

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОКРЫТИЙ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

¹Можаровский В. В., ²Кушнир Р. М., ²Гачкевич А. Р., ³Кукареко В. А.,
³Кушнеров А. В.

¹Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель

²Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача
НАН Украины

³Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, Минск

Введение. Применение в мировой практике высокоскоростного и надежного промышленного транспорта (автомобилей, электропогрузчиков, подвесных канатных дорог, эскалаторов метро и др.), а также усовершенствование новых способов передачи движений требует создания новых армирующих материалов и инженерных методик расчета. Например, при исследовании контактного взаимодействия упругих тел из композитов возникает необходимость создавать новые методики расчета прочности и износа зубьев зубчатых колес. В связи с этим разрабатываются новые математические модели и компьютерные программы расчета напряжений при контакте индентора с упругим телом (или покрытием) из композита при различных физических параметрах взаимодействия. Следует отметить, что до настоящего времени недостаточно изучено влияние конструктивной анизотропии и функционально-градиентных свойств материалов на напряженно-деформированное состояние, а также влияние источников тепла на температурное поле в покрытиях при силовом квазистатическом воздействии, что не позволяет обосновать практику их проектирования. Кроме того, существует мало сравнимых по эффективности методов расчета и их компьютерной реализации, методик создания алгоритмов поведения конструкций из композитов, особенно из функционально – градиентных материалов.

Анализ применения функционально – градиентных материалов (ФГМ) нельзя проводить без учета их взаимодействия с другими телами сопряжения, а также материала матрицы и армирующих элементов, геометрии компонентов и структуры, и расположения компонентов, по сути, важно учитывать также и метод изготовления материала, что является весьма сложной и многопараметрической задачей.

В связи с этой концепцией, возникает цель исследований – описать и сделать некоторый обзор экспериментально-теоретических исследований для покрытий из функционально-градиентных материалов и наметить пути создания эффективных математических моделей и построения алгоритмов расчета температуры и напряженно-деформированного состояния покрытий при силовом воздействии.

1. Экспериментально-теоретическое исследование покрытий из функционально-градиентных материалов. Известно, что слоистые материалы нашли широкое применение в качестве конструкционных материалов и были разработаны эффективные инженерные методы оценки поведения этих материалов и конструкций. Но в тоже время, пока существует проблема разработки математических моделей для описания термомеханического поведения конструкционных элементов механических и трибологических систем из функционально-градиентных и термочувствительных материалов с физико-механическими характеристиками, зависимыми от температуры, при совместном действии локальных силовых и температурных нагрузений. Контактное фрикционное взаимодействие, лежащее в основе таких явлений как трение и изнашивание, в значительной степени определяет работоспособность ответственных деталей и узлов современных

машин. В связи с этим создание новых конструкционных материалов, обладающих высоким уровнем сопротивления разрушению при трении, является актуальной проблемой современного физического материаловедения. Одним из наиболее перспективных путей решения указанной проблемы является создание материалов с модифицированными поверхностными слоями, обладающими повышенными физико-механическими свойствами и стойкостью к разрушению в процессе фрикционного взаимодействия (износостойкостью) [1–4]. Поскольку процессы фрикционного взаимодействия материалов сопровождаются резким повышением температуры, интенсивным пластическим деформированием и структурно–фазовыми превращениями в тонких поверхностных слоях, то разработка математических моделей, определяющих значение температур и температурного поля, как в покрытии, так и в основании, представляет собой актуальную задачу, имеющую большое практическое значение. В работе [1] представлены результаты исследования структуры, микротвердости и данные триботехнических испытаний образцов стали 12Х18Н10Т, подвергнутой обработке ионами азота при различных температурах. Показано, что при ионном азотировании стали образуются упрочненные слои толщиной от 3 до 18 мкм, характеризующиеся повышенной твердостью (до 1400 HV 0,05) и содержащие азотистый аустенит γ'_N , а также нитридные фазы γ'_N и CrN (рис. 1). Установлено, что в процессе трения образцов стали с упрочненным слоем, происходит переход от стадии постепенного медленного изнашивания азотированного слоя к его ускоренному износу при уменьшении толщины слоя до 3–5 мкм.

