On the T-calculus of generators for C-0-semigroups

Article in Siberian Mathematical Journal · May 1998
DOI: 10.1007/BF02673905

1 author:

Adolf Mirotin
Francisk Skorina Gomel State University

А. Р. Миротин, О $\mathscr{T}$-исчислении генераторов C_0-полугрупп, *Сиб. матем. журн.*, 1998, том 39, номер 3, 571–582

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 1998. Том 39, № 3

УДК 517.986.7:517.983.23

О $\mathscr{T}$-ИСЧИСЛЕНИИ ГЕНЕРАТОРОВ C_0-ПОЛУГРУПП

А. Р. Миротин

Полезность функциональных исчислений в теории операторов и ее приложениях обусловлена тем, что с их помощью строятся новые операторы, и тем, что эти исчисления позволяют использовать при изучении операторов теоретико-функциональные методы. В настоящей работе строится функциональное исчисление генераторов C_0-полугрупп в банаховых пространствах, использующее функции класса Шенберга $\mathscr{T}$ (см. [1, с. 256]). Класс $\mathscr{T}$ есть множество всех допустимых замен переменных в классе абсолютно монотонных на $(-\infty; 0)$ функций и представляет собой конус, замкнутый относительно композиции. Он содержит ряд важных функций, в том числе положительные дробные степени, логарифм и арккосинус. Построенное исчисление по существу единственно, согласовано с исчислением Хилле — Филлипса [2, гл. XV] и обладает хорошими аппаратными свойствами. В частности, на функции класса $\mathscr{T}$ переносится известная формула Като для резольвент дробных степеней операторов (см. ниже теорему 7).

Определение 1. Функция $\psi : (-\infty; 0) \to (-\infty; 0)$ *принадлежит классу* $\mathscr{T}$, если она дифференцируема и ее производная абсолютно монотонна на $(-\infty; 0)$.

В этом случае ψ допускает интегральное представление ($s < 0$)

$$\psi(s) = c_0 + c_1 s + \int\limits_0^\infty (e^{us} - 1)\, d\mu(u), \tag{1}$$

где $c_0 = \psi(-0) \leqslant 0$, а число $c_1 \geqslant 0$ и положительная мера μ, сосредоточенная на $(0; +\infty)$, определяются единственным образом (см., например, [1, с. 256, 257]).

Всюду ниже T — однопараметрическая C_0-полугруппа линейных операторов в банаховом пространстве X, обладающая, если не оговорено противное, свойством $\|T(u)\| \leqslant M$ при $u \geqslant 0$, $M = \mathrm{const}$, A — генератор полугруппы T с областью определения $D(A)$ и резольвентой $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ (I — единичный оператор в X), ψ — функция из $\mathscr{T}$.

Определение 2. Для функции ψ из $\mathscr{T}$, определенной равенством (1), положим при $x \in D(A)$

$$\psi(A)x = c_0 x + c_1 Ax + \int\limits_0^\infty (T(u) - I)x\, d\mu(u) \tag{2}$$

(см. также замечание после теоремы 1).

Покажем, что интеграл в (2) существует в смысле Бохнера. При x из $D(A)$ найдутся такие числа b, $\delta > 0$, что $\|(T(u) - I)x\| \leqslant bu$ при $u \in (0;\delta)$. Поэтому

$$\int\limits_{(0;\delta)} \|(T(u) - I)x\|\, d\mu(u) \leqslant b \int\limits_{(0;\delta)} u\, d\mu(u).$$

Так как $1 - e^{su} \sim (-s)u$ $(u \to 0)$, то при достаточно малом δ последний интеграл сходится вместе с интегралом в (1). Далее, при $s < 0$

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} e^{su}\, d\mu(u) \leqslant \frac{1}{\delta} \int\limits_{0}^{\infty} ue^{su}\, d\mu(u) \leqslant \frac{1}{\delta}\psi'(s).$$

Снова используя (1), отсюда получаем, что $\mu([\delta;+\infty)) < \infty$, поэтому интеграл $\int\limits_{[\delta;+\infty)} \|T(u) - I\|\, d\mu(u)$ также сходится, что и завершает доказательство корректности определения 2.

Теорема 1. *Оператор $\psi(A)$ является генератором некоторой C_0-полугруппы $g(A)$, удовлетворяющей условию $\|g_t(A)\| \leqslant Me^{t\psi(-0)}$ $(t \geqslant 0)$.*

Если $\limsup\limits_{u \to +0} \|I - T(u)\| < 2$, то полугруппа $g(A)$ также обладает аналогичным свойством, а потому голоморфна.

