z \cdot u}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-u \cdot \xi}d\tau_\lambda(\xi)\right)du.$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z\cdot u}\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-u\cdot\xi}d\tau_\lambda(\xi)\right)du = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z\cdot u}d\nu_t(u)\right)dt. \tag{9.3}$$

Предположим сначала, что для некоторого $\omega > 0$ справедливы неравенства $\|T_j(t)\| \leqslant Me^{-\omega t}$ $(t \geqslant 0; j = 1, \dots, n)$, и докажем формулу ($\nu_t(u)$ обозначает функцию распределения меры ν_t)

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} T(u)xd\nu_t(u)\right)dt = \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u)xd\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(u)dt\right) \quad (\lambda > 0,\ x \in X). \tag{9.4}$$

Отметим прежде всего, что в силу оценки $\|T(u)\| \leqslant M^n e^{-\omega u}$ интеграл в левой части (9.4) абсолютно сходится. Далее, имея в виду интегральные суммы для внутреннего интеграла в левой части (9.4), рассмотрим разбиение P множества $\mathbb{R}_+^n$ на n-мерные параллелепипеды $[a^k; b^k)$, $k = 1, \dots, m$. С учетом формулы

$$\nu_t([a^k; b^k)) = \Delta_{a_1^k b_1^k \dots a_n^k b_n^k}\nu_t(u)$$

($\Delta_{a_1 b_1 \dots a_n b_n}$ — итерированные разностные операторы) имеем

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\sum_{k=1}^m T(u^k)x\nu_t([a^k; b^k))\right)dt$$
$$= \sum_{k=1}^m T(u^k)x\Delta_{a_1^k b_1^k \dots a_n^k b_n^k}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(u)dt\right), \tag{9.5}$$

где $u^k \in [a^k; b^k)$. Так как

$$\left\|\sum_{k=1}^m T(u^k)x\nu_t([a^k; b^k))\right\| \leqslant M^n\|x\|\nu_t(\mathbb{R}_+^n) \leqslant M^n\|x\|,$$

то в левой части (9.5) возможен предельный переход под знаком интеграла, когда мелкость разбиения P стремится к нулю, и в пределе мы получаем (9.4). При $X = \mathbb{C}^n$, $T(u) = e^{-z\cdot u}$ из (9.4) выводим

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z\cdot u}d\nu_t(u)\right)dt = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z\cdot u}d\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(u)dt\right).$$

Сопоставляя последнее равенство с (9.3), имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z\cdot u}\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-u\cdot\xi}d\tau_\lambda(\xi)\right)du = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z\cdot u}d\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(u)dt\right).$$

В силу произвольности z из $\{\operatorname{Re} z_j > 0 : j = 1, \ldots, n\}$ это влечет следующее соотношение для мер

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-u\cdot\xi} d\tau_\lambda(\xi)\right) du = d\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(u)dt\right).$$

С учетом этого равенства и (9.4) получаем теперь в силу определения 4.2 ($\lambda > 0, x \in X$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} R(\xi, A)x d\tau_\lambda(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\xi\cdot u}T(u)x du\right) d\tau_\lambda(\xi)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} T(u)x\left(\int_0^\infty e^{-\xi\cdot u} d\tau_\lambda(\xi)\right) du = \int_{\mathbb{R}^n_+} T(u)x d\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(u)dt\right)\\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} T(u)x d\nu_t(u)\right) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g_t(A)x dt\\ &= R(\lambda, \psi(A))x.\end{aligned}$$

Осталось освободиться от ограничений на рост полугрупп T_j. Если $\|T_j(t)\| \leqslant M$, то для натуральных k рассмотрим полугруппы $t \mapsto e^{-t/k}T_j(t)$ с генераторами $A_j - k^{-1}I$. Положим $A - k^{-1}I := (A_1 - k^{-1}I, \ldots, A_n - k^{-1}I)$, $s \pm 1/k = (s_1 \pm 1/k, \ldots, s_n \pm 1/k)$. По доказанному выше

$$R(\lambda, \psi(A - k^{-1}I))x = \int_{\mathbb{R}^n_+} R(\xi, A - k^{-1}I)x d\tau_\lambda(\xi) \quad (x \in X). \tag{9.6}$$