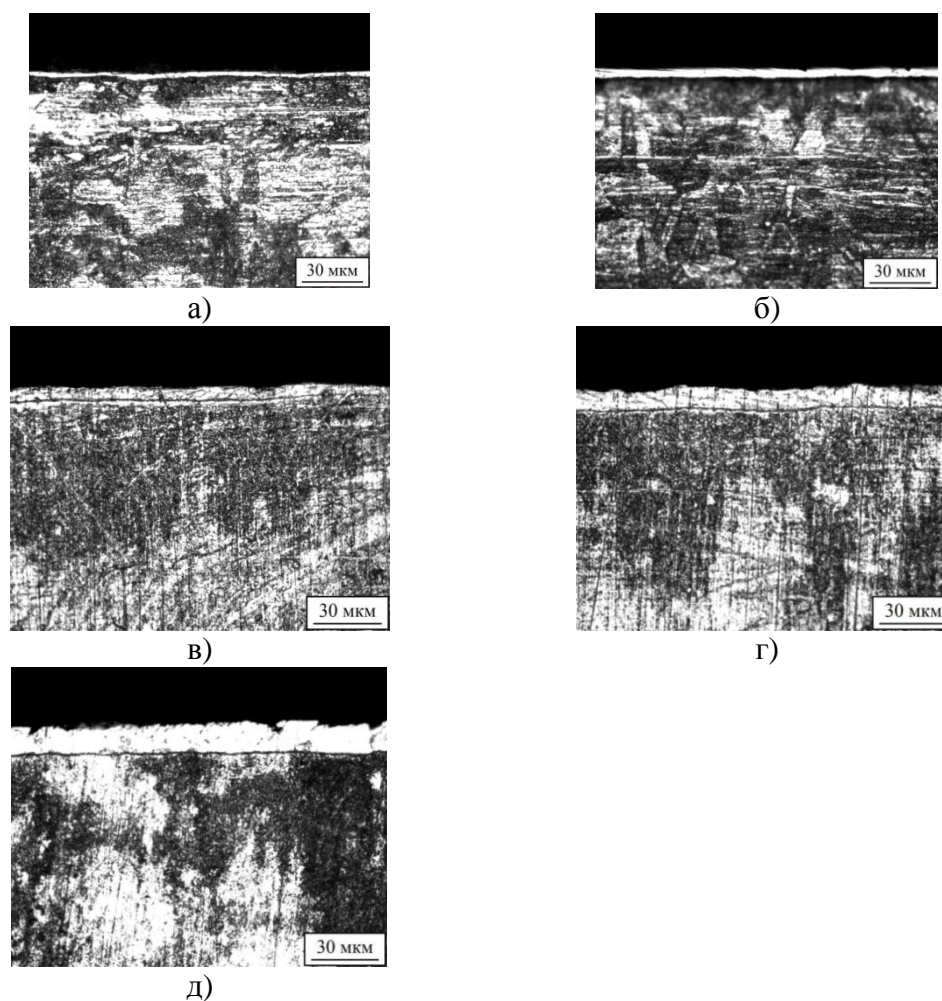


Рис. 1. Микроструктура модифицированной ионами азота стали 12Х18Н10Т: а – обработка при 620 К; б – то же при 670 К; в – то же при 690 К; г – то же при 720 К; д – то же при 770 К [1]

Процесс создания модифицированного поверхностного слоя с функционально-градиентными свойствами может быть различным. Одним из имеющихся перспективных направлений создания функциональных, прочных и износостойких покрытий является высокоэнергетическое воздействие, такое как, ионное азотирование, электродуговое с использованием принципов термодинамики и электромагнитотермомодиффузии, и построение математической модели с применением теории размерностей и подобия, как это представлено в исследованиях [2]. В этой работе акцентируется точка зрения о эффективном процессе создания упрочненных слоев с градиентной структурой с помощью электромагнитного воздействия на смеси, содержащие нитриды железа и хрома. В качестве экспериментальной модели выбрана пластинка с покрытием из порошковой смеси. Нагрев осуществляется высокочастотными индукционными токами. Имеются значительные мировые достижения в области разработки технологии повышения прочностных свойств элементов конструкций, а также создания новых математических моделей, которые адекватно описывают расчет и работу функционально-градиентных материалов. В тоже время, для внедрения разработанных математических моделей, применяющихся к решению краевых задач, в инженерную практику, возникает необходимость создания детальной компьютерной реализации. Так, весьма актуально решение краевой задачи, определяющее температуру слоистой упругой среды в зависимости от граничных условий (с учетом движения индентора). Для исследования влияния физических свойств функционально-градиентных материалов на изменение температурного поля в покрытии в случае движения индентора по поверхности покрытия используются разработанные теоретические подходы, отраженные в работах [5–7]. Составляется алгоритм расчета, строятся графические зависимости изменения температуры в покрытии для различных параметров из функционально-градиентных материалов.