Доказательство. Предположим сначала, что $\psi(-0) = 0$, и для $t \geqslant 0$ положим $g_t(s) = e^{t\psi(s)}$ $(s < 0)$. Тогда g_t абсолютно монотонна на $(-\infty;0)$ и $g_t(s) \leqslant 1$. По теореме Бернштейна — Уиддера существует такая ограниченная положительная мера ν_t на $[0;+\infty)$, что при $s \leqslant 0$

$$g_t(s) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{su}\, d\nu_t(u) = (\mathscr{L}\nu_t)(-s) \tag{3}$$

(здесь и далее $\mathscr{L}$ обозначает преобразование Лапласа). При этом $\|\nu_t\| = g_t(-0) = 1$. Поскольку $g_{t+r}(s) = g_t(s)g_r(s)$, то (ν_t) есть сверточная полугруппа вероятностных мер на $[0;+\infty)$. Теперь, как в [2, гл. XV], при $x \in X$ положим

$$g_t(A)x = \int\limits_{0}^{\infty} T(u)x\, d\nu_t(u). \tag{4}$$

Тогда $g(A)$ является полугруппой ограниченных операторов на X со свойством $\|g_t(A)\| \leqslant Me^{t\psi(-0)} \leqslant M$. В частности, $g(A)$ есть C_0-полугруппа.

Покажем, что $\psi(A)$ — генератор $g(A)$, используя прием из [3, с. 515]. Дифференцируя (3) по s, получаем, что $\psi'(s)g_t(s) = \mathscr{L}(t^{-1}u\, d\nu_t(u))(-s)$, откуда следует, что

$$\psi'(s) = \lim_{t \to +0} \mathscr{L}(t^{-1}u\, d\nu_t(u))(-s).$$

С другой стороны, из (1) выводим, что

$$\psi'(s) = c_1 + \int\limits_{0}^{\infty} e^{su}u\, d\mu(u) = \mathscr{L}(c_1\, d\varepsilon_0(u) + u\, d\mu(u))(-s),$$

где ε_0 — мера единичной массы, сосредоточенная в нуле. Следовательно [3, с. 488, теорема 2а],

$$t^{-1}u\,d\nu_t(u) \to c_1\,d\varepsilon_0(u) + u\,d\mu(u) \quad (t \to +0)$$

(сходимость в широкой топологии). Полагая для $x \in D(A)$ функцию $u \mapsto (T(u)x - x)u^{-1}$ равной Ax при $u = 0$, получим непрерывную функцию на $[0; +\infty)$, стремящуюся к нулю при $u \to +\infty$. Поэтому при $x \in D(A)$

$$\lim_{t\to+0} \frac{g_t(A)x - x}{t} = \lim_{t\to+0} \int_0^\infty (T(u)x - x)u^{-1}t^{-1}u\,d\nu_t(u)$$

$$= c_1 Ax + \int_0^\infty (T(u) - I)x\,d\mu(u) = \psi(A)x.$$

Если $\limsup\limits_{u\to+0} \|I - T(u)\| < 2$, то найдутся такие $\delta > 0$, $b \in (0; 2)$, что $\|I - T(u)\| \leqslant b$ при $u \in (0; \delta)$. Тогда при $x \in X$

$$\|(I - g_t(A))x\| = \left\| \int_0^\infty (I - T(u))x\,d\nu_t(u) \right\| \leqslant \left(b + \int_\delta^\infty \|I - T(u)\| d\,\nu_t(u) \right) \|x\|. \quad (5)$$

Так как при $p > 0$

$$\lim_{t\to+0} (\mathscr{L}\nu_t)(p) = 1 = (\mathscr{L}\varepsilon_0)(p),$$

то (см., например, [3, с. 486, теорема 2]) $\nu_t \to \varepsilon_0$ в узкой топологии $(t \to +0)$. Из (5) получаем теперь $\limsup\limits_{t\to+0} \|I - g_t(A)\| \leqslant b < 2$, так что полугруппа $g(A)$ голоморфна [4, 5].

Наконец, если $c_0 < 0$, то строим полугруппу $g^1(A)$, отвечающую функции $\psi - c_0$ из $\mathscr{T}$, и полагаем $g_t(A) = e^{c_0 t} g_t^1(A)$.

Следствие. *Пусть банахово пространство X упорядочено. Оператор $\psi(A)$ будет генератором позитивной полугруппы, если таковым является A.*

Замечание. Пусть T — произвольная C_0-полугруппа, удовлетворяющая оценке $\|T(u)\| \leqslant Me^{\omega t}$, $\omega > 0$, с генератором A и функция ψ на $(-\infty; \omega)$ такова, что $\psi_1(s) = \psi(s+\omega) \in \mathscr{T}$. Поскольку оператор $A - \omega I$ является генератором равномерно ограниченной C_0-полугруппы $e^{-\omega u}T(u)$, мы можем положить $\psi(A) = \psi_1(A - \omega I)$. Тогда теорема 1 остается справедливой с оценкой $\|g_t(A)\| \leqslant Me^{t\psi(\omega - 0)}$.