Так как $\psi(A - k^{-1}I) = \psi_k(A)$, где последовательность $\psi_k(s) := \psi(s - 1/k)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.1, то $R(\lambda, \psi(A - k^{-1}I))$ сходится слабо к $R(\lambda, \psi(A))$ $(k \to \infty)$. С другой стороны, при $\xi_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$ имеет место сильная сходимость

$$R(\xi, A - k^{-1}I) = R(\xi + 1/k, A) \to R(\xi, A) \quad (k \to \infty),$$

причем $\|R(\xi + 1/k, A)\| \leqslant M^n/\xi_1 \ldots \xi_n$. Полагая $z_j \downarrow 0$, $j = 1, \ldots, n$, выводим из (9.1) по теореме Б. Леви, что функция $1/\xi_1 \ldots \xi_n$ τ_λ — интегрируема. В частности, множество $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{\xi_1 > 0, \ldots, \xi_n > 0\}$ τ_λ-нулевое. Следовательно, полагая в (9.6) $k \to \infty$ и применяя теорему Лебега о мажорированной сходимости, получаем (9.2), что и завершает доказательство. •

Замечание. Для $\lambda > 0$ положим $f_\lambda(z) := 1/(\lambda - \psi(z))$ $(\operatorname{Re} z_j < 0;\ j = 1, \ldots, n)$. При $n = 1$ имеется критерий разрешимости уравнения (9.1). А именно, как следует из одной теоремы М. Г. Крейна ([11, с. 522, теорема П.4]), это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $\psi(-\infty) = -\infty$ и при $\lambda > 0$ функция $f_\lambda(z)$

продолжается до голоморфной в полуплоскости $\{0 < \arg z < \pi\}$ и отображает ее в свое замыкание. При этом τ_λ можно найти из (9.1), используя различные формулы обращения преобразования Стилтьеса (см., например, [12, гл. 5, §1]; [3, с. 157]). В частности, рассматривая τ_λ как распределение, имеем

$$\tau_\lambda(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{y\to+0}(f_\lambda(\xi+iy) - f_\lambda(\xi-iy)), \tag{9.7}$$

где предел понимается в смысле сходимости в $\mathcal{D}'_+$.

При $n > 1$ нам известны следующие достаточные условия разрешимости уравнения (9.1). Далее используются результаты и обозначения из [13, гл. II, §10]; $C = (0;+\infty)^n$; $f_{\lambda\pm}$ — граничные значения в $\mathcal{H}_s$ функции f_λ при $y \to 0$, $y \in \pm C$. Если при любом $\lambda > 0$ найдется такое $s \in \mathbb{R}$, что $f_\lambda \in H^{(s)}(C) \cap H^{(s)}(-C)$, причем распределение

$$\tau_\lambda = \frac{1}{(2\pi i)^n}(f_{\lambda+} + (-1)^n f_{\lambda-})$$

является положительной мерой, сосредоточенной на $\mathbb{R}^n_+$, то τ_λ есть решение уравнения (9.1). Это следует из теоремы 1 в [13, с. 153], примененной к конусам C и $-C$.

§10. Устойчивость $\mathcal{T}_n$-исчисления

Под устойчивостью $\mathcal{T}_n$-исчисления мы понимаем непрерывность отображения $A \mapsto \psi(A)$ в различных смыслах, которые уточняются ниже. Отметим сначала такое следствие теоремы 9.1.

Теорема 10.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1 *и пусть A_{kj} есть генератор C_0-полугруппы T_{kj} в X, причем операторы $T_{kj}(t)$ коммутируют и $\|T_{kj}(t)\| \leqslant M$ $(j = 1,\dots,n;\ k = 0,1,\dots)$. Положим $A_k := (A_{k1},\dots,A_{kn})$. Если $R(\xi, A_k) \to R(\xi, A_0)$ равномерно (сильно) при $k\to\infty$, $\xi_j > 0$ $(j = 1,\dots,n)$, то и $R(\lambda,\psi(A_k)) \to R(\lambda,\psi(A_0))$ равномерно (сильно) при $k\to\infty$, $\lambda > 0$.*