2. Теоретические положения о решении задачи определения температуры и теплового потока в покрытии из функционально-градиентного материала на жестком основании. Для анализа результатов и исследования влияния параметров теплопроводности необходимо найти изменения температуры в покрытии полагая, что температура возникает в области контакта индентор – покрытие. При этом в области контакта $(-a, a)$ действует постоянное напряжение $\sigma_{yy} = const$ или напряжение, изменяющееся по определенному закону. Согласно работам [5–7] температурное поле в покрытии T должно удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

и граничным условиям:

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial y} = -f(x), |x| < a,$$

где $f(x)$ – функция, зависящая от нормального напряжения, коэффициента трения, скорости движения индентора по поверхности. Считаем, что температура для $y = h$ равна $T(x, h) = 0$. Решая уравнение (1) с помощью преобразования Фурье, при заданных граничных условиях, получим [5–7] в виде:

$$T(x, y) = 1/\pi \int_0^\infty (A_1 e^{\lambda_1 y} + A_2 e^{\lambda_2 y}) \cos(\beta x) d\beta,$$

$$T = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{\lambda_1 y} e^{\lambda_2 h} - e^{\lambda_2 y} e^{\lambda_1 h}}{\lambda_1 e^{\lambda_2 h} - \lambda_2 e^{\lambda_1 h}} \cdot \tilde{f}(\beta) e^{-i\beta x} d\beta,$$

где $\lambda_1(\beta) = -\frac{\delta}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \beta^2}$, $\lambda_2(\beta) = -\frac{\delta}{2} - \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \beta^2}$, $\tilde{f}(\beta) = -\int_{-a}^a \frac{f(t)}{k_1} e^{it\beta} dt$.

Здесь принято считать, что изменения теплопроводности в зависимости от глубины, осуществляется по закону теплопроводности $k_2(y) = k_1 e^{\delta y}$, где индекс 1 обозначает коэффициент теплопроводности на поверхности слоя, 2 внутри слоя и обозначим k_3 теплопроводность на границе слой – основание. Считая, что температурный коэффициент на глубине $y = h$ равен k_3 , легко определяем параметр $\delta = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{k_3}{k_1}\right)$ (считаем $f(x) = const$ [5, 7]). Температуру T находим из уравнения

$$T = -\frac{4}{\pi} c_y \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda_1 y} e^{\lambda_2 h} - e^{\lambda_2 y} e^{\lambda_1 h}}{\lambda_1 e^{\lambda_2 h} - \lambda_2 e^{\lambda_1 h}} \cdot \frac{\sin a \beta}{\beta} \cos \beta x d\beta.$$

Для наглядной иллюстрации представим результаты решения на графиках (рис. 2, 3), расчеты производились при изменении различных параметров δ для $\frac{a}{h} = 1$. Из анализа графических зависимостей (рис. 2, 3), следует, что изменения свойств теплопроводности влияет на характер изменения температуры покрытия.