В [2, гл. XV] построено функциональное исчисление генераторов полугрупп для функций вида $\psi(s) = (\mathscr{L}a)(-s)$, где a — мера на $[0; +\infty)$. Возникающие при этом операторы обозначены там через $\Psi(a, A)$. Покажем, что это исчисление согласовано с исчислением, рассматриваемым в данной работе.

Теорема 2. *Функция $\psi(s)$ из $\mathscr{T}$ имеет вид $(\mathscr{L}a)(-s)$, где a — мера на $[0; +\infty)$, $s < 0$, тогда и только тогда, когда $\psi(-\infty) \neq -\infty$. При этом условии $\psi(A) = \Psi(a, A)$.*

Доказательство. Пусть $\psi(s) = (\mathscr{L}a)(-s)$, $s < 0$. Тогда в силу тауберовой теоремы для преобразования Лапласа будет $\psi(-\infty) = a(\{0\}) \neq -\infty$.

Обратно, пусть $\psi \in \mathscr{T}$ и $\psi(-\infty) \neq -\infty$. Отсюда сразу следует, что в (1) $c_1 = 0$ и мера μ ограничена. Тогда $\psi(s) = (\mathscr{L}a)(-s)$, где $a = \mu + (c_0 - \|\mu\|)\varepsilon_0$. Поэтому при $x \in D(A)$

$$\psi(A)x = c_0 x + \int\limits_0^\infty (T(u) - I)x\, d\mu(u) = \int\limits_0^\infty T(u)x\, da(u) = \Psi(a, A)x,$$

что и требовалось доказать.

Класс $\mathscr{T}$ есть конус по отношению к поточечному сложению и умножению на скаляры, устойчивый относительно композиции. Ясно, что отображение $\psi \mapsto \psi(A)$ аддитивно и положительно однородно. Справедлива также теорема о сложной функции.

Теорема 3. *Если $\psi_1, \psi_2 \in \mathscr{T}$, то $(\psi_1 \circ \psi_2)(A) = \psi_1(\psi_2(A))$.*

Доказательство. Пусть $e^{t\psi_i(s)} = (\mathscr{L}\nu_t^i)(-s)$ (см. (3)). Если мы положим

$$\nu_t(r) = \int\limits_0^\infty \nu_s^2(r)\, d\nu_t^1(s)$$

(меру на $\mathbb{R}$ и соответствующую ей функцию распределения обозначаем одинаково), то $e^{t(\psi_1 \circ \psi_2)(s)} = (\mathscr{L}\nu_t)(-s)$. Как следует из доказательства теоремы 1, полугруппа

$$g_s^2(A) = \int\limits_0^\infty T(r)\, d\nu_s^2(r)$$

имеет генератор $\psi_2(A)$. Аналогично полугруппа

$$g_t^1(\psi_2(A)) = \int\limits_0^\infty g_s^2(A)\, d\nu_t^1(s)$$

имеет генератор $\psi_1(\psi_2(A))$. С другой стороны,

$$\int\limits_0^\infty g_s^2(A)\, d\nu_t^1(s) = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty T(r)\, d\nu_s^2(r) \right) d\nu_t^1(s) = \int\limits_0^\infty T(r)\, d\nu_t(r),$$

поэтому полугруппа $g_t^1(\psi_2(A))$ имеет генератор $(\psi_1 \circ \psi_2)(A)$, что завершает доказательство.

Отметим следующее свойство непрерывности рассматриваемого исчисления.

Теорема 4. *Пусть $\psi_n \in \mathscr{T}$ $(n = 0, 1, \dots)$, $\psi_n(s) \to \psi_0(s)$ поточечно при $s < 0$ и $\psi_n(-0) \to \psi_0(-0)$. Тогда $R(\lambda, \psi_n(A)) \to R(\lambda, \psi_0(A))$ равномерно для всех λ с $\operatorname{Re}\lambda > 0$ $(n \to \infty)$.*

Доказательство. При $t \geqslant 0$ функции $g_t^n(s) = (\mathscr{L}\nu_t^n)(-s)$ $(n = 1, 2, \dots)$ сходятся поточечно к $g_t^0(s)$ на множестве $s \leqslant 0$ $(n \to \infty)$. Применяя подходящий вариант теоремы непрерывности для преобразования Лапласа, получаем отсюда, что $\left\|g_t^n(A) - g_t^0(A)\right\| \to 0$ $(n \to \infty)$ при $t \geqslant 0$ (см (4)). Осталось воспользоваться равенством $(\operatorname{Re}\lambda > 0, n = 0, 1, \dots)$

$$R(\lambda, \psi_n(A)) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} g_t^n(A)\, dt$$

и теоремой Лебега о мажорированной сходимости.