Доказательство. В силу теоремы 9.1 и ее доказательства

$$R(\lambda,\psi(A_k)) = \int_{\mathbb{R}^n_+} R(\xi, A_k)\,d\tau_\lambda(\xi) \quad (\lambda > 0;\ k = 0,1,\dots),$$

причем $\|R(\xi, A_k)\| \leqslant M^n/\xi_1\dots\xi_n$, когда все $\xi_j > 0$, и в правой части последнего неравенства стоит τ_λ-интегрируемая функция. Поэтому $R(\xi, A_k) \to R(\xi, A_0)$ на множестве $\mathbb{R}^n_+$ равномерно (сильно) τ_λ-почти всюду, и осталось применить теорему Лебега о мажорированной сходимости. •

Имеет место также следующий результат.

Теорема 10.2. *Пусть* $\psi \in \mathcal{T}_n$, *а оператор* A_{kj} *есть генератор* C_0*-полугруппы* T_{kj} *в* X, *причем* $\|T_{kj}(t)\| \leqslant M$, *операторы* $T_{kj}(t)$ *коммутируют* ($j = 1, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots$) *и* $A_k = (A_{k1}, \dots, A_{kn})$. *Предположим, что существует плотно определенный оператор* A_{0j} *на* X *такой, что для некоторого* λ_0 *из* $\mathbb{C}$ *с* $\operatorname{Re}\lambda_0 > 0$ *имеем* $R(\lambda_0, A_{kj}) \to R(\lambda_0, A_{0j})$ *сильно и* $A_{kj}x \to A_{0j}x$ *при некотором* $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} D(A_k)$ ($k \to \infty$; $j = 1, \dots, n$). *Тогда* A_{0j} *является генератором некоторой равномерно ограниченной* C_0*-полугруппы* T_{0j} *и* $\psi(A_k)x \to \psi(A_0)x$, *где* $A_0 = (A_{01}, \dots, A_{0n})$.

Доказательство. По теореме Троттера–Като существует C_0-полугруппа T_{0j} с генератором A_{0j} такая, что $T_{kj}(t) \to T_{0j}(t)$ сильно и $\|T_{0j}(t)\| \leqslant M$, если $\|T_{kj}(t)\| \leqslant M$ ($j = 1, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots$). Если $T_k(u) := T_{k1}(u_1) \dots T_{kn}(u_n)$, то при $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} D(A_k)$ и $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$\psi(A_k)x = c_0 x + c_1 \cdot A_k x + \int\limits_{[0;\delta)^n \setminus \{0\}} + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \setminus [0;\delta)^n} (T_k(u) - I)x\,d\mu(u). \tag{10.1}$$

Так как при достаточно малом $\delta > 0$ по лемме 3.1 $\mu(\mathbb{R}_+^n \setminus [0;\delta)^n) < \infty$, то можно переходить к пределу под знаком второго интеграла в (10.1). Далее, используя (3.2), имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{[0;\delta)^n \setminus \{0\}} (T_k(u) - I)x\,d\mu(u) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{[0;\delta)^n \setminus \{0\}} B_{kj}(u_j)x\,d\mu(u) + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{[0;\delta)^n \setminus \{0\}} B_{ki}(u_i)B_{kj}(u_j)x\,d\mu(u) + \dots \\
&\quad + \int\limits_{[0;\delta)^n \setminus \{0\}} B_{k1}(u_1) \dots B_{kn}(u_n)x\,d\mu(u).
\end{aligned} \tag{10.2}$$

Теорема 11.5.4 из [2] показывает, что

$$\left\| \frac{T_{kj}(u_j)x - x}{u_j} \right\| = \left\| \frac{1}{u_j} \int\limits_0^{u_j} T_{kj}(\tau) A_{kj}x\,d\tau \right\| \leqslant M\|A_{kj}x\|,$$

причем правая часть мажорируется величиной, не зависящей от k. Снова применяя лемму 3.1, получаем, учитывая теорему Лебега о мажорированной сходимости, что

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \int\limits_{[0;\delta)^n \setminus \{0\}} B_{kj}(u_j)x\,d\mu(u) &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{[0;\delta)^n \setminus \{0\}} \frac{T_{kj}(u_j)x - x}{u_j} u_j\,d\mu(u) \\
&= \int\limits_{[0;\delta)^n \setminus \{0\}} (T_{0j}(u_j) - I)x\,d\mu(u).
\end{aligned}$$