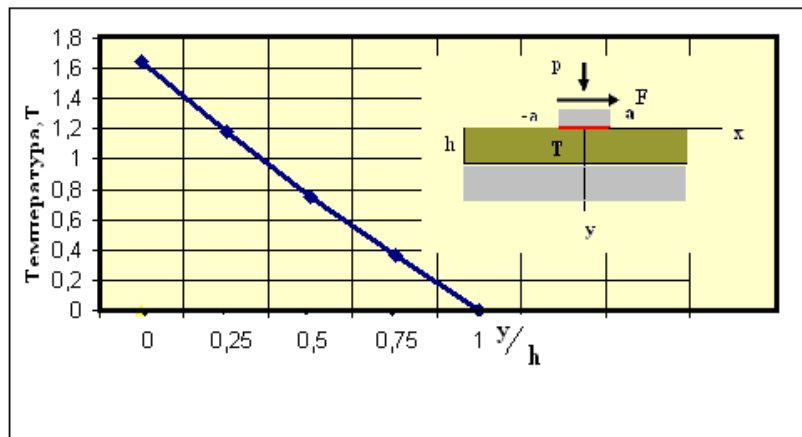


Рис. 2. Качественный характер изменения приведенной температуры (в относительных единицах) по толщине покрытия при $x = 0$, для однородного материала $\delta = 0$

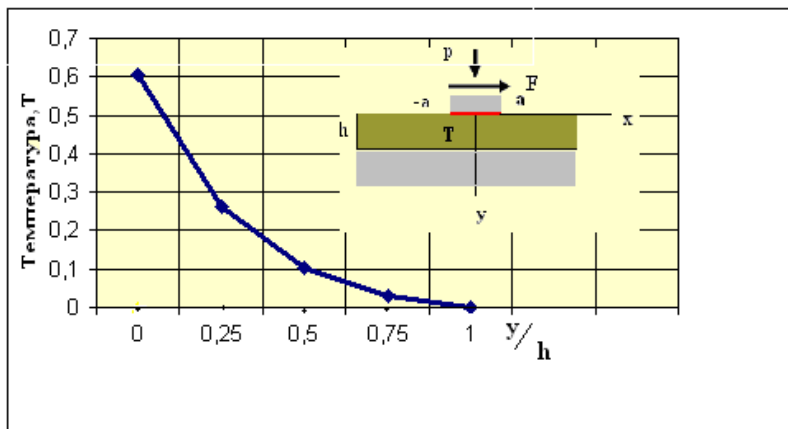


Рис. 3. Качественный характер изменения приведенной температуры по толщине покрытия при $x = 0$, для однородного материала $\delta = 3$

Так скорость падения температуры с толщиной покрытия уменьшается по сравнению с материалами, в которых теплопроводность одинакова для всех толщин покрытия. Такое свойство дает возможность, более замедленно остывать покрытию и поддерживает температуру. Более подробно описание изменения температуры в покрытии приведено

в работе [7]. Как показали расчеты характер изменения температуры по глубине (по оси Oy) зависит от соотношения коэффициентов теплопроводности на поверхности и на границе основания. В одном случае кривая изменения температуры (рис. 3) является вогнутой, если $k_3 > k_1$ и выпуклой [7], если $k_3 < k_1$. Эти изменения температуры в зависимости от геометрических и физических параметров материала слоя дают возможность подбирать материал с функционально-градиентными свойствами, которые необходимы для создания эксплуатационно-надежных покрытий в трибологических системах.

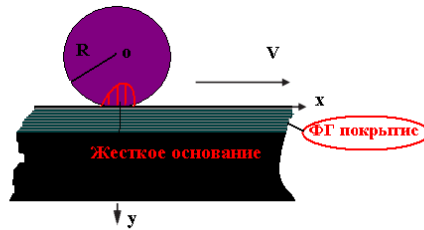


Рис. 4. Схема теплового контакта цилиндрического индентора с покрытием

Для случая контакта цилиндрического индентора (см. рис. 4) нужно подставить закон распределения давления (определяется при решении контактной задачи численно или аналитически). Например, если принять (как показала практика для тонких покрытий) $f(x) = -\mu\nu p_0 = c_y$, при действии нормальной нагрузки, распределенной по параболическому закону – $\sigma_{yy} = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ на участке $-a \leq x \leq a$. Тогда с помощью преобразования Фурье легко находим:

$$\tilde{f}(\beta) = -\frac{4a}{(a/h)^3 \beta^3} \left[\sin \beta \frac{a}{h} - \frac{a}{h} \beta \cos \left(\beta \frac{a}{h} \right) \right] c_y;$$