Замечание. Пусть $\mathrm{Gen}(X)$ есть множество генераторов ограниченных C_0-полугрупп в X и $A \in \mathrm{Gen}(X)$ порождает полугруппу T. Существует единственное непрерывное в смысле теоремы 4 аддитивное положительно однородное отображение $\mathcal{T} \to \mathrm{Gen}(X)$ такое, что $-1 \mapsto -I$, $s \mapsto A$, $e^{su} - 1 \mapsto T(u) - I$. Это отображение $\psi \mapsto \psi(A)$, задаваемое определением 2. Для доказательства достаточно функцию ψ из $\mathcal{T}$ аппроксимировать суммами вида

$$\sigma(s) = c_0 + c_1 s + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e^{su_i} - 1), \quad \alpha_i > 0,$$

и воспользоваться свойствами рассматриваемого отображения и теоремой 4.

$\mathcal{T}$-исчисление устойчиво в следующем смысле (см. также теорему 8).

Теорема 5. *Пусть последовательность C_0-полугрупп (T_n) равномерно ограничена в совокупности, A_n — генератор T_n $(n = 1, 2, \ldots)$, $\psi \in \mathcal{T}$. Если $R(\lambda_0, A_n) \to R(\lambda_0, A_0)$ сильно, где λ_0 с $\mathrm{Re}\,\lambda_0 > 0$ фиксировано, а A_0 плотно определен и $A_n x \to A_0 x$ при некотором $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} D(A_n)$, то и $\psi(A_n)x \to \psi(A_0)x$ $(n \to \infty)$.*

Доказательство. По теореме Троттера — Като существует такая C_0-полугруппа T_0 с генератором A_0, что $T_n(u) \to T_0(u)$ сильно, причем $\|T_0(u)\| \leqslant M$, если $\|T_n(u)\| \leqslant M$. При любом $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} D(A_n)$, $\delta > 0$ и $n = 0, 1, \ldots$

$$\psi(A_n)x = c_0 x + c_1 A_n x + \int\limits_{(0;\delta]} \frac{T_n(u)x - x}{u} u\, d\mu(u) + \int\limits_{(\delta;+\infty)} (T_n(u)x - x)\, d\mu(u). \quad (6)$$

Как отмечено при доказательстве корректности определения 2, мера $u\, d\mu(u)$ ограничена на $(0;\delta]$ (при достаточно малом δ) и $\mu([\delta;+\infty)) < \infty$. Так как последовательность (T_n) равномерно ограничена, второй интеграл в (6) сходится к

$$\int\limits_{(\delta;+\infty)} (T_0(u)x - x)\, d\mu(u).$$

Используя [2, теорема 11.5.4], при $u > 0$ имеем

$$\left\| \frac{T_n(u)x - x}{u} \right\| = \left\| \frac{1}{u} \int\limits_0^u T_n(\tau) A_n x\, d\tau \right\| \leqslant M \|A_n x\| \leqslant \mathrm{const}.$$

Таким образом, к первому интегралу в (6) также применима теорема об ограниченной сходимости, что и завершает доказательство.

Заметим, что уже для функции $e^s - 1$ из $\mathcal{T}$ теорема об отображении спектра, вообще говоря, неверна (см. например, [6, с. 218]). Мы покажем, что она справедлива для голоморфных полугрупп. Далее $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$, $\sigma_r(A)$ обозначают спектр, точечный и остаточные спектры оператора A соответственно. Через $\psi(z)$ будем обозначать голоморфное продолжение функции ψ из $\mathcal{T}$ в полуплоскость $\{\mathrm{Re}\, z \leqslant 0\}$, которое получается, если в (2) положить $A = z$, $\mathrm{Re}\, z \leqslant 0$, $T(u) = e^{zu}$.

Теорема 6. *Предположим, что полугруппы* T, $g(A)$ *голоморфны (что, например, выполняется, если* $\limsup\limits_{u\to+0}\|I-T(u)\|<2$), $\psi\in\mathcal{T}$. *Если* $\psi(-\infty)=-\infty$, *то*

а) $\sigma(\psi(A))=\psi(\sigma(A))$,

б) $\sigma_p(\psi(A))=\psi(\sigma_p(A))$,

в) $\sigma_p(\psi(A))\cup\sigma_r(\psi(A))=\psi(\sigma_p(A)\cup\sigma_r(A))$.

Доказательство. Поскольку полугруппа $g(A)$ голоморфна, она становится равномерно непрерывной (см., например, [7]). Следовательно (см. там же или [6, предложение 8.5]), при $t\geqslant 0$

$$e^{t\sigma(\psi(A))}=\sigma(g_t(A))\setminus\{0\}.$$

Далее, в силу [2, теорема 16.4.1]

$$\sigma(g_t(A))=e^{t\psi(\sigma(A))}\cup\{\nu_t(\{0\})\},$$

причем по тауберовой теореме для преобразования Лапласа будет $\nu_t(\{0\})=g_t(-\infty)=0$. Таким образом, при всех $t>0$