Аналогично доказывается законность предельного перехода под знаком интеграла и в других слагаемых правой части (10.2), поскольку $\|B_{kj}(t)\| \leqslant M+1$. Таким образом, снова учитывая (3.2), получаем, что и в первом интеграле в (10.1) также возможен предельный переход под знаком интеграла, что и завершает доказательство. •

§11. Примеры и приложения

1. Функция $\psi(s) = -(-s)^\alpha$ при $\alpha \in (0;1)$ принадлежит $\mathcal{T}_1$ и имеет интегральное представление

$$\psi(s) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^\infty (e^{su}-1)u^{-1-\alpha}du \quad (s<0),$$

что нетрудно проверить дифференцированием. При этом формула (3.1) превращается в формулу Балакришнана (см., например, [9, с. 358]). Полагая в теореме 6.1 $m=n=1$; $\psi_1(s) = -(-s)^\alpha$; $\psi_2(s) = -(-s)^\beta$; $\alpha,\beta \in (0;1)$, получаем формулу Ватанабе ([9, с. 366, (31)]). Из теоремы 5.1 следует, что $(-A)^\alpha \to -A(\alpha \to 1)$ в слабом резольвентном смысле. Если A порождает голоморфную полугруппу, то по теореме 8.2 $\sigma((-A)^\alpha) = \{(-\lambda)^\alpha : \lambda \in \sigma(A)\}$. С целью применить теорему 9.1 заметим, что $\psi(z)$ есть та ветвь функции $-(-z)^\alpha$ в области $\{\mathrm{Re}\, z<0\}$, которая отрицательна при $z=s<0$. Функция $\psi(z)$ голоморфна в $\{0<\arg z<2\pi\}$ и отображает полуплоскость $\{0<\arg z<\pi\}$ в себя. Следовательно, этим свойством обладает и функция $f_\lambda(z) = 1/(\lambda+(-z)^\alpha)$ при $\lambda>0$ ($(-z)^\alpha \notin (-\infty;0)$ при $z \notin (0;+\infty)$). Таким образом, справедлива формула (9.2). Считая τ_λ распределением, найдем его по формуле (9.7). Поскольку $(-\xi \pm i0)^\alpha = e^{\pm i\pi\alpha}\xi^\alpha$ при $\xi>0$ ([14, с. 83]), то вычисления в алгебре граничных значений голоморфных функций дают ([15, §29.7, с. 341])

$$\tau_\lambda(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\lambda+e^{-i\pi\alpha}\xi^\alpha} - \frac{1}{\lambda+e^{i\pi\alpha}\xi^\alpha}\right) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{\xi^\alpha}{\lambda^2+2\lambda\xi^\alpha\cos\pi\alpha+\xi^{2\alpha}},$$

что в соединении с (9.2) приводит к упоминавшейся выше формуле Като (см., например, [10, с. 144, (5.19)]).

2. Пусть $\psi(s) = -\log(1-s)$, $s<0$. Это функция из $\mathcal{T}_1$ с интегральным представлением

$$\psi(s) = \int\limits_0^\infty (e^{su}-1)u^{-1}e^{-u}du.$$

Следовательно, по определению 3.1

$$-\log(I-A)x = \int\limits_0^\infty (T(u)-I)xu^{-1}e^{-u}du \quad (x \in D(A)).$$

В этом примере

$$g_t(s) = (1-s)^{-t} = \Gamma(t)^{-1} \int_0^\infty e^{su} u^{t-1} e^{-u} du,$$

что можно проверить с помощью таблиц преобразования Лапласа, а потому

$$g_t(A) = (I-A)^{-t} = \Gamma(t)^{-1} \int_0^\infty T(u) u^{t-1} e^{-u} du.$$

Поскольку $\psi(z) = -\log(1-z)$, где выбирается та ветвь логарифма в области $\{-\pi < \arg z < \pi\}$, которая положительна на $(1; +\infty)$, то, как нетрудно убедиться, выполнены все условия теоремы 9.1. Как и в примере 1, найдем „ядро Като“ τ_λ, соответствующее функции ψ, используя формулу (9.7). Поскольку

$$\log(x \pm i0) = \log|x| \pm i\pi\theta(-x),$$

где θ — функция Хевисайда ([14, с. 43, пример 6; с. 51, пример 4]), то

$$\begin{aligned}\tau_\lambda(\xi) &= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\lambda + \log(1-\xi-i0)} - \frac{1}{\lambda + \log(1-\xi+i0)}\right) \\ &= \frac{\theta(\xi-1)}{\pi^2 + (\lambda + \log|\xi-1|)^2}.\end{aligned}$$