$p_0 = \frac{3P}{4a}$, P – линейная нагрузка, μ – коэффициент трения, ν – скорость движения индентора. После нахождения A_i из граничных условий находим температуру T . Расчеты строятся для различных законов распределения давления на границе. В настоящее время создается программа для реализации расчета температуры в покрытиях при взаимодействии цилиндрического индентора с покрытием. Более сложная задача определение температуры возникает для функционально-градиентного покрытия, скрепленного с упругим основанием. Для реализации расчета для этой задачи можно использовать теоретические подходы, которые были представлены И. А. Прусовым при определении температуры в изотропном покрытии на изотропном основании методом теории функций комплексного переменного [8]. Для тестирования численных расчетов и компьютерной программы используем простое решение, если покрытие моделируем в виде изотропной полосы с граничными условиями $T(x, y) = f_i(\alpha)$, $i = 1, 2$ для верхней и нижней границы $y = h$ и $y = -h$. При $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ решаем граничную задачу для полосы [8], так имеем

$$T(x, y) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\alpha y) f'(\alpha)}{\operatorname{ch}(\alpha h)} \cos(\alpha x) d\alpha,$$

где $f'(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$.

Оригинальный подход решения задачи об определении температуры для композитного покрытия жестко скрепленного с упругим композитным основанием (подложкой) представлен в работе [9]. Пусть на поверхности задана температура (частный случай, сосредоточенная температура обобщается для произвольного распределения температуры):

$$T_2(x, -h) = T_0 \delta(x - x_0)$$

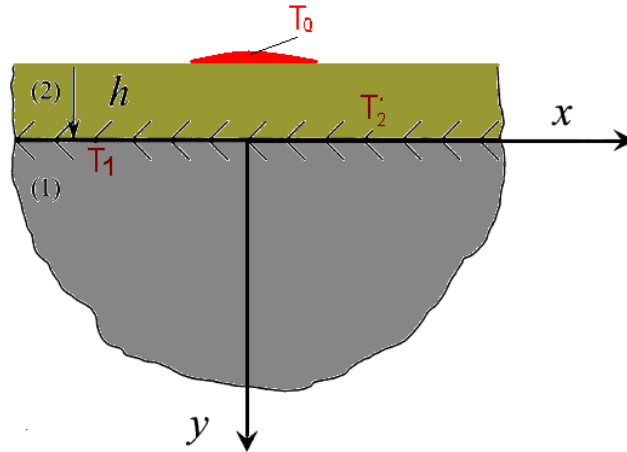


Рис. 5. Схема для определения температуры в покрытии

Необходимо определить температурное поле, как в покрытии, так и основании. Реализацию решения задачи будем осуществлять из позиций теории упругости анизотропного тела на основе работ [8–11]. Для рассматриваемой среды необходимо решить уравнения теплопроводности

$$k_{11}^m \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} + 2k_{12}^m \frac{\partial^2 T_m}{\partial y \partial x} + k_{22}^m \frac{\partial^2 T_m}{\partial y^2} = 0, \quad m = 1, 2,$$

при условии равенства температур и тепловых потоков на границе раздела материалов. Решается задача с помощью преобразования Фурье. В окончательном варианте приближенное решение, представляющее формулы в виде рядов будет иметь следующий вид [9]: для основания:

$$T_1 = \frac{2T_0}{\pi(\eta+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\eta-1}{\eta+1} \right)^n \frac{|q_2^{(1)}y + (2n+1)q_2^{(2)}h|}{[(x-x_0) + (q_1^{(1)}y + q_1^{(2)}h)]^2 + [q_2^{(1)}y + (2n+1)q_2^{(2)}h]^2},$$

для покрытия:

$$T_2 = \frac{T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\eta-1}{\eta+1} \right)^n \frac{|q_2^{(2)}[y + (2n+1)h]|}{[(x-x_0) + q_1^{(2)}(y+h)]^2 + \{[q_2^{(2)}[y + (2n+1)h]]\}^2},$$

где введены следующие обозначения:

$$q_1 = -\frac{k_{12}}{k_{22}}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}}{k_{22}},$$

где k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материалов, $i, j = 1, 2$. (Более подробно теория и обозначения представлены в статье [9]). В настоящее время разрабатывается компьютерная программа [12, 13] для расчета температур и их распределения, как в покрытии, так и основании для различных материалов. Рассматриваются частные случаи, когда покрытие и основание изотропные, а также другие сочетания тепловых свойств материалов.