$$e^{t\sigma(\psi(A))}=e^{t\psi(\sigma(A))}.$$

В силу голоморфности соответствующих полугрупп спектры $\sigma(A)$, $\sigma(\psi(A))$ лежат внутри некоторого угла $Y=\{s+iy:|y|\leqslant -ks,\ s\leqslant 0\}$, где $k>0$ фиксировано. Зафиксируем $s_0\leqslant 0$ и обозначим через E, P сечения множеств $\sigma(\psi(A))$, $\psi(\sigma(A))$ вертикальной прямой $\{s=s_0\}$. Тогда $e^{itE}=e^{itP}$ при $t>0$. Множество E ограничено. Докажем ограниченность P. Прежде всего в силу теоремы Линделефа (см., например, [8, с. 36]) существует $\lim\limits_{z\in Y,z\to 0}\psi(z)=\psi(-0)$, значит, ψ ограничена на множестве $Y\cap\{-b<s\leqslant 0\}$ для некоторого $b>0$. Поэтому далее будем предполагать, что $s\leqslant -b$. Из (2), где положено $T(u)=e^{(s+iy)u}$, имеем (можно считать, что $c_0=0$)

$$\operatorname{Re}\psi(z)=c_1 s+\int_0^\infty e^{su}(\cos yu-1)\,d\mu(u)\leqslant 0,$$

$$\operatorname{Im}\psi(z)=c_1 y+\int_0^\infty e^{su}\sin yu\,d\mu(u).$$

Найдется такая константа $k_1\geqslant k$, что при всех $z=s+iy$ из Y, $s\leqslant -b$, $u\in(0;+\infty)$ выполняется неравенство

$$|e^{su}\sin yu|\leqslant k_1(1-e^{su}\cos yu).$$

В самом деле, поскольку

$$\lim_{u\to 0}\frac{|e^{su}\sin yu|}{1-e^{su}\cos yu}=(-s)|y|\leqslant k,$$

то при достаточно малом $\delta>0$ можно взять $k_1=\max\{k,1/(e^{b\delta}-1)\}$. Тогда при $z\in Y\cap\{s\leqslant -b\}$ справедливо неравенство $|\operatorname{Im}\psi(z)|\leqslant -k_1\operatorname{Re}\psi(z)$, влекущее ограниченность множества P. Выбирая теперь $t>0$ настолько малым, чтобы функция $\zeta\mapsto e^{t\zeta}$ была однолистной в горизонтальной полосе, содержащей $i(E\cup P)$, получаем, что $E=P$, откуда и следует утверждение а). Утверждения б) и в) доказываются аналогично с использованием [6, предложение 8.3; 2, теоремы 16.6.1, 16.6.2]. Теорема доказана.

Установим формулу для резольвенты оператора $\psi(A)$, обобщающую формулу Като (см., например, [9, с. 144, (5.19)], а также пример 1 ниже).

Теорема 7. *Пусть $\psi(-\infty) = -\infty$ и при всех $\lambda > 0$ функция $f_\lambda(z) = 1/(\lambda - \psi(z))$ продолжается до голоморфной в области $\{0 < \arg z < 2\pi\}$ и отображает полуплоскость $\{0 < \arg z < \pi\}$ в свое замыкание. Тогда существует положительная мера τ_λ на $[0; +\infty)$, преобразование Стилтьеса которой есть*

$$\int_0^\infty \frac{d\tau_\lambda(\xi)}{\xi + z} = f_\lambda(-z) \quad (\operatorname{Re} z > 0,\ \lambda > 0), \tag{7}$$

и справедливо равенство

$$R(\lambda, \psi(A)) = \int_0^\infty R(\xi, A)\, d\tau_\lambda(\xi). \tag{8}$$

Доказательство. Функция $f_\lambda(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы М. Г. Крейна [1, с. 159], и $f_\lambda(-\infty) = 0$. Поэтому уравнение (7) разрешимо. Так как $\operatorname{Re}\psi(-z) \leqslant 0$ при $\operatorname{Re} z > 0$ (см. доказательство теоремы 6), то для $\lambda > 0$

$$\frac{1}{\lambda - \psi(-z)} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\psi(-z)}\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_0^\infty e^{-zu}\, d\nu_t(u) \right) dt.$$

С другой стороны, в силу (7)

$$\frac{1}{\lambda - \psi(-z)} = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-zu} e^{-u\xi}\, du \right) d\tau_\lambda(\xi) = \int_0^\infty e^{-zu} \left(\int_0^\infty e^{-u\xi}\, d\tau_\lambda(\xi) \right) du.$$

Таким образом,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_0^\infty e^{-zu}\, d\nu_t(u) \right) dt = \int_0^\infty e^{-zu} \left(\int_0^\infty e^{-u\xi}\, d\tau_\lambda(\xi) \right) du. \tag{9}$$