Таким образом, при $\lambda > 0$

$$R(\lambda, -\log(I-A)) = \int_1^\infty \frac{R(\xi, A)d\xi}{\pi^2 + (\lambda + \log(\xi-1))^2}.$$

Пусть, в частности, $X = C_0(\mathbb{R}^n)$ есть пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$, исчезающих на бесконечности, с sup-нормой, и пусть Δ есть замыкание сужения оператора Лапласа на пространство Шварца $S(\mathbb{R}^n)$. Известно (см., например, [16, с. 281, пример 5]), что Δ есть генератор сжимающей C_0-полугруппы $T(u)$, определяемой сверткой с функцией $y \mapsto (4\pi u)^{-n/2} \times e^{-|y|/4u}$ (определение генератора в [16] отличается знаком от принятого в данной работе). Используя формулу 3.471.9 из [17, с. 354], можно убедиться, что полугруппа $(I-\Delta)^{-t}$ задается сверткой с функцией

$$y \mapsto \pi^{-n/2}\Gamma(t)^{-1} 2^{1-t-n/2} |y|^{t-n/2} K_{t-n/2}(|y|/\sqrt{2})$$

(„бесселев потенциал", см., например, [13, с. 138; 18, §27]), где K_ν — цилиндрическая функция Макдональда. Как показано выше, генератор этой полугруппы находится по формуле $(x \in D(\Delta))$

$$-\log(I-\Delta)x(s) = \int\limits_0^\infty \left((4\pi u)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|s-y|^2}{4u}}x(y)dy - x(s)\right)\frac{du}{ue^u}$$

$$= \int\limits_0^\infty (4\pi u)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|s-y|^2}{4u}}(x(y)-x(s))dy\frac{du}{ue^u}.$$

Меняя порядок интегрирования и снова применяя формулу 3.471.9 из [17], получаем окончательно, что генератор бесселева потенциала есть $(x \in D(\Delta))$

$$-\log(I-\Delta)x(s) = 2(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{x(y)-x(s)}{|y-s|^{n/2}}K_{n/2}\left(\frac{|y-s|}{\sqrt{2}}\right)dy.$$

3. Рассмотрим функцию $(s<0)$ $\psi(s) = -\operatorname{arch}(1-s) = -\log(1-s+\sqrt{(1-s)^2-1})$ из $\mathcal{T}_1$. При помощи дифференцирования убеждаемся, что

$$\psi(s) = \int\limits_0^\infty (e^{su}-1)I_0(u)\frac{du}{ue^u}$$

(I_t — функция Бесселя чисто мнимого аргумента). Поэтому

$$-\operatorname{arch}(I-A)x = \int\limits_0^\infty (T(u)-I)xI_0(u)\frac{du}{ue^u} \quad (x \in D(A)).$$

В рассматриваемом случае

$$g_t(s) = (1-s+\sqrt{(1-s)^2-1})^{-t} = \int\limits_0^\infty e^{su}tI_t(u)\frac{du}{ue^u},$$

что также можно проверить с помощью таблиц преобразования Лапласа. Следовательно,

$$g_t(A) = (I-A+\sqrt{(I-A)^2-I})^{-t} = \int\limits_0^\infty T(u)tI_t(u)\frac{du}{ue^u}.$$