3. Математическое моделирование определения температуры для слоя на упругом полупространстве. Для более детального изучения температурного поля в слое, находящемся на упругом полупространстве, на основании работ [7–9, 15], рассмотрим алгоритм расчета потока тепла и значения температур. Можно использовать теорию, данную в книге [14], составляем алгоритм расчета для определения температур и теплового потока [14] и выражения для температуры в слое и полупространстве при различных законах изменения потока тепла q . Считая, что поток тепла проходит через границу полупространства $q(x, y) = q \cos \alpha x \cos \beta y$, то $T(x, y, z) = f(z) \cos \alpha x \cos \beta y$. При действии источника Q_0 , приложенного в точке с координатами $z = 0, r = 0$, имеем:

при $h \geq z \geq 0$,

$$T(r, z) = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} \gamma \left[A(\gamma) ch\gamma z - \frac{q_0}{\lambda_0 \gamma} sh\gamma z \right] J_0(\gamma r) d\gamma, \quad \text{при } \infty > z \geq h,$$

$$T(r, z) = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} \gamma f_1(\gamma, z) B(\gamma) J_0(\gamma r) d\gamma, \quad A(\gamma) = \frac{1}{\gamma q_0} \frac{\lambda_1(h) sh\gamma h \frac{df_1(\gamma, h)}{dz} - \lambda_0 \gamma ch\gamma h f_1(\gamma, h)}{\lambda_1(h) ch\gamma h \frac{df_1(\gamma, h)}{dz} - \lambda_0 \gamma sh\gamma h f_1(\gamma, h)},$$

$$B(\gamma) = \frac{1}{\gamma q_0} \frac{1}{sh\gamma h \cdot f_1(\gamma, h) - \lambda_1(h) \lambda_0^{-1} \gamma^{-1} ch\gamma h \frac{df_1(\gamma, h)}{dz}}.$$

где λ_1 есть коэффициент теплопроводности слоя полупространства, а λ_0 – коэффициент теплопроводности полупространства.

Если слой, так и полупространство являются однородными то [14]

$$A(\gamma) = \frac{1}{\lambda_0 \gamma} \frac{\lambda_1 sh\gamma h + \lambda_0 ch\gamma h}{\lambda_1 ch\gamma h + \lambda_0 sh\gamma h}, \quad B(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\lambda_1 ch\gamma h + \lambda_0 sh\gamma h}.$$

Для инженерного расчета в работе [14] рекомендуется применение мембранной модели. Принимая, что для источника тепла q равномерно распределенного по площади прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$, решение принимает вид

$$T = \frac{4q}{\pi^2} \iint_0^{\infty} \frac{\sin \alpha a \sin \beta b \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta}{\left[\beta_1 + \lambda_1 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \lambda h (\alpha^2 + \beta^2) \alpha \beta \right]}.$$

В частном случае, когда задан точечный источник Q , температура выражается следующим образом [14]:

$$T = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\gamma J_0(\gamma r) d\gamma}{\beta_1 + \lambda_1 \gamma + \lambda h \gamma^2};$$

В этих формулах λ_1 есть коэффициент теплопроводности полупространства, а λ – коэффициент теплопроводности мембраны; $J_0(\gamma r)$ – функция Бесселя. Рассмотрена реализация задачи об определении температуры для композитного покрытия жестко скрепленного с упругим композитным основанием (подложкой) [14].