В силу тауберовой теоремы $\nu_t(0) = g_t(-\infty) = 0$. Следовательно, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^\infty e^{-zu}\, d\nu_t(u) = e^{-zu}\nu_t(u)\Big|_{u=0}^{+\infty} - \int_0^\infty (-z) e^{-zu} \nu_t(u)\, du = z \int_0^\infty e^{-zu} \nu_t(u)\, du.$$

Пусть $\Phi(u)$ есть первообразная (непрерывной) функции $\int_0^\infty e^{-u\xi}\, d\tau_\lambda(\xi)$, причем $\Phi(0) = 0$. Тогда, поскольку $e^{-zu}\Phi(u) \to 0$ $(u \to +\infty)$, то

$$\int_0^\infty e^{-zu} \left(\int_0^\infty e^{-u\xi}\, d\tau_\lambda(\xi) \right) du = e^{-zu}\Phi(u)\Big|_{u=0}^{+\infty} - \int_0^\infty \Phi(u)(-z)e^{-zu}\, du$$
$$= z \int_0^\infty \Phi(u) e^{-zu}\, du.$$

Подставляя полученное выражение в (9) и меняя в левой части порядок интегрирования, имеем

$$z\int_0^\infty e^{-zu}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(u)\,dt\right)du = z\int_0^\infty e^{-zu}\Phi(u)\,du \quad (\operatorname{Re} z>0),$$

откуда $\Phi(u)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(u)\,dt$, а потому

$$\int_0^\infty e^{-u\xi}\,d\tau_\lambda(\xi)=\frac{d}{du}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(u)\,dt. \tag{10}$$

Используя теорему Фубини, (10) и интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty R(\xi,A)\,d\tau_\lambda(\xi) &= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-\xi u}T(u)\,du\right)d\tau_\lambda(\xi)=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-\xi u}\,d\tau_\lambda(\xi)\right)T(u)\,du\\
&=\int_0^\infty T(u)\,d\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(u)\,dt\right)=T(u)\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(u)\,dt\Big|_{u=0}^{+\infty}\\
&-\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(u)\,dt\right)dT(u)=T(u)\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(u)\,dt\Big|_{u=0}^{+\infty}\\
&-\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \nu_t(u)\,dT(u)\right)e^{-\lambda t}\,dt=T(u)\int_0^\infty e^{-\lambda t}\nu_t(u)\,dt\Big|_{u=0}^{+\infty}\\
-\int_0^\infty\left(T(u)\nu_t(u)\Big|_{u=0}^{+\infty}-\int_0^\infty T(u)\,d\nu_t(u)\right)&e^{-\lambda t}\,dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}g_t(A)\,dt=R(\lambda,\psi(A)),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Рассматривая τ_λ как распределение, можно применять к (7) формулы обращения для преобразования Стилтьеса распределений [10] (см. также [11, гл. 5, § 1]). Например,

$$\tau_\lambda(\xi)=(2\pi i)^{-1}\lim_{y\to+0}(f_\lambda(\xi+iy)-f_\lambda(\xi-iy)), \tag{11}$$

где $f_\lambda(z)=1/(\lambda-\psi(z))$ и предел понимается в смысле сходимости в $\mathscr{D}'_+$. Если τ_λ — обычная функция, то предел в (11) поточечный (см., например, [12, с. 244]).

Из теоремы 7 легко выводится следующее свойство устойчивости.

Теорема 8. *Пусть A_n есть генератор C_0-полугруппы T_n, $\|T_n(u)\|\leqslant M$, $n=0,1,\dots$, а функция ψ удовлетворяет условию теоремы 7. Если $R(\lambda,A_n)\to R(\lambda,A_0)$ при $\lambda>0$ равномерно (сильно), то и $R(\lambda,\psi(A_n))\to R(\lambda,\psi(A_0))$ при $\lambda>0$ равномерно (сильно) $(n\to\infty)$.*

Доказательство. При $\lambda>0$, $n=0,1,\dots$ имеем

$$R(\lambda,\psi(A_n))=\int_0^\infty R(\xi,A_n)\,d\tau_\lambda(\xi),$$

причем $\|R(\xi, A_n)\| \leqslant M/\xi$ $(\xi > 0)$. Из (7) при $z \downarrow 0$ в силу теоремы Б. Леви получаем, что функция M/ξ τ_λ-интегрируема. Осталось применить теорему Лебега о мажорированной сходимости.

Пример 1. Функция $\psi(s) = -(-s)^\alpha$ при $\alpha \in (0;1)$ принадлежит классу $\mathcal{T}$ и имеет интегральное представление

$$\psi(s) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty (e^{su} - 1) u^{-1-\alpha}\, du \quad (s < 0),$$

что легко, например, проверить дифференцированием. При этом формула (2) превращается в формулу Балакришнана (см., например, [13, с. 358]). Полагая в теореме 3 $\psi_1(s) = -(-s)^\alpha$, $\psi_2(s) = -(-s)^\beta$, $\alpha, \beta \in (0;1)$, получаем формулу Ватанабе [13, с. 366]). Из теоремы 4 следует, что $(-A)^\alpha \to -A$ в сильном резольвентном смысле при $\alpha \to 1$. Если A порождает голоморфную полугруппу, то теорема 6 дает равенство $\sigma((-A)^\alpha) = \{(-\lambda)^\alpha : \lambda \in \sigma(A)\}$, так как $g(A)$ голоморфна [13, с. 362, теорема 1].