Для проверки выполнения условий теоремы 9.1 заметим, что $\psi(z) = -\operatorname{arch}(1-z)$, где ветвь арккосинуса в области $\mathbb{C}\setminus(-\infty;1]$ выделяется условием $\operatorname{arch} x > 0$ при $x > 1$. Тогда $\psi(z)$ голоморфна в области $\{0 < \arg z < 2\pi\}$. Остальные свойства $\psi(z)$ вытекают из представления $\psi(z) = -\log w(1-z)$, где $w(\zeta) = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$ — та ветвь функции, обратной функции Жуковского, для которой $w(x) > 1$ при $x > 1$. Пользуясь свойствами функции $w(\zeta)$, нетрудно проверить, что $\arg w(x \pm i0) = \pm\eta(x)$, где $\eta(x) = \pi$ при $x \leqslant -1$, $\eta(x) = \arccos x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\eta(x) = 0$ при $x \geqslant 1$, а потому

$$\log w(x \pm i0) = \log|x + \sqrt{x^2-1}| \pm i\eta(x).$$

Поскольку

$$f_\lambda(\xi \pm i0) = \frac{1}{\lambda + \log w(1 - \xi \mp i0)},$$

то формула (9.7) дает

$$\tau_\lambda(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{\eta(1-\xi)}{\eta^2(1-\xi) + (\lambda + \log|1 - \xi + \sqrt{(1-\xi)^2 - 1}|)^2}.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} &R(\lambda, -\operatorname{arch}(I - A)) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^2 \frac{R(\xi, A)\arccos(1-\xi)d\xi}{\arccos^2(1-\xi) + (\lambda + \log|1-\xi+\sqrt{(1-\xi)^2-1}|)^2} \\ &\quad + \int_2^\infty \frac{R(\xi, A)d\xi}{\pi^2 + (\lambda + \log|1-\xi+\sqrt{(1-\xi)^2-1}|)^2}. \end{aligned}$$

4. Функции из $\mathcal{T}_n$ при $n > 1$ можно строить, используя суммы функций из $\mathcal{T}_1$ (от различных аргументов), а также операцию композиции. Следующая теорема дает, в частности, еще один способ построения функций из $\mathcal{T}_2$.

Теорема 11.1. *Пусть $\psi_1 \in \mathcal{T}_1$, причем*

$$\psi_1(s) = \int_0^\infty (e^{su} - 1)f(u)du \quad \text{и} \quad \omega := \int_0^\infty uf(u)du \neq \infty$$

для некоторой измеримой функции f на $\mathbb{R}_+$. Тогда функция

$$\psi(s_1, s_2) := \frac{\psi_1(s_1) - \psi_1(s_2)}{s_1 - s_2} - \omega$$

принадлежит $\mathcal{T}_2$*, и для любых коммутирующих операторов* A_1*,* A_2 *из* $\mathrm{Gen}(X)$ *таких, что оператор* $(A_1 - A_2)^{-1}$ *существует и ограничен, имеем*

$$\psi(A_1, A_2)x = (A_1 - A_2)^{-1}(\psi_1(A_1) - \psi_1(A_2))x - \omega x \quad (x \in D(A)).$$

Доказательство. Сделав в интеграле

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (e^{s_1 u_1 + s_2 u_2} - 1) f(u_1 + u_2) du_1 du_2$$

замену переменных $v = u_1 + u_2$, $w = u_1 - u_2$, получаем, что он равен $\psi(s_1, s_2)$, что доказывает первое утверждение теоремы. Таким образом, при $x \in D(A)$

$$\psi(A_1, A_2)x = \int_0^\infty \int_0^\infty (T_1(u_1)T_2(u_2) - I)xf(u_1 + u_2)du_1 du_2.$$

Полагая и здесь $v = u_1 + u_2$, $w = u_1 - u_2$, имеем

$$\psi(A_1, A_2)x = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(v)dv \int_{-v}^{v} \Big(T_1\Big(\frac{v+w}{2}\Big)T_2\Big(\frac{v-w}{2}\Big) - I\Big)xdw. \tag{11.1}$$

Покажем, что $(x \in D(A))$

$$\frac{1}{2}\int_{-v}^{v} \Big(T_1\Big(\frac{v+w}{2}\Big)T_2\Big(\frac{v-w}{2}\Big) - I\Big)xdw = (A_1 - A_2)^{-1}(T_1(v) - T_2(v))x - vx. \tag{11.2}$$