4. Численная методика расчета напряженного состояния покрытий. Следует отметить, что с позиции механики деформируемого твердого тела решение данной проблемы – создание материалов с упрочненными поверхностными слоями, представляет значительный интерес. С аналитическим и численным подходами к решению аналогичных задач можно ознакомиться, например, в работах [15–18]. При этом следует отметить, что современные исследования показывают существенную зависимость напряженного состояния слоистых тел, в том числе и упругих покрытий с упругой подложкой (основанием), от физико-механических характеристик (значений модулей упругости, коэффициентов

Пуассона, микротвердости и т. д.) как покрытий, так и подложки. Максимальные касательные напряжения, которые способствуют разрушению слоистой системы, в основном, концентрируются на границе раздела «покрытие – основание» или вблизи поверхности и существенно зависят от коэффициента трения, геометрической формы, а также упругих свойствах контртела, вступающего в контакт. Так, например [1], на рис. 6 представлены результаты расчета по методу конечных элементов максимальных напряжений в слоистой среде при контакте цилиндрического индентора [1] параболическому закону:

$$p(x) = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad p_0 = \frac{3P}{4a},$$

действие касательных усилий (при учете трения в контакте), согласно закона Кулона:

$$q(x) = f \cdot p(x),$$

где f – коэффициент трения.

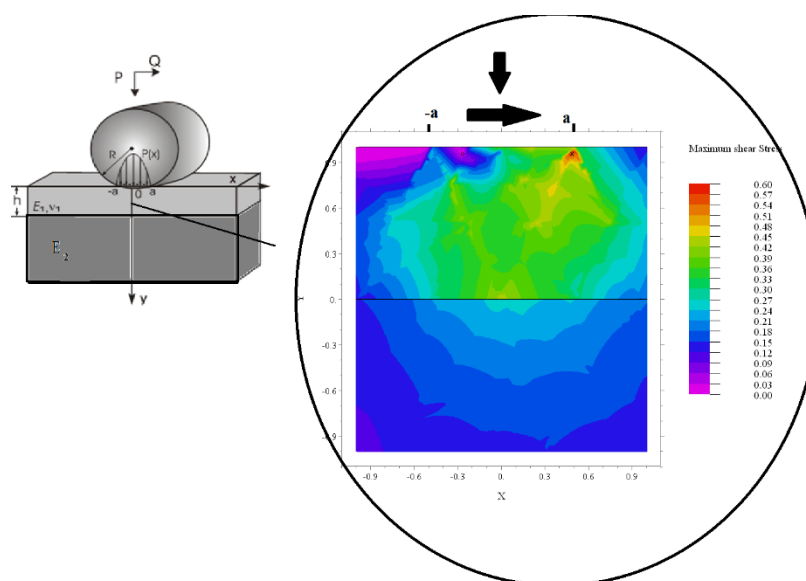


Рис. 6. Распределение полей максимальных напряжений τ_{\max} [1]

Общая картина распределения напряжений представлена изолиниями максимальных напряжений. Максимальные суммарные напряжения достигаются в слое покрытия вблизи поверхности и достигают значения $0,6p$. Для этого примера принимаем, что для материала основания модуль упругости $E_2 = 1,10 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,26$, толщина основания – 100 мкм. Материал покрытия имеет модуль упругости $E_1 = 4,80 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,22$, коэффициент трения индентора по покрытию $f = 0,15$, толщина покрытия $h = 1$ мкм, $a = 0,5$ мкм. Характер распределения максимальных касательных напряжений τ_{\max} в покрытии сходен с распределением их в упругом основании, однако наибольшее значение τ_{\max} и глубина, на которой они действуют, зависит от отношений области контакта контртела упрочненного слоя, приложенного упрочненному слою и его толщины. Для относительно толстых покрытий максимум τ_{\max} напряжений может достигаться внутри покрытия или на границе раздела, а для более тонких – внутри основания.

Выводы. В статье приведен обзор новых подходов по исследованию напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций (покрытий и оснований) из функционально-градиентных материалов с учетом температуры. На основании описания экспериментально-теоретических исследований покрытий из функционально-градиентных

материалов и теоретических положений решения задач определения температуры и теплового потока в покрытиях показана возможность построения алгоритмов реализации определения температурных полей для покрытий из ФГМ. Представленный подход и численная методика расчета напряженного состояния может быть основой для дальнейшего развития решений трибологических задач с учетом температурных явлений.