Для того чтобы применить теорему 7, заметим, что $\psi(z)$ есть та ветвь функции $-(-z)^\alpha$ в области $\{\operatorname{Re} z < 0\}$, которая отрицательна при $z = s < 0$. Функция $\psi(z)$ голоморфна в $\{0 < \arg z < 2\pi\}$ и отображает область $\{0 < \arg z < \pi\}$ в себя. Следовательно, этими свойствами обладает и $f_\lambda(z) = 1/(\lambda + (-z)^\alpha)$ при $\lambda > 0$, так как $(-z)^\alpha \neq -\lambda$ при $z \notin (0; +\infty)$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 7, а потому имеет место (8). Считая τ_λ распределением, найдем его по формуле (11). Поскольку $(-\xi \pm i0)^\alpha = e^{\pm i\pi\alpha}\xi^\alpha$ при $\xi > 0$ [14, с. 83], формальные вычисления в алгебре граничных значений голоморфных функций дают

$$\tau_\lambda(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\lambda + e^{-i\pi\alpha}\xi^\alpha} - \frac{1}{\lambda + e^{i\pi\alpha}\xi^\alpha}\right) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi} \frac{\xi^\alpha}{\lambda^2 + 2\lambda\xi^\alpha\cos\pi\alpha + \xi^{2\alpha}},$$

что вместе с (8) приводит к упоминаемой выше формуле Като.

Пример 2. Пусть $\psi(s) = -\log(1-s)$, $s < 0$. Это функция класса $\mathcal{T}$ с интегральным представлением

$$\psi(s) = \int_0^\infty (e^{su} - 1) u^{-1} e^{-u}\, du.$$

Следовательно, по определению 2 $(x \in D(A))$

$$-\log(I - A)x = \int_0^\infty (T(u) - I) x u^{-1} e^{-u}\, du.$$

В рассматриваемом случае

$$g_t(s) = (1-s)^{-t} = \Gamma(t)^{-1} \int_0^\infty e^{su} u^{t-1} e^{-u}\, du,$$

что легко проверить по таблицам преобразования Лапласа, поэтому

$$g_t(A) = (I - A)^{-t} = \Gamma(t)^{-1} \int_0^\infty T(u) u^{t-1} e^{-u}\, du$$

(ср. [6, с. 156]). Эта полугруппа голоморфна. Используя для $g_t(A)$ обозначение $\exp(t\psi(A))$, получаем основное логарифмическое тождество в форме

$$\exp(-t\log(I-A)) = (I-A)^{-t}.$$

Поскольку $\psi(z) = -\log(1-z)$, где выбирается та ветвь логарифма в области $\{-\pi < \arg z < \pi\}$, которая положительна на $(1;+\infty)$, то выполнены все условия теоремы 7. Как и в примере 1, найдем «ядро Като» τ_λ, соответствующее функции ψ, по формуле (11), трактуя его как распределение. Поскольку $\log(x \pm i0) = \log|x| \pm i\pi\theta(-x)$, где θ — функция Хевисайда [14, с. 43, пример 6; с. 51, пример 4], имеем

$$\tau_\lambda(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\lambda+\log(1-\xi-i0)} - \frac{1}{\lambda+\log(1-\xi+i0)}\right) = \frac{\theta(\xi-1)}{\pi^2+(\lambda+\log|\xi-1|)^2}.$$

Таким образом,

$$R(\lambda, -\log(I-A)) = \int_1^\infty \frac{R(\xi,A)\,d\xi}{\pi^2+(\lambda+\log(\xi-1))^2} \quad (\lambda > 0).$$

Рассмотрим конкретный пример логарифма оператора. Пусть $X = C_0(\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$, стремящихся к нулю на бесконечности, с sup-нормой, и пусть Δ — замыкание сужения оператора Лапласа Δ на пространство Шварца $S(\mathbb{R}^n)$. Известно [15, с. 281, пример 5], что Δ есть генератор сжимающей C_0-полугруппы $T(u)$, определяемой сверткой с функцией $y \mapsto (4\pi u)^{-n/2}e^{-|y|^2/4u}$ (определение генератора в [15] отличается знаком от принятого в данной работе). При $x \in D(\Delta)$ имеем

$$\begin{aligned}-\log(I-\Delta)x(s) &= \int_0^\infty\left((4\pi u)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|s-y|^2/4u}x(y)\,dy - x(s)\right)u^{-1}e^{-u}\,du\\ &= \int_0^\infty\left((4\pi u)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|s-y|^2/4u}(x(y)-x(s))\,dy\right)u^{-1}e^{-u}\,du.\end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования и используя формулу 3.471.9 из [16, с. 354], окончательно получаем

$$-\log(I-\Delta)x(s) = 2^{1-n/2}\pi^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x(y)-x(s)}{|y-s|^{n/2}}K_{n/2}(|y-s|/\sqrt{2})\,dy,$$