Для этого рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}(A_1 - A_2)&\frac{1}{2}\int_{-v}^{v} T_1\Big(\frac{v+w}{2}\Big)T_2\Big(\frac{v-w}{2}\Big)xdw \\ &= \frac{1}{2}A_1\int_{-v}^{v} T_1\Big(\frac{v+w}{2}\Big)T_2\Big(\frac{v-w}{2}\Big)xdw - \frac{1}{2}A_2\int_{-v}^{v} T_2\Big(\frac{v-w}{2}\Big)T_1\Big(\frac{v+w}{2}\Big)xdw.\end{aligned} \tag{11.3}$$

Учитывая замкнутость оператора A_1 и интегрируя по частям, получаем, что

$$\frac{1}{2}A_1\int\limits_{-v}^{v}T_1\Big(\frac{v+w}{2}\Big)T_2\Big(\frac{v-w}{2}\Big)x\,dw$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-v}^{v}T_2\Big(\frac{v-w}{2}\Big)A_1T_1\Big(\frac{v+w}{2}\Big)x\,dw=\int\limits_{-v}^{v}T_2\Big(\frac{v-w}{2}\Big)d_wT_1\Big(\frac{v+w}{2}\Big)x$$

$$=T_2\Big(\frac{v-w}{2}\Big)T_1\Big(\frac{v+w}{2}\Big)x\Big|_{w=-v}^{w=v}-\int\limits_{-v}^{v}T_1\Big(\frac{v+w}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{2}\Big)A_2T_2\Big(\frac{v-w}{2}\Big)x\,dw$$

$$=T_1(v)x-T_2(v)x+\frac{1}{2}\int\limits_{-v}^{v}A_2T_2\Big(\frac{v-w}{2}\Big)T_1\Big(\frac{v+w}{2}\Big)x\,dw.$$

Подставляя это в (11.3), имеем

$$(A_1-A_2)\frac{1}{2}\int\limits_{-v}^{v}T_1\Big(\frac{v+w}{2}\Big)T_2\Big(\frac{v-w}{2}\Big)x\,dw=(T_1(v)-T_2(v))x,$$

откуда сразу следует (11.2). Подставляя в свою очередь (11.2) в (11.1), получаем и последнее утверждение теоремы.

В заключение отметим, что основные результаты данной работы анонсированы в [19].

Список литературы

[1] Schoenberg I. J., *Metric spaces and completely monotone functions*, Ann. of Math. (2) **39** (1938), 811–841.

[2] Хилле Э., Филлипс Р., *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.

[3] Ахиезер Н. И., *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматгиз, М., 1961.

[4] Berg Ch., Christensen J. P. R., Ressel P., *Harmonic analysis on semigroups. Theory of positive definite and related functions*, Grad. Texts in Math., vol. 100, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1984.

[5] Devinatz A., Nussbaum A. E., *Real characters of certain semigroups with applications*, Duke Math. J. **28** (1961), no. 2, 221–237.

[6] Клемент Ф. и др., *Однопараметрические полугруппы: Абстрактные дифференциальные уравнения с прил.*, Мир, М., 1992.

[7] Бурбаки Н., *Интегрирование. (Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах)*, Наука, М., 1977.

[8] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[9] Иосида К., *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.

[10] Крейн С. Г., *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967.

[11] Крейн М. Г., Нудельман А. А., *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П. Л. Чебышева и А. А. Маркова и их дальнейшее развитие*, Наука, М., 1973.

[12] Брычков Ю. А., Прудников А. П., *Интегральные преобразования обобщенных функций*, Наука, М., 1977.

[13] Владимиров В. С., *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1976.

[14] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., *Обобщенные функции и действия над ними*, Обобщенные функции, вып. 1, Физматгиз, М., 1959.

[15] Владимиров В. С., *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964.

[16] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики*. Т. 2. *Гармонический анализ. Самосопряженность*, Мир, М., 1978.

[17] Градштейн И. С., Рыжик И. М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, 4-е изд., перераб., Физматгиз, М., 1963.

[18] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.

[19] Миротин А. Р., *Многомерное функциональное исчисление от генераторов C_0-полугрупп*, VII Белорусская математическая конференция: Тез. докл., Минск, 1996.

Гомельский государственный
университет им.Ф. Скорины
246699, Беларусь
Гомель, Советская, 104

Поступило 10 октября 1996 г.