Работа частично поддержана НАН Беларуси (БРФФИ) - НАН Украины, грант Т20УКА-012.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукареко, В. А. Закономерности изнашивания упрочненной ионами азота аустенитной стали 12X18H10T / В.А. Кукареко [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4(39). – С. 37–42.
2. Гачкевич, А. Р. Моделирование механотермодиффузионных процессов в приповерхностном слое элементов конструкций при нанесении эвтектического покрытия с использованием электромагнитного воздействия / А. Р. Гачкевич [и др.] // «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК-2020», Міжнародна наукова конференція, Дніпро. – 2020. – С. 74–76.
3. Белый, А. В. Влияние режимов ионно-лучевого азотирования на структуру, микротвердость и магнитные свойства диффузионного слоя на аустенитной стали / А. В. Белый, В. А. Кукареко, С. Г. Сандомирский // *Металловедение и термическая обработка металлов*. – 2009. – № 3(645). – С. 9–14.
4. Витязь, П. А. Механизм контактного разрушения при трении материалов с модифицированными ионами азота слоями / П. А. Витязь [и др.] // *Актуальные проблемы прочности. Труды XLIII Международной конференции*. Витебск, Беларусь; 27 сентября – 1 октября 2004. – С. 281–291.
5. Peijian, C. Thermo-mechanical contact behavior of a finite graded layer under a sliding punch with heat generation / C. Peijian, C. Shaohua // *International Journal of Solids and Structures*. – 2013. – Vol. 50. – P. 1108–1119; №6. – P. 34–43.
6. Можаровский, В. В. Анализ механико-математических моделей расчета функционально – градиентных материалов, работающих в условиях контактного взаимодействия / В. В. Можаровский, Е. М. Березовская // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2013. – № 3. – С. 14–21.
7. Можаровский, В. В. О расчете напряженного состояния покрытий из функционально-градиентных и термочувствительных материалов / В. В. Можаровский, Е. М. Березовская // *Известия ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель*. – 2014. – С. 86–92.
8. Прусов, И. А. Термоупругие анизотропные пластинки / И. А. Прусов. – Мн.: БГУ, 1978. – 200 с.
9. Ming-Hsien Hsieh Analytical investigations for heat conduction problems in anisotropic thin-layer media with embedded heat sources / Ming-Hsien Hsieh, Chien-Ching Ma // *I. J. of Heat and Mass Transfer*. – 2002. – № 45. – P. 4117–4132.
10. Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск: Наука, 1988. – 280 с.
11. Можаровский, В. В. Методика определения параметров контакта индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании / В. В. Можаровский, Д. С. Кузьменков // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 6. – С. 74–81.
12. Mozharovsky, V. Mathematical modeling of the problem of determining temperature in a layered object in contact for functionally gradient materials / V. Mozharovsky [et al.] // *XI international Skorobohatko mathematical conference; Lviv, Ukraine; October 26–30, 2020*. – P. 77.

13. Можаровский, В. В. Реализация задачи определения температуры и теплового потока в покрытии / В. В. Можаровский, Д. С. Кузьменков, В. А. Кукареко // Материалы X международной научно-практической конференции. Часть 1, под общ. Ред. Ю.И. Кулаженко, «Проблемы безопасности на транспорте». – Гомель. – 26–27 ноября 2020 г. – С. 108–109.
14. Корнев, Б. Г. Задачи теории теплопроводности и термоупругости / Б. Г. Корнев. – М.: Наука, 1980.
15. Горячева, И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
16. Торская, Е. В. Моделирование фрикционного взаимодействия тел с покрытиями / Е. В. Торская // Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. – М. – 2014. – С. 44.
17. Можаровский, В. В. Математическое моделирование контактного взаимодействия цилиндрических тел из композиционных материалов / В. В. Можаровский, С. А. Марьин, Н. А. Марьина // Вычислительная математика и математические проблемы механики: матер. II Междунар. научн. конф., Львов, 31 августа – 4 сентября 2009 г. – Львов: Институт прикладных проблем математики и механики НАН Украины, 2009. – С. 288–290.
18. Бурака, Я. Й. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Р.М. Кушнір, В.С. Попович; під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра // Львів: СПОЛОМ, Термопружність термочутливих тіл. – 2009. – Т. 3. – С. 412.

Поступила: 03.02.2021