где K_ν — цилиндрическая функция Макдональда. Этот оператор является генератором полугруппы $(I-\Delta)^{-t}$, которая, как нетрудно убедиться, задается сверткой с функцией

$$y \mapsto 2^{1-t-n/2}\pi^{-n/2}\Gamma(t)^{-1}|y|^{t-n/2}K_{t-n/2}(|y|/\sqrt{2})$$

(«бесселев потенциал» [17, § 27]).

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$\psi(s) = -\operatorname{arch}(1-s) = -\log(1-s+\sqrt{(1-s)^2-1}), \quad s<0,$$

из $\mathcal{T}$. Тогда

$$\psi(s) = \int_0^\infty (e^{su}-1)u^{-1}e^{-u}I_0(u)\,du$$

(I_t — функция Бесселя мнимого аргумента). Поэтому ($x \in D(A)$)

$$-\operatorname{arch}(I-A)x = \int_0^\infty (T(u)-I)xu^{-1}e^{-u}I_0(u)\,du.$$

В этом примере

$$g_t(s) = (1-s+\sqrt{(1-s)^2-1})^{-t} = \int_0^\infty e^{su}u^{-1}e^{-u}tI_t(u)\,du,$$

что также можно проверить по таблицам преобразования Лапласа. Значит,

$$g_t(A) = (I-A+\sqrt{(I-A)^2-I})^{-t} = \int_0^\infty T(u)u^{-1}e^{-u}tI_t(u)\,du.$$

Для проверки выполнения условий теоремы 7 заметим, что $\psi(z) = -\operatorname{arch}(1-z)$, где ветвь арккосинуса в области $\mathbb{C}\setminus(-\infty;1]$ выделяется условием $\operatorname{arch}x > 0$ при $x > 1$. Поэтому $\psi(z)$ голоморфна в области $\{0 < \arg z < 2\pi\}$. Остальные свойства функции ψ легко выводятся из представления $\psi(z) = -\log w(1-z)$, где $w(\zeta) = \zeta + \sqrt{\zeta^2-1}$ — та ветвь функции, обратной функции Жуковского, для которой $w(x) > 1$ при $x > 1$. Пользуясь свойствами функции $w(\zeta)$, нетрудно проверить, что $\arg w(x \pm i0) = \pm\eta(x)$, где $\eta(x) = \pi$ при $x \leqslant -1$, $\eta(x) = \arccos x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\eta(x) = 0$ при $x \geqslant 1$, а потому

$$\log w(x \pm i0) = \log|x+\sqrt{x^2-1}| \pm i\eta(x).$$

Поскольку

$$f_\lambda(\xi \pm i0) = \frac{1}{\lambda + \log w(1-\xi \mp i0)},$$

формула (11) дает равенство

$$\tau_\lambda(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{\eta(1-\xi)}{\eta^2(1-\xi) + (\lambda + \log|1-\xi+\sqrt{(1-\xi)^2-1}|)^2}.$$

Окончательно получаем

$$R(\lambda, -\operatorname{arch}(I-A)) = \frac{1}{\pi}\int_0^2 \frac{R(\xi,A)\arccos(1-\xi)\,d\xi}{\arccos^2(1-\xi) + (\lambda+\log|1-\xi+\sqrt{(1-\xi)^2-1}|)^2}$$
$$+ \int_2^\infty \frac{R(\xi,A)\,d\xi}{\pi^2 + (\lambda+\log|1-\xi+\sqrt{(1-\xi)^2-1}|)^2} \quad (\lambda > 0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с ней. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
4. *Neuberger J. W.* Lie generators for strongly continuous one parameter semigroups on a metric space // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21, N 6. P. 961–971.

5. *Kato T.* A characterization of holomorphic semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 25, N 3. P. 495–498.
6. *Однопараметрические* полугруппы. М.: Мир, 1992.
7. *Davis E. B.* One-parameter semigroups. London: Acad. Press, 1980.
8. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. М.: Мир, 1971.
9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
10. *Pandex J. N.* On the Stiltjes transform of generalized functions // Proc. Camb. Phil. Soc. 1971. V. 71, N 1. P. 85–96.
11. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977.
12. *Хиршман И., Уиддер Д.* Преобразования типа свертки. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
13. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
14. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. М.: Физматгиз, 1959. Вып. 1.
15. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М.: Мир, 1978.
16. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. М.: Физматгиз, 1963.
17. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

г. Гомель *Статья поступила 14 февраля 1996 г.*